Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie

Matematyka VI, Częstochowa 1999

Dowody metodą tableaux

Lidia Szyper

1. Wstęp

Współczesne zaawansowane systemy informatyczne stosowane w różnych dziedzinach związanych ze sztuczną inteligencją i weryfikacją poprawności systemów oprogramowania muszą być wyposażone w środki służące analizie informacji i wyciąganiu praktycznych wniosków. Wymagają one bezpośredniego użycia rozmaitych technik wnioskowania poddających się automatyzacji. Taką metodą, zdobywającą dzisiaj coraz większą popularność, jest metoda tabel (tableaux) związana z klasyczną logiką zdaniową, stanowiąca podstawę jej uogólnień na logiki nieklasyczne.

2. Klasyczny rachunek zdań

2.1 Alfabet KRZ tworzą wyrażenia:

- $p, q, r, \ldots$
- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- $\underline{0}, \underline{1}$

2.2 Zbiór formuł to najmniejszy zbiór spełniający warunki:

— $\underline{0}, \underline{1}$ i zmienne są formułami (atomowymi).

— Jeśli X jest formuła, to $\neg X$ jest formuła.

— Jeśli X i Y są formułami, a „$\bullet$" jest spójnikiem binarnym, to $X \bullet Y$ jest formuła.

2.3 Zbiorem wartości logicznych KRZ jest zbiór:

$$Tr = \{\text{IF}, \text{IP}\}$$

2.4 Wartościowaniem logicznym nazywamy funkcje V ze zbioru formuł zdaniowych w zbiór Tr spełniajace warunki:

1) $V(\underline{0}) = IF; V(\underline{1}) = IP$

2) $V(\neg X) = \neg V(X)$

3) $V(X \bullet Y) = V(X) \bullet V(Y)$, gdzie „$\bullet$" jest dowolnym spójnikiem binarnym.

2.5 Formułę zdaniową X nazywamy tautologią wtw gdy

$$V(X) = IP,$$

dla każdego wartościowania logicznego V.

2.6 Zbiór **S** formuł zdaniowych nazywamy spełnialnym jeśli istnieje wartościowanie logiczne V takie, że:

$$V(X) = IP,$$

dla każdego $X \in$ **S**.

2.7 Wniosek:

Dla formuły zdaniowej X prawdą jest: X jest tautologia $\Leftrightarrow \{\neg X\}$ nie jest spelnialny.

2.8 Aksjomaty KRZ

2.8.1. $p \to (p \to q)$
2.8.2. $(p \to (q \to z)) \to ((p \to q) \to (p \to z))$
2.8.3. $\neg p \to (p \to q)$
2.8.4. $(\neg p \to p) \to p$

Spójniki logiczne $\wedge$ i $\vee$ są definiowalne przy pomocy $\neg$ i $\to$ w następujący sposób:

$$p \vee q =_{df} \neg p \to q;$$

$$p \wedge q =_{df} \neg(p \to q).$$

2.9 Reguła odrywania

$$(RO) \qquad \frac{p, p \to q}{q}$$

2.10 Dowód klasyczny:

Dowodem formuły X nazywamy skończony ciąg formuł, $\{X_1, \ldots, X_n\}$, którego ostatnim wyrazem jest X i w którym dowolny wyraz X_j ($1 \leq j \leq n$) jest albo:

1) aksjomatem, albo

2) formułą powstała z poprzedzających ją wyrazów ciągu przez zastosowanie reguły odrywania (RO).

3. System tabel

Pojęcie tabeli (tableau) zostało wprowadzone w latach pięćdziesiątych przez E. W. Betha [1], który nazywał je tabelami (tablicami) semantycznymi, pokazał, że ich reguły są odwrotnościami reguł G. Gentzena [3], a dla klasycznego rachunku zdań formalny system oparty na metodzie tablic semantycznych jest równoważny systemowi Gentzena. Elegancki wykład na temat tabel przedstawił R. M. Smullyan [2] w latach 60–tych, nazywając je analitycznymi. System tabel, szeroko opisany w pracy M. C. Fittinga [4], jest metodą zaprzeczeń, w której dowodząc tautologiczności formuly X poszukujemy interpretacji spełniającej $\{\neg X\}$. W dowodach tabela przyjmuje formę drzewa, w którym węzły etykietowane są formułami powstałymi w wyniku zastosowania reguł systemu tabel do formuły stojącej na wyższym poziomie. Drzewo jest reprezentacją alternatywy jego gałęzi, a gałąź jest koniunkcją występujących na niej formuł. W konstrukcji tabeli dążymy do uzyskania sprzeczności na każdej gałęzi.

