Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka VII, Częstochowa 1999

Dwie formalizacje rachunku dualnego względem systemu W.

Grzegorz Bryll, Anetta Górnicka

Trójwartościowy rachunek zdań W, należący do klasy „nonsense–logics", zbudowany został przez K. Piróg–Rzepecką [8,9,10,11] i zaksjomatyzowany przez M. Maducha [6]. Rachunek ten o terminach pierwotnych: implikacji C, negacji N i koniunkcji K, ma następującą matrycę silnie adekwatną [3,7]:

$$\mathfrak{M}_W = \left(\{0, \tfrac{1}{2}, 1\}, \{1\}, \{c, n, k\}\right). \tag{1}$$

Funkcje tej matrycy określone są następująco:

$$c(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = 1 \text{ i } (y = 0 \text{ lub } y = \frac{1}{2}), \\ 1, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

$$n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{gdy } x = \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

$$k(x,y) = \begin{cases} min(x,y), & \text{gdy } x \neq \frac{1}{2} \text{ i } y \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Funktor alternatywy A można zdefiniować następująco:

$$A\alpha\beta = NKN\alpha N\beta \tag{2}$$

W matrycy $\mathfrak{M}_W$ funktorowi A odpowiada funkcja a określona następująco:

$$a(x,y) = \begin{cases} \max(x,y), & \text{gdy } x \neq \frac{1}{2} \text{ i } y \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Rachunek dualny można scharakteryzować w sposób matrycowy, przyjmując następującą matrycę, dualną względem matrycy $\mathfrak{M}_W$:[1]

$$\mathfrak{M}^d_W = \left(\{0, \tfrac{1}{2}, 1\}, \{0, \tfrac{1}{2}\}, \{c, n, k\}\right). \tag{3}$$

[1] W pracy [4] podana została formalizacja rachunku dualnego względem klasycznego implikacyjno–negacyjnego rachunku zdań.

Matryce (1) i (3) różnią się jedynie zbiorem wartości wyróżnionych. Celem naszym w pierwszej części pracy jest zbudowanie takiego systemu aksjomatycznego, dla którego matryca (3) jest matrycą silnie adekwatną. System ten oznaczać będziemy symbolem W^d i nazywać systemem dualnym względem systemu W.
W drugiej części pracy podamy formalizację nieaksjomatyczną systemu W^d, opartą wyłącznie na regułach.

I. Ujęcie aksjomatyczne systemu W^d.

Terminami pierwotnymi systemu W^d są te same terminy pierwotne, które występują w systemie W. Dla wygody wprowadzimy nowy termin C^*, który nazywać będziemy implikacją dualną. Jest on zdefiniowany następująco:

(4) $$C^*\alpha\beta = NC\alpha\beta.$$

Funktorowi C^* odpowiada w matrycy (3) funkcja c^* o własności:

(5) $$c^*(x,y) = n(c(x,y)) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x = 1 \text{ i } (y = 0 \text{ lub } y = \frac{1}{2}), \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Rachunek W^d można oprzeć na następującym układzie schematów aksjomatów:

$a1$. $C^*C^*\alpha\beta\alpha$

$a2$. $C^*C^*C^*\alpha\beta C^*\alpha\gamma C^*\gamma\beta$

$a3$. $C^*\alpha C^*\alpha C^*\beta\alpha$

$a4$. $C^*C^*\beta C^*\beta\alpha C^*\beta N\alpha$

$a5$. $C^*C^*\beta NN\alpha C^*\beta\alpha$

$a6$. $C^*C^*\beta\alpha C^*\beta NN\alpha$

$a7$. $C^*C^*\gamma\alpha C^*\gamma K\alpha\beta$

$a8$. $C^*C^*\gamma\beta C^*\gamma K\alpha\beta$

$a9$. $C^*C^*C^*\gamma K\alpha\beta C^*\gamma\alpha C^*\gamma\beta$

$a10$. $C^*C^*C^*\gamma NK\alpha\beta C^*\gamma N\alpha C^*\gamma N\beta$

$a11$. $C^*C^*C^*\gamma NK\alpha\beta C^*\gamma N\alpha C^*\gamma\beta$

$a12$. $C^*C^*C^*\gamma NK\alpha\beta C^*\gamma\alpha C^*\gamma N\beta$

$a13$. $C^*K\alpha\beta\alpha$

$a14$. $C^*C^*NK\alpha\beta\alpha N\alpha$

$a15$. $C^*K\alpha\beta\beta$

$a16$. $C^*C^*NK\alpha\beta\beta N\beta$

$a17$. $C^*C^*\gamma NC^*\alpha\beta\alpha$

$a18$. $C^*C^*\gamma NC^*\alpha\beta C^*\alpha\beta$

Przyjmijmy oznaczenie: $Ax = \{a1, \ldots, a18\}$.
Jedyną regułą inferencji jest reguła r_o^d o schemacie:

$$r_o^d : \quad \frac{\begin{matrix} NC\alpha\beta \\ \beta \end{matrix}}{\alpha}, \qquad \text{czyli} \quad r_o^d . \quad \frac{\begin{matrix} C^*\alpha\beta \\ \beta \end{matrix}}{\alpha}.$$

