Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka VI, Częstochowa 1999

Topologia ultrafiltrowanych przekrojów jako przykład przestrzeni Priestley na P(A)

Dorota Strózik

Niech X będzie zbiorem, T - topologią na zbiorze X oraz $\leq$ relacją częściowego porządku na X. Wtedy układ [X, T, $\leq$] nazywamy *przestrzenią Priestley,* gdy spełnione są następujące warunki:

1) [X,T] jest zwartą przestrzenią Hausdorffa;

2) [X,T,$\leq$] jest porządkowo niespójna, tzn. dla dowolnych a,b$\in$X jeżeli a$\not\leq$b to istnieje wzrastający otwarto-domknięty G taki, że a$\in$G i b$\notin$G. Równoważnie ostatni warunek można sformułować następująco: dla dowolnych a,b$\in$X, a$\leq$b wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wzrastającego otwarto-domkniętego G to, że a$\in$G implikuje b$\in$G.

W niniejszej pracy przedstawimy pewien przykład przestrzeni topologicznej na zbiorze potęgowym P(A) pewnego niepustego zbioru A. Nazywamy ją topologią ultrafiltrowanych przekrojów, w skrócie UIT. Następnie pokażemy, że ta przestrzeń topologiczna jest przestrzenią Priestley oraz, że każda domknięta podprzestrzeń tej przestrzeni jest także przestrzenią Priestley.

Oprócz tego udowodnimy, że P(A) z wprowadzoną przez nas topologią pokrywa się z topologią Tichonowa na 2^A. Co więcej pokażemy, że każda przestrzeń Priestley jest porządkowo homeomorficzna z domkniętą podprzestrzenią przestrzeni [P(X),$\subseteq$,UIT] dla pewnego zbioru X.

Wiadomo, że przestrzenie Priestley stanowią reprezentację topologiczną krat dystrybutywnych. Dokładniej (zobacz H.A. Priestley [1970]), kategoria krat dystrybutywnych z homomorfizmami jako morfizmami jest izomorficzna z kategorią przestrzeni Priestley z odwzorowaniami ciągłymi zachowującymi porządek jako morfizmami. Powyższy wynik był inspiracją do stworzenia ogólnej teorii dualności dla dowolnych krat (zobacz A. Urquhart [1978], C. Hartonas [1997], J. M. Dunn [1997] i wielu innych).

Niech A$\neq\emptyset$, P(A) oznacza zbiór potęgowy utworzony ze zbioru A. Podzbiory zbioru A oznaczamy literami i, j, itd. Niech I będzie rodziną podzbiorów zbioru A. Zatem jeśli i$\in I$, to i$\subseteq$A. Niech U oznacza ultrafiltr nad I (na P(I)). Przez $\bigcap_U I$ oznaczmy ultrafiltrowany przekrój rodziny I modulo U,który rozumiemy w następujący sposób:

Definicja 1 *$a \in \bigcap_U I$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{i \in I : a \in i\} \in U$.*

Oczywiście $\bigcap_U I \subseteq A$ oraz $\bigcap I \subseteq \bigcap_U I$. Z definicji ponadto wynika, że

$$\bigcap_U I = \bigcap\{\bigcup B : B \in U\}.$$

Oznaczmy przez $\overline{I}$ - domknięcie I.

Definicja 2 *$\overline{I} = \{\bigcap_U I : U$ - ultrafiltr nad $I\}$.*

Lemat 1 *Niech $I, J \subseteq P(A)$. Wtedy*

(1) $I \subseteq \overline{I}$;

(2) $I \subseteq J \Rightarrow \overline{I} \subseteq \overline{J}$;

(3) $\overline{\overline{I}} \subseteq \overline{I}$;

(4) $\overline{I \cup J} = \overline{I} \cup \overline{J}$.

Zatem $^-$ jest topologicznym operatorem domknięcia na $P(A)$.

Dowód: (1) Niech $i_0 \in I$. Pokażemy, że $i_0 \in \overline{I}$. Niech U_{i_0} będzie głównym ultrafiltrem nad I, tj. $U_{i_0} = (i_0) := \{X \subseteq I : i_0 \in X\}$. Wtedy $\bigcap_{U_{i_0}} I = i_0$. Rzeczywiście a $\in \bigcap_{U_{i_0}} I$ wtedy i tylko wtedy, gdy {i$\in I$: a $\in i$} $\in U_{i_0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{i_0\} \subseteq$ {i$\in I$: a $\in i$} wtedy i tylko wtedy, gdy a $\in i_0$. To pokazuje, że $I \subseteq \overline{I}$.