3.1 <u>Definicja tabeli zdaniowej:</u>

Niech $\{A_1, ..., A_n\}$ będzie skończonym zbiorem formuł zdaniowych:

1. Następujaca pojedyncza gałąź drzewa jest tabelą dla $\{A_1, ..., A_n\}$:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array}$$

2. Jeżeli **T** jest tabelą dla $\{A_1, ..., A_n\}$ i **T*** powstała z **T** poprzez zastosowanie jednej z Reguł Rozkładu Tabel, to **T*** jest tabelą dla $\{A_1, ..., A_n\}$.

3.2 <u>Jednolita notacja:</u>

W systemie tabel korzystamy z jednolitej notacji reguł rozwijania drzew dowodowych wprowadzonej przez R. M. Smullyana [2]. Grupujemy wszystkie formuły zdaniowe postaci

$$(X \bullet Y)\ i\ \neg(X \bullet Y),$$

gdzie „•" jest podstawowym spójnikiem binarnym: $\wedge, \vee, \rightarrow$, w dwie kategorie:

Koniunkcyjne			Dysjunkcyjne		
α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$X \wedge Y$	X	Y	$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg(X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$	$X \vee Y$	X	Y
$\neg(X \to Y)$	X	$\neg Y$	$X \to Y$	$\neg X$	Y

3.3 Reguły Rozkładu systemu tabel:

$$\frac{\neg\neg Z}{Z} \qquad \frac{\neg\underline{0}}{\underline{1}} \qquad \frac{\neg\underline{1}}{\underline{0}} \qquad \frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}} \qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

Przypuśćmy, że mamy tabelę **T** z węzłami etykietowanymi formułami zdaniowymi. Wybieramy gałąź θ i formułę X (nie będącą zmienną) występującą na tej gałęzi. Jeżeli X jest postaci $\neg\neg Z$ to do końca gałęzi dodajemy wierzchołek etykietując go Z. Jeżeli X jest postaci $\neg\underline{0}$ to do końca gałęzi dodajemy wierzchołek etykietując go $\underline{1}$. Jezeli X jest postaci $\neg\underline{1}$ to do końca gałęzi dodajemy wierzchołek etykietując go $\underline{0}$. Jeżeli X jest postaci α to do końca gałęzi dodajemy wierzcholek etykietując go odpowiednio α_1, a następnie do niego kolejny wierzchołek o etykiecie α_2. Jeżeli X jest postaci β to do końca gałęzi dodajemy lewy i prawy wierzchołek etykietując je odpowiednio β_1 i β_2. W wyniku zastosowania jednej z reguł rozkładu tabel do formuły wystepującej na gałęzi θ drzewa **T** otrzymujemy rozwinięcie **T*** będące drzewem.

Reguły Rozkładu Tabel nie są deterministyczne. Mówią co możemy, nie co musimy zrobić. Pozwalają wybrać, która formuła działa z następną i na której gałęzi. Pozwalają nam pomijać formuły lub użyć ich więcej niż raz.

3.4 Pojęcie dowodu w systemie tabel:

- Gałąź θ tabeli **T** nazywamy zamknietą, jeżeli X i $\neg X$ występują na θ, gdzie X jest formułą zdaniową lub jeżeli $\underline{0}$ występuje na θ.
- Tabelę **T** nazywamy zamknietą, jeżeli wszystkie jej gałęzie są zamknięte.
- Dowodem tabelowym formuły zdaniowej X nazywamy zamknietą tabelę dla $\{\neg X\}$.

3.5 Przykład
Tabela dla formuly

$$(P \to (Q \to R)) \to ((P \vee S) \to ((Q \to R) \vee S)).$$

$$1. \neg[(P \to (Q \to R)) \to ((P \vee S) \to ((Q \to R) \vee S))]$$

$$2. P \to (Q \to R)$$

$$3. \neg((P \vee S) \to ((Q \to R) \vee S))$$

$$4. (P \vee S)$$

$$5. \neg((Q \to R) \vee S)$$

$$6. \neg(Q \to R)$$

$$7. \neg S$$

$$8. \neg P \qquad 9. Q \to R$$

$$10. P \qquad 11. S$$

Jest to przykład tabeli zamkniętej dla formuły $(P \to (Q \to R)) \to ((P \vee S) \to ((Q \to R) \vee S))$, gdzie:

1 jest negacja dowodzonej formuły;
2, 3 powstaje przez α – regułę z 1;
4, 5 powstaje przez α – regułę z 3;
6, 7 powstaje przez α – regułę z 5;
8, 9 powstaje przez β – regułę z 2;
10, 11 powstaje przez β – regułę z 4.

Czytając od lewej do prawej gałęzie są zamknięte, gdyż zawierają: 8 i 10; 7 i 11; 6 i 9. Uwaga: zakończenie jednej z gałęzi nie jest formułą atomową (9).