Regułę tę nazywać będziemy regułą dualną względem reguły odrywania r_o o schemacie:

$$r_o : \quad \frac{\begin{matrix} C\alpha\beta \\ \alpha \end{matrix}}{\beta}.$$

Funkcję konsekwencji opartą na regule r_o^d definiujemy następująco:

Definicja 1. $Cn(X)$ jest najmniejszym spośród zbiorów Y, spełniających warunek $Ax \cup X \subseteq Y$ i domkniętych ze względu na regułę r_o^d.

Konsekwencja matrycowa wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_W^d$ określona jest następująco:

Definicja 2.

$$C_{\mathfrak{M}_W^d}(X) = \{\alpha \in S : \forall_{h \in Hom}[h(X) \subseteq \{0, \frac{1}{2}\} \Rightarrow h(\alpha) \in \{0, \frac{1}{2}\}]\},$$

gdzie Hom jest zbiorem wszystkich homomorfizmów języka S w algebrę $(\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \{c, n, k\})$.

Zawartość matrycy $\mathfrak{M}_W^d$ (zbiór tautologii) wynosi:

(6) $E\left(\mathfrak{M}_W^d\right) = C_{\mathfrak{M}_W^d}(\emptyset) = \{\alpha \in S : \forall_{h \in Hom}[h(\alpha) \in \{0, \frac{1}{2}\}]\}$.

Oznaczmy symbolem T zbiór tez rachunku W^d.
Widoczne jest, że:

(7) $$T = Cn(\emptyset).$$

Można wykazać w oparciu o $a1$ i $a2$, że dla konsekwencji Cn zachodzi następujące twierdzenie o dedukcji:

Twierdzenie 1. $\beta \in Cn(X \cup \{\alpha\}) \Rightarrow C^*\beta\alpha \in Cn(X)$,
dla dowolnego $X \subseteq S$ i dowolnych $\alpha, \beta \in S$.
Również udowodnić można następującą meta–regułę odrywania:

Twierdzenie 2. $C^*\alpha\beta, \beta \in Cn(X) \Rightarrow \alpha \in Cn(X)$,
gdzie $\alpha, \beta \in S$ i $X \subseteq S$.
Z twierdzenia tego wynika bezpośrednio:

Twierdzenie 3. $C^*\beta\alpha \in Cn(X) \Rightarrow \beta \in Cn(X \cup \{\alpha\})$.

Twierdzenia 1 i 3 można zapisać w postaci równoważności:

Twierdzenie 4. $\beta \in Cn(X \cup \{\alpha\}) \Leftrightarrow C^*\beta\alpha \in Cn(X)$.

Wykażemy, że dla systemu W^d zachodzi następujące twierdzenie o pełności (tj. twierdzenie o adekwatności matrycy $\mathfrak{M}_W^d$ względem systemu W^d):

Twierdzenie 5. $Cn(\emptyset) = E(\mathfrak{M}_W^d)$.

Dowód. Inkluzja

(8) $$Cn(\emptyset) \subseteq E(\mathfrak{M}_W^d)$$

jest oczywista.

Dla dowodu inkluzji

(9) $$E(\mathfrak{M}_W^d) \subseteq Cn(\emptyset)$$

zastosujemy metodę Łosia–Assera [1,5], opartą na relatywnym twierdzeniu Lindenbauma o maksymalizacji (zob. także [12]).
Załóżmy, że $\gamma \notin Cn(\emptyset)$. Będziemy dążyć do wykazania, że $\gamma \notin E(\mathfrak{M}_W^d)$.

Na mocy twierdzenia Lindenbauma o maksymalizacji istnieje zbiór $Y \subseteq S$ o własnościach:

1. $\gamma \notin Y$,

2. $Cn(Y) = Y$,

3. $\forall_{\alpha \notin Y}\ \gamma \in Cn(Y \cup \{\alpha\})$.

Zbiór Y ma ponadto następującą własność:

4. $\forall_{\alpha}(\alpha \in Y \vee N\alpha \in Y)$.