(2) Niech $I \subseteq J$ oraz $i \in \overline{I}$ istnieje ultrafiltr U_1 nad I taki, że $i = \bigcap_{U_1} I$. Z tego, że $I \subseteq J$ wynika istnienie ultrafiltru U_2 nad J takiego, że $I \in U_2$ oraz $U_1 = U_2|_I$, tj. $\{X \subseteq I : X \in U_2\} = U_1$. Wynika stąd, że $\bigcap_{U_1} I = \bigcap_{U_2} I$ co daje $i = \bigcap_{U_2} J$.

(3) Musimy pokazać, że jeśli U_0 jest ultrafiltrem nad $\overline{I}$ to $\bigcap_{U_0} \overline{I} \in \overline{I}$. Dla każdego $i \in \overline{I}$ istnieje ultrafiltr U_i nad I taki, że $i = \bigcap_{U_i} I$ (na mocy definicji $\overline{I}$). Niech U_0 będzie ultrafiltrem nad $\{\bigcap_{U_i} I : i \in I\}$. Definiujemy U nad I następująco:

$$U := \{X \subseteq I : \{\bigcap_{U_i} I : X \in U_i\} \in U_0\}$$

Uwaga 1 *U jest ultrafiltrem nad I.*

Dowód: Pokażemy najpierw, że U jest filtrem.

(i) Niech $X \in U, X \subseteq Y \subseteq I$. Wtedy $U_0 \ni \{\bigcap_{U_i} I : X \in U_i\} \subseteq \{\bigcap_{U_i} I : Y \in U_i\}$ ponieważ $X \subseteq Y$. Zatem $Y \in U$.

(ii) Niech X, Y $\in$ U. Wtedy $\{\bigcap_{U_i} I : X \in U_i\} \in U_0$ i $\{\bigcap_{U_i} I : Y \in U_i\} \in U_0$. Zatem ich przekrój $U_0 \ni \{\bigcap_{U_i} I : X \in U_i\} \cap \{\bigcap_{U_i} I : Y \in U_i\} = \{\bigcap_{U_i} I : X \cap Y \in U_i\}$. Zatem $X \cap Y \in U$.

(iii) Załóżmy, że $X \cup Y \in U$. Zatem $\{\bigcap_{U_i} I : X \cup Y \in U_i\} \in U_0 \Leftrightarrow \{\bigcap_{U_i} I : X \in U_i \text{ lub } Y \in U_i\} \in U_0 \Leftrightarrow \{\bigcap_{U_i} I : X \in U_i\} \in U_0$ lub $\{\bigcap_{U_i} I : Y \in U_i\} \in U_0 \Leftrightarrow X \in U$ lub $Y \in U$.

(iv) U jest filtrem właściwym ponieważ $\emptyset \notin U$. Zatem U jest ultrafiltrem.

Uwaga 2 $\bigcap_{U_0} \overline{I} = \bigcap_U I$.

Dowód: Niech $a \in A$ oraz $X := \{j \in I : a \in j\}$. Mamy $a \in \bigcap_{U_0} \overline{I} \Leftrightarrow \{\bigcap_{U_i} I : a \in \bigcap_{U_i} I\} \in U_0 \Leftrightarrow \{\bigcap_{U_i} I : \{j \in I : a \in j\} \in U_i\} \in U_0 \Leftrightarrow \{\bigcap_{U_i} I : X \in U_i\} \in U_0 \Leftrightarrow X \in U \Leftrightarrow \{j \in I : a \in j\} \in U \Leftrightarrow a \in \bigcap_U I$.

Uwagi 1 i 2 dowodzą, że $\bigcap_{U_0} \overline{I} \in \overline{I}$. Zatem (3) zachodzi.

(4) Zakładamy, że $X \in \overline{I \cup J}$. Zatem istnieje ultrafiltr U nad $I \cup J$ taki, że $X = \bigcap_U I \cup J$. Ale $I \in U$ lub $J \in U$, bo $I \cup J \in U$ oraz U jest ultrafiltrem i dlatego $X = \bigcap_{U|_I} I$ lub $X = \bigcap_{U|_J} J$. Zatem $X \in \overline{I} \cup \overline{J}$. Kończy to dowód Lematu 1.