3.6 Pojęcie spełnialności w systemie tabel:

- Gałąź θ tabeli T nazywamy spełnialną, jeśli zbiór formuł zdaniowych występujących na θ jest spełnialny.

- Tabelę T nazywamy spełnialną, jeśli co najmniej jedna jej gałąź jest spełnialna.

Lemat 1 (poprawność)
Jeżeli istnieje tabela zamknięta dla zbioru **S**, to **S** nie jest spełnialny.

Dowód:

Załóżmy dla dowodu nie wprost, że zbiór **S** jest spełnialny. Wykażemy sprzeczność z założeniem istnienia tabeli zamkniętej dla S.

Konstrukcja zamkniętej tabeli **T** dla zbioru **S** rozpoczyna się od początkowej tabeli składającej się z pojedynczej gałęzi θ, której wierzchołki etykietowane są elementami zbioru **S**. Ponieważ zbiór **S** jest spełnialny, to początkowa tabela **T** też jest spełnialna. Musimy pokazać, że **T*** jest spełnialną tabelą. Rozważmy przypadki zależnie od tego, która z Reguł Rozkładu Tabel była zastosowana do formuły X występującej na gałęzi θ.

a. $X = \alpha$

Wtedy gałąź θ rozszerzona o α_1 i α_2 tworzy θ. Ponieważ α występuje na θ, to $V(\alpha) = IP$, ale $V(\alpha) = V(\alpha_1) \wedge V(\alpha_2)$ stąd V(α_1) = IP i V(α_2) = IP. Konsekwentnie wartością logiczną każdej formuły występującej na rozszerzonej gałęzi θ w **T*** jest IP i stąd **T*** jest spełnialne.

b. $X = \beta$

Wtedy do liścia gałęzi θ dołączamy lewy i prawy następnik, etykietując je odpowiednio β_1 i β_2, tworzymy **T***. Ponieważ β występuje na θ, to V(β) = IP, ale $V(\beta) = V(\beta_1) \vee V(\beta_2)$ stąd V(β_1) = IP lub V(β_2) = IP. Zatem jedno z rozszerzeń gałęzi θ jest spełnialne i stąd **T*** jest tabelą spełnialną, ale nie jest tabelą zamknietą.

Wykazaliśmy istnienie spełnialnej tabeli **T*** co jest sprzeczne z założeniem istnienia zamkniętej tabeli dla zbioru **S**. c.k.d.

W dowodzie pełności korzystać będziemy z pojęć: zbioru Hintikki i Zdaniowej Własności Niesprzeczności, których definicje zostaną przytoczone poniżej.

3.7 Definicja (zbioru Hintikki)

Zbiór **H** formuł zdaniowych nazywamy zbiorem Hintikki , wtw gdy spełnia następujące warunki:

1) Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p, albo $p \in$ **H** albo $\neg p \in$ **H**;

2) $\underline{0} \notin$ **H**, $\neg \underline{1} \notin$ **H**;

3) $\neg\neg Z \in$ **H** $\Rightarrow Z \in$ **H**;

4) $\alpha \in$ **H** $\Rightarrow \alpha_1 \in$ **H** $\wedge\ \alpha_2 \in$ **H**;

5) $\beta \in$ **H** $\Rightarrow \beta_1 \in$ **H** $\vee\ \beta_2 \in$ **H**.

3.8 Definicja (Zdaniowej Własności Niesprzeczności)

Niech $\Re$ będzie rodziną zbiorów formuł zdaniowych. Nazwiemy $\Re$ własnością zdaniowej niesprzeczności, wtw gdy dla każdego $\mathbf{S} \in \Re$ spełnione są następujące warunki:

1) Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p, albo $p \in \mathbf{S}$ albo $\neg p \in \mathbf{S}$;

2) $\underline{0} \notin \mathbf{S}$, $\neg\underline{1} \notin \mathbf{S}$;

3) $\neg\neg Z \in \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{S} \cup Z \in \Re$;

4) $\alpha \in \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{S} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \Re$;

5) $\beta \in \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{S} \cup \{\beta_1\} \in \Re$ lub $\mathbf{S} \cup \{\beta_2\} \in \Re$

Lemat 2

Rodzina wszystkich zbiorów formuł zdaniowych nie mających tabel zamkniętych jest Zdaniową Własnościa Niesprzeczności.