Dla dowodu tej własności załóżmy nie wprost, że dla pewnego α_1 : $\alpha_1 \notin Y$ i $N\alpha_1 \notin Y$. Na podstawie punktu 3. dowodu mamy więc: $\gamma \in Cn(Y \cup \{\alpha_1\})$ i $\gamma \in Cn(Y \cup \{N\alpha_1\})$, skąd stosując twierdzenie 1 otrzymujemy: $C^*\gamma\alpha_1, C^*\gamma N\alpha_1 \in Cn(Y)$.
Mamy jednak $C^*C^*\gamma C^*\gamma\alpha_1 C^*\gamma N\alpha_1 \in Cn(\emptyset)$ ($a4$ $\beta/\gamma, \alpha/\alpha_1$), zatem na podstawie twierdzenia 2: $\gamma \in Cn(Y)$. Wniosek ten pozostaje w sprzeczności z punktami 1. i 2.

Określmy trzy zbiory $Y_o, Y_{\frac{1}{2}}, Y_1$ następująco:

5. $Y_1 = S - Y, \quad Y_o = \{\alpha \in S : N\alpha \in Y_1\}, \quad Y_{\frac{1}{2}} = Y - Y_o$.

Zbiory te mają następującą własność:

6. $Y_o \cup Y_{\frac{1}{2}} = Y, \quad Y \cup Y_1 = S$.

Pierwszą z tych równości można łatwo uzasadnić w oparciu o punkt 4. dowodu. Druga równość jest oczywista.

7. Zbiory $Y_o, Y_{\frac{1}{2}}, Y_1$ są parami rozłączne.

Wykażemy, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in S$ zachodzą związki:

8a. $N\alpha \in Y_1 \Leftrightarrow \alpha \in Y_o$,

b. $N\alpha \in Y_o \Leftrightarrow \alpha \in Y_1$,

c. $N\alpha \in Y_{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \alpha \in Y_{\frac{1}{2}}$,

9. $\alpha \in Y_{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \alpha \in Y \wedge N\alpha \in Y$,

10a. $K\alpha\beta \in Y_1 \Leftrightarrow \alpha \in Y_1 \wedge \beta \in Y_1$,

b. $K\alpha\beta \in Y_{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \alpha \in Y_{\frac{1}{2}} \vee \beta \in Y_{\frac{1}{2}}$,

c. $K\alpha\beta \in Y_o \Leftrightarrow (\alpha \in Y_o \wedge \beta \notin Y_{\frac{1}{2}}) \vee (\alpha \notin Y_{\frac{1}{2}} \wedge \beta \in Y_o)$,

11. $C^*\alpha\gamma \in Y$,

12a. $C^*\alpha\beta \in Y_1 \Leftrightarrow \alpha \in Y_1 \wedge \beta \notin Y_1$,

b. $C^*\alpha\beta \in Y_o \Leftrightarrow \alpha \notin Y_1 \vee \beta \in Y_1$.

Widoczne jest, że $C^*\alpha\beta \notin Y_{\frac{1}{2}}$, dla dowolnych $\alpha, \beta \in S$.

Powyższe własności uzasadniamy następująco:

8a. Własność ta wynika bezpośrednio z określenia zbioru Y_o (punkt 5.).

8b. $N\alpha \in Y_o \Leftrightarrow NN\alpha \in Y_1 \Leftrightarrow NN\alpha \notin Y \Leftrightarrow \gamma \in Cn(Y \cup \{NN\alpha\}) \Leftrightarrow C^*\gamma NN\alpha \in Cn(Y) \Leftrightarrow C^*\gamma\alpha \in Cn(Y) \Leftrightarrow \alpha \notin Y \Leftrightarrow \alpha \in Y_1$ $\{1, 2, 3, \text{tw.}4, \text{tw.}2, a5, a6\}$.

8c. Własność ta wynika z własności 8a,b i określenia zbioru $Y_{\frac{1}{2}}$.

9. $\alpha \in Y_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha \in Y \wedge N\alpha \in Y_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha, N\alpha \in Y\{8c, 6\}$. Niech $\alpha, N\alpha \in Y$ i załóżmy nie wprost, że $\alpha \notin Y_{\frac{1}{2}}$. Wtedy $\alpha \in Y_o$ lub $\alpha \in Y_1$. W pierwszym przypadku na mocy 8a.: $N\alpha \in Y_1$ czyli $N\alpha \notin Y$, skąd $\alpha \notin Y$ lub $N\alpha \notin Y$. W drugim przypadku na mocy 5.: $\alpha \notin Y$, skąd $\alpha \notin Y$ lub $N\alpha \notin Y$. W obu przypadkach otrzymujemy więc sprzeczność.