Podstawowym twierdzeniem tej części pracy jest następujący wynik:

Twierdzenie 1 $[P(A), \subseteq, UIT]$ *jest przestrzenią Priestley.*

Dowód tego twierdzenia polega na pokazaniu serii lematów. Zaczniemy od opisu postaci zbiorów otwarto-domkniętych powyższej przestrzeni.

Dla każdego $a \in A$ definiujemy

$$a^\star = \{i \subseteq A : a \in i\}.$$

Uwaga 3 $\overline{a^\star} = a^\star$ *dla wszystkich* $a \in A$.

Dowód: Każde $a^\star$ jest rodziną podzbiorów z A. Ustalmy $a \in A$ i niech $I = a^\star$. Niech U będzie ultrafiltrem nad I. Musimy pokazać, że $\bigcap_U I \in I$, tj. $\bigcap_U I \in a^\star$, tj. $a \in \bigcap_U I$. Ale ponieważ $a \in i$ dla wszystkich $i \in a^\star = I$ oraz $I \in U$ zatem mamy $a \in \bigcap_U I$.

Uwaga 4 $\overline{P(A) - a^\star} = P(A) - a^\star$ *dla wszystkich* $a \in A$.

Dowód: Niech $a \in A$ oraz $I = \mathrm{P(A)} - a^\star$. Niech U będzie ultrafiltrem nad I. Musimy pokazać, że $\bigcap_U I \in I$, tj. $\bigcap_U I \notin a^\star$, tj. $a \notin \bigcap_U I$. Ale mamy: $a \notin \bigcap_U I \Leftrightarrow \{i \in I : a \in I\} \notin U \Leftrightarrow \{i \in I : a \notin i\} \in U$. Z tego, że $I = \mathrm{P(A)} - a^\star$ mamy $a \notin i$ dla wszystkich $i \in I$. Zatem $\{i \in U : a \notin i\} \in U$ zachodzi. Dlatego $a \notin \bigcap_U I$.

Na mocy Uwag 3 i 4 każde $a^\star$ $(a \in A)$ jest zbiorem otwarto-domkniętym w topologii ultrafiltrowanych przekrojów na P(A).

Lemat 2 *Rodzina*

$$B_0 = \{a^\star : a \in A\} \cup \{P(A) - a^\star : a \in A\}$$

tworzy podbazę dla UIT na P(A).

Dowód: Niech B będzie rodziną złożoną ze skończonych przekrojów zbiorów z B_0. Elementy z B są postaci:

$$(+) \quad (a_1^\star \cap \ldots \cap a_m^\star) \cap (P(A) - (b_1^\star \cup \ldots \cup b_n^\star)),$$

gdzie $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in A$. Każdy element typu (+) jest także otwarto-domknięty. Przekrój skończonej ilości zbiorów domkniętych jest domknięty oraz przekrój skończonej ilości zbiorów otwartych jest otwarty.

Musimy pokazać, że każdy zbiór otwarty w UIT jest sumą pewnych zbiorów typu (+). Skorzystamy z następującego prostego faktu topologicznego:

Fakt 1 *Jeżeli A jest podzbiorem przestrzeni topologicznej i a - elementem tej przestrzeni, to $a \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists$ zbiór otwarty G taki, że $a \in G$ i $G \cap A = \emptyset$.*

Niech I będzie ustalonym podzbiorem P(A) oraz $X \in P(A)$. Zatem, by udowodnić Lemat 2 wystarczy pokazać:

Uwaga 5 *Dla dowolnego zbioru postaci (+) następujące warunki są równoważne:*

(a) $X \in (+)$ *implikuje* $(+) \cap I \neq \emptyset$.

(b) $X \in \overline{I}$.

Dowód: Dla każdego $a \in A$ kładziemy

$$\hat{a} = \{i \in I : a \in i\}.$$

$(a) \Rightarrow (b)$. Załóżmy (a). Warunek ten mówi, że rodzina

$$(1) \quad \{\hat{a} : a \in X\} \cup \{I - \hat{b} : b \notin X\}$$

ma własność skończonych przekrojów. Zatem istnieje ultrafiltr U_0 nad I zawierający rodzinę (1). Pokażemy, że