Dowód:

Niech $\Im$ będzie rodziną wszystkich zbiorów formuł zdaniowych nie mających tabel zamkniętych. Dla każdego zbioru $\mathbf{S} \in \Im$ spełnione są następujace warunki:

1) Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p, albo

2) $p \in \mathbf{S}$ albo $\neg p \in \mathbf{S}$;

3) $\underline{0} \notin \mathbf{S}$, $\neg\underline{1} \notin \mathbf{S}$;

4) $\neg\neg Z \in \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{S} \cup Z \in \Im$;

5) $\alpha \in \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{S} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \Im$;

6) $\beta \in \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{S} \cup \{\beta_1\} \in \Im$ lub $\mathbf{S} \cup \{\beta_2\} \in \Im$

Stąd rodzina $\Im$ na mocy definicji Zdaniowej Własności Niesprzeczności jest Zdaniową Własnością Niesprzeczności.

Lemat 3

Każdy element **S** Zdaniowej Własności Niesprzeczności jest zbiorem Hintikki.

Dowód:

Każdy element s Zdaniowej Własności Niesprzeczności spełnia następujące warunki:

1) Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p, albo

2) $p \in$ S$albo\neg$ $slp \in$ S;

3) $\underline{0} \notin$ S, $\neg\underline{1} \notin$ S;

4) $\neg\neg Z \in \mathbf{S} \Rightarrow Z \in \mathbf{S}$;

5) $\alpha \in \mathbf{S} \Rightarrow \alpha_1 \in \mathbf{S} \wedge \alpha_2 \in \mathbf{S}$;

6) $\beta \in \mathbf{S} \Rightarrow \beta_1 \in \mathbf{S} \vee \beta_2 \in \mathbf{S}$.

Stąd na mocy definicji zbioru Hintikki, zbiór **S** jest zbiorem Hintikki.

Lemat 4
Każdy zdaniowy zbiór Hintikki jest spełnialny.
Dowód:
Dla zmiennej zdaniowej p i zbioru Hintikki **H** definiujemy wartościowanie:

$$\mathrm{V}(p) = \begin{cases} \mathrm{IP}, & p \in \mathbf{H} \\ \mathrm{IF}, & \neg p \in \mathbf{H} \\ \mathrm{IF}, & p \notin \mathbf{H} \text{ i } \neg p \notin \mathbf{H} \end{cases}$$

Twierdzenie (o pelności)
X jest tautologią $\Leftrightarrow$ X ma dowód tabelowy.
Dowód:

„$\Leftarrow$" Z założenia X ma dowód tabelowy, zatem zbiór $\{\neg X\}$ ma tabelę zamkniętą. Na mocy Lematu 1 zbiór $\{\neg X\}$ nie jest spełnialny, a to pociąga za sobą, że formuła zdaniowa X jest tautologią.

„$\Rightarrow$" Załóżmy nie wprost, że formuła zdaniowa X jest tautologią i nie ma dowodu tabelowego, stąd zbiór $\{\neg X\}$ nie ma tabeli zamkniętej i należy do rodziny wszystkich zbiorów nie mających tabel zamkniętych. Na mocy lematu 2 rodzina ta jest Zdaniowa Własnościa Niesprzecznosci. Na mocy lematów 3 i 4 jest zbiorem spełnialnym. Stąd X nie jest tautologią, a to jest sprzeczne z założeniem.

4. Podsumowanie.

Weryfikacja spełnialności i tautologiczności formuł przedstawioną metodą tabel dla klasycznego rachunku zdań, jak i jej uogólnienia na logiki nieklasyczne, stwarza algorytm łatwo poddający się automatyzacji, wykorzystywany w wielu dziedzinach związanych ze sztuczną inteligencją, m.in. do specyfikacji i weryfikacji programów komputerowych, czy weryfikacji ukladów elektronicznych. Istnieje maszynowa implementacja metody tabel w języku PROLOG (skrót pochodzi od słów programming in logic). Aby docenić zalety omówionej metody, a przede wszystkim jej uniwersalność, warto dokonać jej implementacji w innym z języków programowania nie związanym tak ściśle z dziedziną logiki, może to być np. język C++ pozwalający m.in. na projektowanie i definiowanie nowych typów danych, odpowiednich do właściwości dziedziny, w której jest określony rozwiązywany problem.

Literatura

[1] BETH, E. W. *The Foundations of Mathematics.* North - Holland, Amsterdam, 1959.

[2] SMULLYAN, R. M. *First - Order Logic. Springer-Verlag*, Berlin, 1968. Revised Edition, Dover Press, New York, 1994.

[3] GENTZEN, G. Investigation into logical deduction. *In The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, M. E. Szabo, Ed. Notrh-Holland, 1969, pp. 68-131. Originally published as 'Untersuchungen ber das logische Schliessen', in Mathematische Zeitschrift 39 (1935),176-210 and 405-431.

[4] FITTING, M. C. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* Springer-Verlag, New York, 1990. Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1996.

Lidia Szyper
Pedagogical University
Institute of Mathematics
Al.Armii Krajowej 13/15
Częstochowa 42-201