10a. „$\Rightarrow$" Niech $K\alpha\beta \in Y_1$. Na podstawie tego założenia i wzorów 5., 3. oraz tw. 1 otrzymujemy kolejno: $K\alpha\beta \notin Y, \gamma \in Cn(Y \cup \{K\alpha\beta\})$, $C^*\gamma K\alpha\beta \in Cn(Y)$. Korzystając z aksjomatów a7 i a8 otrzymujemy $C^*\gamma\alpha, C^*\gamma\beta \in Cn(Y)$, czyli $\gamma \in Cn(Y \cup \{\alpha\})$ i $\gamma \in Cn(Y \cup \{\beta\})$. Gdyby $\alpha \in Y$ lub $\beta \in Y$, to $\gamma \in Cn(Y) = Y$. Jednakże na podstawie 1. $\gamma \notin Y$, zatem $\alpha \notin Y$ i $\beta \notin Y$, czyli $\alpha \in Y_1$ i $\beta \in Y_1$.

„$\Leftarrow$". Jeśli $\alpha, \beta \in Y_1$, to $\alpha \notin Y$ i $\beta \notin Y$, zatem na podstawie 3.: $\gamma \in Cn(Y \cup \{\alpha\})$, $\gamma \in Cn(Y \cup \{\beta\})$, skąd $C^*\gamma\alpha, C^*\gamma\beta \in Cn(Y)$. Korzystając z aksjomatu a9 mamy więc $C^*\gamma K\alpha\beta \in Cn(Y)$, czyli $\gamma \in Cn(Y \cup \{K\alpha\beta\})$. Gdyby $K\alpha\beta \in Y$, to $\gamma \in Cn(Y) = Y$, co wobec 1. jest niemożliwe. Zatem $K\alpha\beta \notin Y$, czyli $K\alpha\beta \in Y_1$.

10b. „$\Rightarrow$". Niech $K\alpha\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$ i załóżmy nie wprost, że $\alpha \notin Y_{\frac{1}{2}}$ i $\beta \notin Y_{\frac{1}{2}}$. Stąd $K\alpha\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$ i ($\alpha \in Y_o$ lub $\alpha \in Y_1$) i ($\beta \in Y_o$ lub $\beta \in Y_1$).

Należy rozważyć 4 przypadki:

I.	$\alpha, \beta \in Y_o$;	III.	$\alpha \in Y_1, \beta \in Y_o$,
II.	$\alpha \in Y_o, \beta \in Y_1$;	IV.	$\alpha, \beta \in Y_1$.

W przypadku I.: $N\alpha, N\beta \in Y_1$ czyli $N\alpha, N\beta \notin Y$. Stąd wobec punktu 3. i tw. 1: $C^*\gamma N\alpha, C^*\gamma N\beta \in Cn(Y)$. Korzystając z aksjmatu a10 otrzymujemy $C^*\gamma NK\alpha\beta \in Cn(Y) = Y$, czyli wobec 1. $NK\alpha\beta \notin Y$. Stąd $NK\alpha\beta \in Y_1$, czyli $K\alpha\beta \in Y_o$, co pozostaje w sprzeczności z założeniem $K\alpha\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$ (bowiem zbiory $Y_{\frac{1}{2}}$ i Y_o są rozłączne).

W przypadku II.: $N\alpha \in Y_1$ i $\beta \notin Y$, skąd $N\alpha \notin Y$ i $\beta \notin Y$. wobec punktu 3. $\gamma \in Cn(Y \cup \{N\alpha\})$ i $\gamma \in Cn(Y \cup \{\beta\})$, czyli $C^*\gamma N\alpha$, $C^*\gamma\beta \in Cn(Y)$. Stosując aksjomat $a11$ otrzymujemy $C^*\gamma NK\alpha\beta \in Cn(Y) = Y$ czyli $NK\alpha\beta \notin Y$. Stąd $NK\alpha\beta \in Y_1$ czyli $K\alpha\beta \in Y_o$, co również pozostaje w sprzeczności z założeniem $K\alpha\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$.

W przypadku III rozumujemy podobnie jak w przypadku II opierając się na aksjomacie $a12$.

W przypadku IV na podstawie $10a$. otrzymujemy $K\alpha\beta \in Y_1$, co pozostaje w sprzeczności z założeniem $K\alpha\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$, gdyż zbiory $Y_{\frac{1}{2}}$ i Y_1 są rozłączne.

„$\Leftarrow$". Niech $\alpha \in Y_{\frac{1}{2}}$ lub $\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$.

Jeśli $\alpha \in Y_{\frac{1}{2}}$, to na podstawie 9. wnioskujemy, że $\alpha, N\alpha \in Y = Cn(Y)$. Stosując aksjokmaty $a13$ i $a14$ otrzymujemy $K\alpha\beta, NK\alpha\beta \in Y$, czyli wobec punktu 9. $K\alpha\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$. Jeśli $\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$, to w podobny sposób na podstawie aksjomatów $a15$ i $a16$ otrzymujemy $K\alpha\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$.