$$X = \bigcap_{U_0} I$$

Rzeczywiście jeśli $a \in X$ wtedy $\hat{a} \in U_0$ (na mocy definicji U_0) co oznacza, że $\{i \in I\colon a \in i\} \in U_0$. Stąd $a \in \bigcap_{U_0} I$. Zatem $X \subseteq \bigcap_{U_0} I$. Jeśli $b \notin X$, wtedy $I - \hat{b} \in U_0$ (na mocy definicji U_0), co oznacza, że $\{i \in I : b \notin i\} \in U_0$, tj. $\{i \in I\colon b \in i\} \notin U_0$, tj. $b \notin \bigcap_{U_0} I$. Zatem $\bigcap_{U_0} I \subseteq X$ co dowodzi, że $X = \bigcap_{U_0} I$. Stąd $X \in \overline{I}$ (na mocy definicji $\overline{I}$).

$(b) \Rightarrow (a)$. Załóżmy, że $X \in \overline{I}$ oraz niech $X \in (+)$ dla pewnego zbioru $(+)$. Zatem $a_1, \ldots, a_m \in X, b_1, \ldots, b_n \notin X$ oraz $X = \bigcap_U I$ dla pewnego ultrafiltru U nad I. Wynika stąd, że

$$\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_m \in U \text{ oraz } \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_n \notin U$$

co daje

$$\hat{a}_1 \cap \ldots \cap \hat{a}_m \cap (I - \hat{b}_1) \cap \ldots \cap (I - \hat{b}_n) \in U$$

a więc

$$\hat{a}_1 \cap \ldots \cap \hat{a}_m \cap (I - \hat{b}_1) \cap \ldots \cap (I - \hat{b}_n) \neq \emptyset$$

Niech i będzie zatem dowolnym elementem powyższego zbioru. Znaczy to, że $i \in I$ oraz

$$i \in a_1^\star \cap \ldots \cap a_m^\star \cap (P(A) - (b_1^\star \cup \ldots \cup b_n^\star))$$

Zatem $i \in (+)$ co pokazuje, że $(+) \cap I \neq \emptyset$.
Dowodzi to Uwagi 5 i stąd Lematu 2.

Lemat 3 $[P(A), UIT]$ *jest przestrzenią Hausdorffa.*

Dowód: Niech $i, j \subseteq A$ $i \neq j$. Zatem istnieje $a \in A$: $a \in i - j$ lub $a \in j - i$. Załóżmy, że $a \in i - j$. Zatem $i \in a^\star$ $j \notin a^\star$, tj. $i \in a^\star$ $j \in P(A) - a^\star$. Zbiory $a^\star$ oraz $P(A) - a^\star$ są otwarte i $a^\star \cap (P(A) - a^\star) = \emptyset$.

Następna obserwacja lokalizuje [P(A), UIT] wśród przestrzeni topologicznych.

Niech $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ będzie dwuelementową przestrzenią topologiczną z topologią dyskretną. Oczywiście $\mathbf{2}$ jest zwartą przestrzenią Hausdorffa i każdy podzbiór z $\mathbf{2}$ jest otwarto-domknięty. Teraz niech $A \neq \emptyset$ będzie zbiorem i rozpatrzmy zbiór odwzorowań 2^A zaopatrzony w topologię produktową (Tichonowa).

Jak wiemy zbiory postaci $\Pi_a^{-1}(\{1\})$ i $\Pi_a^{-1}(\{0\}), a \in A$ tworzą podbazę topologii Tichonowa. Ale każdy element f ze zbioru 2^A jest funkcją charakterystyczną dla pewnego podzbioru zbioru A. Identyfikujemy każdą funkcję charakterystyczną ze zbiorem złożonym z elementów x, dla których f(x) = 1. Mamy $2^A = P(A)$. Zatem $\Pi_a^{-1}(\{1\})$ = wszystkie funkcje charakterystyczne zbiorów, do których należy a czyli wszystkie podzbiory zbioru A, do których a należy zatem $a^\star$. Tak samo mamy $\Pi_a^{-1}(\{0\}) = P(A) - a^\star = \{i \in P(A) : a \notin i\}$ dla wszystkich $a \in A$. Ale zbiory $a^\star$, $P(A) - a^\star$ tworzą podbazę UIT na P(A). Zatem

Lemat 4 *UIT na P(A) pokrywa się z topologią Tichonowa na* 2^A.