10c. Własność ta wynika bezpośrednio z własności $10a, b$.

11. Załóżmy nie wprost, że $C^*\alpha\gamma \notin Y$. Stąd wobec 3. otrzymujemy $\gamma \in Cn(Y \cup \{C^*\alpha\gamma\})$ czyli $C^*\gamma C^*\alpha\gamma \in Cn(Y)$. Stosując aksjomat $a3$ mamy $\gamma \in Cn(Y) = Y$, co pozostaje w sprzeczności z punktem 1.

12a. „$\Rightarrow$". Niech $C^*\alpha\beta \in Y_1$ i załóżmy nie wprost, że $\alpha \notin Y_1$ lub $\beta \in Y_1$. Jeżeli $\alpha \notin Y_1$, to $\alpha \in Y = Cn(Y)$. Stosując aksjomat $a1$ otrzymujemy $C^*\alpha\beta \in Cn(Y) = Y$ czyli $C^*\alpha\beta \notin Y_1$, co pozostaje w sprzeczności z założeniem $C^*\alpha\beta \in Y_1$.

Jeżeli $\beta \in Y_1$, to $\beta \notin Y$, czyli wobec 3. $\gamma \in Cn(Y \cup \{\beta\})$. Stąd $C^*\gamma\beta \in Cn(Y)$. Wobec 11. mamy także $C^*\alpha\gamma \in Cn(Y)$. Stosując aksjomat $a2$ otrzymujemy $C^*\alpha\beta \in Cn(Y) = Y$, czyli $C^*\alpha\beta \notin Y_1$, co jest sprzeczne z założeniem $C^*\alpha\beta \in Y_1$.

„$\Leftarrow$". Niech $\alpha \in Y_1$ i $\beta \notin Y_1$ i załóżmy nie wprost, że $C^*\alpha\beta \notin Y_1$. Wtedy $C^*\alpha\beta \in Y$. Z założenia $\beta \notin Y_1$ otrzymujemy $\beta \in Y$, zatem $\alpha \in Y$, co pozostaje w sprzeczności z wyrażeniem $\alpha \notin Y$, otrzymanym na podstawie założenia $\alpha \in Y_1$.

12b. „$\Rightarrow$". Niech $C^*\alpha\beta \in Y_o$ i załóżmy nie wprost, że $\alpha \in Y_1$ i $\beta \notin Y_1$. Wtedy $\alpha \notin Y, \beta \in Y$ i $C^*\alpha\beta \in Y$. Na podstawie warunku $\alpha \notin Y$ i punktu 3. otrzymujemy $\gamma \in Cn(Y \cup \{\alpha\})$ czyli $C^*\gamma\alpha \in Y$. Korzystając z aksjomatu $a2.(\gamma/\alpha, \alpha/\gamma)$ otrzymujemy więc $C^*\gamma\beta \in Y$, skąd wobec warunku $\beta \in Y$ mamy $\gamma \in Y$, co jest sprzeczne z punktem 1.

„$\Leftarrow$". Niech $\alpha_1 \notin Y_1$ lub $\beta \in Y_1$ i załóżmy nie wprost, że $C^*\alpha\beta \notin Y_o$. Wtedy ($\alpha \in Y$ lub $\beta \notin Y$) i ($C^*\alpha\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$ lub $C^*\alpha\beta \in Y_1$).

Należy rozważyć następujące przypadki:

I. $\alpha \in Y$ i $C^*\alpha\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$,
II. $\alpha \in Y$ i $C^*\alpha\beta \in Y_1$,
III. $\beta \notin Y$ i $C^*\alpha\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$,
IV. $\beta \notin Y$ i $C^*\alpha\beta \in Y_1$.