Zatem na mocy twierdzenia Tichonowa otrzymujemy, że:

Lemat 5 $[P(A), \subseteq, UIT]$ *jest zwarta.*

Lemat 6 *Niech* $i, j \subseteq A$. *Jeśli* $i \nsubseteq j$ *wtedy istnieje otwarto-domknięty wzrastający zbiór G taki, że* $i \in G$, $j \notin G$.

Dowód: Niech $a \in i - j$. Wtedy $i \in a^\star$ oraz $j \notin a^\star$. $a^\star$ jest zbiorem otwarto-domkniętym, wzrastającym.

Na mocy powyższych lematów otrzymujemy iż $[P(A), \subseteq, UIT]$ jest przestrzenią Priestley.

Twierdzenie 2 *Każda domknięta podprzestrzeń przestrzeni [P(A),* $\subseteq$*, UIT] jest przestrzenią Priestley.*

Dowód: Niech $B \subseteq P(A)$, $[B, \subseteq, UIT|_B]$ będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $[P(A), \subseteq, UIT]$. B jest zatem domknięty ze względu na ultrafiltrowane przekroje. Wiemy, że podprzestrzeń ta jest zwartą przestrzenią Hausdorffa, ponieważ własności te są własnościami dziedzicznymi dla podprzestrzeni domkniętych. Wystarczy pokazać, że podprzestrzeń ta jest porządkowo niespójna. Innymi słowy musimy pokazać, że jeżeli $a, b \in B$ oraz $a \nsubseteq b$ wtedy istnieje otwarto-domknięty wzrastający zbiór G (w przestrzeni B) taki, że $a \in G$ i $b \notin G$.

Niech $a, b \in B$ oraz $a \nsubseteq b$. Wtedy wiemy, że $a, b \in P(A)$ oraz $a \nsubseteq b$ więc istnieje $F \subseteq P(A)$ takie, że $a \in F$ i $b \notin F$. Zatem wystarczy wziąć $G = F \cap B$. Łatwy dowód, że jest on otwarto-domkniętym wzrastającym zbiorem pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenie 3 (O reprezentacji dla przestrzeni Priestley) *Każda przestrzeń Priestley [A,* $\leq$*, T] jest porządkowo-homeomorficzna z domkniętą podprzestrzenią przestrzeni [P(X),* $\subseteq$*, UIT] dla pewnego zbioru X.*

Dowód: Niech $[A, \leq, T]$ będzie przestrzenią Priestley. Stąd $[A, T]$ jest przestrzenią Stone'a. Niech rodzina O będzie rodziną wszystkich otwarto-domkniętych podzbiorów z A. $O\uparrow$ oznacza rodzinę wszystkich wzrastających otwarto-domkniętych podzbiorów A.

Niech $i_a := \{G \in O\uparrow: a \in G\}$ dla każdego $a \in A$. Łatwo widać, że odwzorowanie

$$h(a) = i_a$$

jest różnowartościowe i ,,na" oraz zachowuje porządek, to znaczy $a \leq b \Leftrightarrow i_a \subseteq i_b$ dla wszystkich $a, b \in A$ Oczywiście $i_a \subseteq O\uparrow$, tzn. $i_a \in P(O\uparrow)$ dla wszyskich $a \in A$. Niech

$$I := \{i_a : a \in A\}.$$

Lemat 7 *$[I, \subseteq, UIT|_I]$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $[P(O\uparrow), \subseteq, UIT]$ i dlatego jest ona przestrzenią Priestley.*

Dowód: Niech U będzie ultrafiltrem nad I. Pokażemy, że $\bigcap_U I \in I$, tj. $\bigcap_U I = i_{a_0}$, dla pewnego $a_0 \in A$. Mamy, że dla dowolnego $G \in O\uparrow$:

$$G \in \bigcap\nolimits_U I \Leftrightarrow \{i_a \in I : G \in i_a\} \in U \quad (*) \quad \Leftrightarrow \{i_a \in I : a \in G\} \in U$$

Zdefiniujmy rodzinę U' podzbiorów P(A) następująco. Niech $X \subseteq A$. Wtedy $X \in U'$ wtedy i tylko wtedy, gdy$\{i_a : a \in X\} \in U$. Widać, że U' jest ultrafiltrem w P(A). Zatem obcięcie $U'|_O$ jest też ultrafiltrem w algebrze Boole'a O. Wiadomo, że każdy ultrafiltr w algebrze Boole'a zbiorów otwarto-domkniętych przestrzeni zwartej jest wyznaczony przez punkt. W przypadku ultrafiltru $U'|_O$ znaczy to, iż $\exists\ a_0 \in A$ takie, że $U'|_O = \{G \in O : a_0 \in G\}$. Niech $G \in O\uparrow$. Mamy: $G \in \bigcap_U I$ wtedy i tylko wtedy, gdy (na mocy (*)) $\{i_a \in I : a \in G\} \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy (z definicji U') $G \in U'$ wtedy i tylko wtedy, gdy (ponieważ $G \in O\uparrow \subseteq O$) $a_0 \in G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G \in i_{a_0}$. Zatem $\bigcap_U I = i_{a_0}$, co kończy dowód.

Lemat 8 *$(A, \leq, T)$ jest porządkowo-homeomorficzna z $[I, \subseteq, UIT|_I]$.*

Dowód: Niech $h(a) := i_a$ $(a \in A)$. Wiemy, że h jest jedno-jednoznaczne i zachowuje porządek (w obu kierunkach). Pokażemy, że h jest homeomorfizmem pomiędzy dwoma przestrzeniami Priestley. Skorzystamy z faktu:

Fakt 2 *Niech [X, T] będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa i $f : X \mapsto X'$ będzie odwzorowaniem ciągłym, gdzie [X', T'] jest przestrzenią topologiczną. Jeżeli [X', T'] jest przestrzenią Hausdorffa i f jest bijekcją wtedy f jest homeomorfizmem.*

Wystarczy zatem pokazać, że h jest odwzorowaniem ciągłym. W tym celu wykorzystamy jeszcze jeden prosty fakt topologiczny:

Fakt 3 *Niech $[X, T]$, $[X', T']$ będą przestrzeniami topologicznymi, $f : X \mapsto X'$ odwzorowaniem. Odwzorowanie f jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(G)$ jest zbiorem otwartym w X dla każdego $G \in B$, gdzie B jest dowolną lecz ustaloną podbazą dla T'.*

Niech $G^\star := \{X \subseteq O\uparrow : G \in X\}$ dla $G \in O\uparrow$. Wiemy, że zbiory postaci

$$G^\star \quad \text{lub} \quad P(O\uparrow) - G^\star,$$

po G przebiegającym $O\uparrow$, tworzą podbazę topologii UIT na $P(O\uparrow)$.

Niech $G \in O\uparrow$. Wtedy: $h^{-1}(G^\star) = \{a \in A\colon i_a \in G\} = \{a \in A : G \in i_a\} = \{a \in A : a \in G\} = G$. Zatem $h^{-1}(G)$ jest otwarto-domknięty w $[A, \leq, \mathrm{T}]$. Podobnie $h^{-1}(P(O\uparrow) - G^\star) = \{a \in A : i_a \in (P(O\uparrow) - G^\star)\} = \{a \in A : i_a \notin G^\star\} = \{a \in A : G \notin i_a\} = \{a \in A : a \notin G\} = A - G$ Zatem $h^{-1}(P(O\uparrow) - G^\star)$ jest otwarto-domknięty w $[A, \leq, \mathrm{T}]$. Pokazuje to, że h jest odwzorowaniem ciągłym z A do $P(O\uparrow)$, a zatem ciągłym jako odwzorowanie z A do I w topologii $UIT|_I$.

Aby uzupełnić dowód twierdzenia, wystarczy wziąć $X = O\uparrow$. Na mocy powyższych lematów $[A, \leq, \mathrm{T}]$ jest porządkowo-homeomorficzna z domkniętą podprzestrzenią $[P(X), \subseteq, \mathrm{UIT}]$.

Prostym spostrzeżeniem z powyższych rozważań jest następujący wniosek:

Wniosek 1 *Każdej przestrzeni Priestley odpowiada domknięta podprzestrzeń uporządkowanej przestrzeni Tichonowa*

Bibliografia

(1) Davey B. A., Priestley H. A., *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

(2) Engelking R., *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa 1989.

(3) McKenzie R. N., McNulty G. F., Taylorn W. F., *Algebras, Lattices, Varieties. Volume I*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, California, 1987.

(4) Priestley H. A., *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone Spaces*, Bull. London Math. Soc.1970. 1, 186-190, 1970.

(5) Traczyk T., *Wstęp do teorii algebr Boole'a*, PWN, Warszawa 1970.

Uniwersytet Opolski
Instytut Matematyki
ul. Oleska 48
45-052 Opole
e-mail strozik@math.uni.opole.pl