W przypadku I wobec punktu 9. mamy $C^*\alpha\beta, NC^*\alpha\beta \in Y$. Na podstawie aksjomatu $a17$ i warunku $\alpha \in Y$ otrzymujemy $C^*\gamma NC^*\alpha\beta \in Y$, skąd $NC^*\alpha\beta \notin Y$ (gdyż $\gamma \notin Y$), co jest sprzeczne z wyrażeniem $NC^*\alpha\beta \in Y$.
W przypadku II mamy: $\alpha \in Y$ i $C^*\alpha\beta \notin Y$. Z warunku $\alpha \in Y$ i aksjomatu $a1$ mamy jednak $C^*\alpha\beta \in Y$, co prowadzi do sprzeczności.
W przypadku III na podstawie punktu 9. otrzymujemy $C^*\alpha\beta, NC^*\alpha\beta \in Y$. Stosując aksjomat $a18$ mamy $C^*\gamma NC^*\alpha\beta \in Y$, czyli $NC^*\alpha\beta \notin Y$, co jest sprzeczne z wyrażeniem $NC^*\alpha\beta \in Y$.
W przypadku IV z punktu 11. wynika, że $C^*\alpha\gamma \in Y$, zaś na podstawie wyrażenia $\beta \notin Y$ i punktu 3. mamy $\gamma \in Cn(Y \cup \{\beta\})$ czyli $C^*\gamma\beta \in Y$. Stosując aksjomat $a2$ otrzymujemy $C^*\alpha\beta \in Y$, czyli $C^*\alpha\beta \notin Y_1$, co prowadzi do sprzeczności.

13. Wartościowanie v zmiennych zdaniowych określamy w następujący sposób:

$$(*) \qquad v(p_i) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } p_i \in Y_1, \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } p_i \in Y_{\frac{1}{2}}, \\ 0, & \text{gdy } p_i \in Y_o. \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

14. Wartościowanie v' dowolnych wyrażeń należących do S określamy następująco:

$$(**) \qquad \begin{aligned} v'(p_i) &= v(p_i), \qquad i = 1, 2, \ldots \\ v'(C^*\alpha\beta) &= c^*(v'(\alpha), v'(\beta)), \\ v'(N\alpha) &= n(v'(\alpha)), \\ v'(K\alpha\beta) &= k(v'(\alpha), v'(\beta)). \end{aligned}$$

15. Wykażemy, że dla dowolnego $\delta \in S$ zachodzi wzór:

$$(***) \qquad v'(\delta) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \delta \in Y_1, \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } \delta \in Y_{\frac{1}{2}}, \\ 0, & \text{gdy } \delta \in Y_o. \end{cases}$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na złożoność formuł.

a. $\delta = p_i$.

$$v'(\delta) = v'(p_i) = v(p_i) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad p_i \in Y_1, \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy} \quad p_i \in Y_{\frac{1}{2}}, \\ 0, & \text{gdy} \quad p_i \in Y_o. \end{cases}$$

b. $\delta = N\alpha$.

Przyjmujemy założenie indukcyjne, że dla wyrażenia α wzór $(***)$ zachodzi. Mamy wtedy:

$$v'(\delta) = v'(N\alpha) = n(v'(\alpha)).$$

— Jeżeli $\delta \in Y_1$, to $N\alpha \in Y_1$, czyli $\alpha \in Y_o$ (punkt 8a.), zatem $n(v'(\alpha)) = n(0) = 1$;

— jeżeli $\delta \in Y_{\frac{1}{2}}$, to $N\alpha \in Y_{\frac{1}{2}}$, czyli $\alpha \in Y_{\frac{1}{2}}$ (punkt 8c.), zatem $n(v'(\alpha)) = n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$;

— jeżeli $\delta \in Y_o$, to $N\alpha \in Y_o$, czyli $\alpha \in Y_1$ (punkt 8b.), zatem $n(v'(\alpha)) = n(1) = 0$;

c. $\delta = C^*\alpha\beta$.

Zakładamy indukcyjnie, że dla wyrażeń α, β wzór $(***)$ zachodzi. Mamy wtedy:

$$v'(\delta) = v'(C^*\alpha\beta) = c^*(v'(\alpha), v'(\beta)).$$

— Jeżeli $\delta \in Y_1$, to $C^*\alpha\beta \in Y_1$, czyli $\alpha \in Y_1$ i $\beta \notin Y_1$ (punkt 12a.) zatem $\alpha \in Y_1$ i ($\beta \in Y_o$ lub $\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$).

W przypadku $\alpha \in Y_1$ i $\beta \in Y_o$ mamy:

$$c^*(v'(\alpha), v'(\beta)) = c^*(1, 0) = 1.$$

W przypadku $\alpha \in Y_1$ i $\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$ mamy:

$$c^*(v'(\alpha), v'(\beta)) = c^*(1, \tfrac{1}{2}) = 1.$$

— Jeżeli $\delta \in Y_o$, to $C^*\alpha\beta \in Y_o$, czyli $\alpha \notin Y_1$ lub $\beta \in Y_1$ (punkt 12b) zatem ($\alpha \in Y_o$ lub $\alpha \in Y_{\frac{1}{2}}$) i $\beta \in Y_1$.

W przypadku $\alpha \in Y_o$ i $\beta \in Y_1$ mamy:

$$c^*(v'(\alpha), v'(\beta)) = c^*(0, 1) = 0.$$

W przypadku $\alpha \in Y_{\frac{1}{2}}$ i $\beta \in Y_1$ mamy:

$$c^*(v'(\alpha), v'(\beta)) = c^*(\tfrac{1}{2}, 1) = 0.$$

Stwierdziliśmy wcześniej, że $C^*\alpha\beta \notin Y_{\frac{1}{2}}$.

d. $\delta = K\alpha\beta$.

Przyjmujemy założenie indukcyjne, że dla α, β wzór $(***)$ zachodzi. Mamy wtedy:

$$v'(\delta) = v'(K\alpha\beta) = k(v'(\alpha), v'(\beta)).$$

— Jeżeli $\delta \in Y_1$, to $K\alpha\beta \in Y_1$, czyli $\alpha \in Y_1$ i $\beta \in Y_1$ (punkt 10a.)

Mamy więc:

$$k(v'(\alpha), v'(\beta)) = k(1, 1) = 1.$$

— Jeżeli $\delta \in Y_o$, to $K\alpha\beta \in Y_o$, czyli $(\alpha \in Y_o$ i $\beta \notin Y_{\frac{1}{2}})$ lub $(\alpha \notin Y_{\frac{1}{2}}$ i $\beta \in Y_1)$ lub $(\alpha \in Y_1$ i $\beta \in Y_o)$.

W przypadku $\alpha \in Y_o$ i $\beta \in Y_o$ otrzymujemy:

$$k(v'(\alpha), v'(\beta)) = k(0, 0) = 0.$$

W przypadku $\alpha \in Y_o$ i $\beta \in Y_1$ otrzymujemy:

$$k(v'(\alpha), v'(\beta)) = k(0, 1) = 0.$$

W przypadku $\alpha \in Y_1$ i $\beta \in Y_o$ otrzymujemy:

$$k(v'(\alpha), v'(\beta)) = k(1, 0) = 0.$$

— Jeżeli $\delta \in Y_{\frac{1}{2}}$, to $K\alpha\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$, czyli $\alpha \in Y_{\frac{1}{2}}$ lub $\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$.

W przypadku $\alpha \in Y_{\frac{1}{2}}$ mamy:

$$k(v'(\alpha), v'(\beta)) = k(\tfrac{1}{2}, v'(\beta)) = \tfrac{1}{2}.$$

W przypadku $\beta \in Y_{\frac{1}{2}}$ mamy:

$$k(v'(\alpha), v'(\beta)) = k(v'(\alpha), \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}.$$

Wykazaliśmy więc na drodze indukcji zupełnej, że wzór $(***)$ zachodzi dla dowolnego wyrażenia $\delta \in S$.

15. Odwzorowanie $v' : S \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ określone wzorem $(**)$ jest więc homomorfizmem języka $(S, \{C, C^*, N, K\})$ w algebrę $(\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \{c, c^*, n, k\})$. Ponieważ $\gamma \notin Y$ (punkt 1.), zatem $\gamma \in Y_1$, skąd na podstawie wzoru $(***)$ otrzymujemy $v'(\gamma) = 1$. Tym samym wykazaliśmy, że v' jest wartościowaniem falsyfikującym formułę γ w matrycy $\mathfrak{M}^d_W$. Mamy więc $\gamma \notin E(\mathfrak{M}^d_W)$, co kończy dowód.

Wykażemy jeszcze, że matryca $\mathfrak{M}_W^d$ jest matrycą silnie adekwatną względem systemu W^d :

Twierdzenie 6. $\forall_{X\subseteq S}[(Cn(X) = C_{\mathfrak{M}_W^d}(X)]$.

Dowód. Niech $\alpha \in Cn(X)$. Ponieważ operator Cn jest operatorem finitarnym, zatem istnieje taki zbiór Y_1, że: $Y_1 \subseteq X$, $card(Y_1) < \aleph_o$, $\alpha \in Cn(Y_1)$.

Rozważmy dwa przypadki:

$$a. \quad Y_1 = \emptyset, \qquad b. \quad Y_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

W przypadku a. mamy $\alpha \in Cn(\emptyset)$, skąd stosując twierdzenie 5. i wzór (6) otrzymujemy: $\alpha \in E(\mathfrak{M}_W^d) = C_{\mathfrak{M}_W^d}(\emptyset)$ i tym samym $\alpha \in C_{\mathfrak{M}_W^d}(X)$.

W przypadku b. stosując wielokrotnie twierdzenie 3. do wyrażenia $\alpha \in Cn(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$ otrzymujemy:

$$\underbrace{C^* \dots C^* C^*}_{\text{n-razy}} \alpha\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \in Cn(\emptyset),$$

czyli wobec twierdzenia 5:

$$\underbrace{C^* \dots C^* C^*}_{\text{n-razy}} \alpha\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \in C_{\mathfrak{M}_W^d}(\emptyset).$$

Korzystając z własności:

$$C^*\alpha\beta, \beta \in C_{\mathfrak{M}_W^d}(Z) \Rightarrow \alpha \in C_{\mathfrak{M}_W^d}(Z), \ (Z \subseteq S)$$

mamy: $\alpha \in C_{\mathfrak{M}_W^d}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$ i tym samym $\alpha \in C_{\mathfrak{M}_W^d}(X)$. Udowodniliśmy więc inkluzję: $Cn(X) \subseteq C_{\mathfrak{M}_W^d}(X)$.

Dowód inkluzji $C_{\mathfrak{M}_W^d}(X) \subseteq Cn(X)$ przebiega podobnie.

II. Uogólniona metoda dedukcji naturalnej dla systemu W^d.

Szczegółowy opis uogólnionej metody dedukcji naturalnej można znaleźć w pracy [2].

Dla rachunku W^d, dualnego względem rachunku W, przyjmujemy następujące reguły dekompozycji wyrażeń:

Negacja N: $\dfrac{\vdash_o N\alpha}{\dashv \alpha}$, $\dfrac{\vdash_{\frac{1}{2}} N\alpha}{\vdash_{\frac{1}{2}} \alpha}$, $\dfrac{\dashv N\alpha}{\vdash_o \alpha}$;

Implikacja C: $\dfrac{\vdash_o C\alpha\beta}{\begin{array}{cc} \dashv \alpha & \dashv \alpha \\ \vdash_o \beta & \vdash_{\frac{1}{2}} \beta \end{array}}$, $\dfrac{\dashv C\alpha\beta}{\vdash \alpha \quad \vdash_{\frac{1}{2}} \alpha \quad \dashv \beta}$;

Implikacja dualna C^*: $\dfrac{\vdash_o C^*\alpha\beta}{\vdash_o \alpha \quad \vdash_{\frac{1}{2}} \alpha \quad \dashv \beta}$ $\quad \dfrac{\dashv C^*\alpha\beta}{\begin{array}{cc}\dashv \alpha & \dashv \alpha \\ \vdash_o \beta & \vdash_{\frac{1}{2}} \beta\end{array}}$;

Koniunkcja K: $\dfrac{\vdash_o K\alpha\beta}{\begin{array}{ccc}\vdash_o \alpha & \vdash_o \alpha & \dashv \alpha \\ \vdash_o \beta & \dashv \beta & \vdash_o \beta\end{array}}$, $\quad \dfrac{\vdash_{\frac{1}{2}} K\alpha\beta}{\vdash_{\frac{1}{2}} \alpha \quad \vdash_{\frac{1}{2}} \beta}$; $\quad \dfrac{\dashv K\alpha\beta}{\begin{array}{c}\dashv \alpha \\ \dashv \beta\end{array}}$;

gdzie symbole $\vdash_o, \vdash_{\frac{1}{2}}, \dashv$ użyte są w następującym znaczeniu:

$\vdash_o \alpha$ – wyrażenie α jest uznane w stopniu 0,

$\vdash_{\frac{1}{2}} \alpha$ – wyrażenie α jest uznane w stopniu $\frac{1}{2}$,

$\dashv \alpha$ – wyrażenie α jest odrzucone.

Dla funktora zdefiniowanego A reguły dekompozycji mają postać:

$$\frac{\vdash_o A\alpha\beta}{\begin{array}{c}\vdash_o \alpha \\ \vdash_o \beta\end{array}}, \qquad \frac{\vdash_{\frac{1}{2}} A\alpha\beta}{\vdash_{\frac{1}{2}} \alpha \quad \vdash_{\frac{1}{2}} \beta}, \qquad \frac{\dashv A\alpha\beta}{\begin{array}{ccc}\dashv \alpha & \dashv \alpha & \vdash_o \alpha \\ \vdash_o \beta & \dashv \beta & \dashv \beta\end{array}}.$$

Wyrażenia rachunku W^d poprzedzone jednym ze znaków $\vdash_o, \vdash_{\frac{1}{2}}, \dashv$ nazywać będziemy wyrażeniami znakowanymi. Dla wyrażeń znakowanych można, w oparciu o podane wyżej reguły, budować drzewa dekompozycji. Drzewo dekompozycji ma jedną lub więcej gałęzi, bowiem na podstawie podanych wyżej reguł można wnioskować, że dekompozycja odbywa się według zasady koniunkcyjno–alternatywnej analogicznej do zasady łączenia szeregowo–równoległego obwodów elektrycznych.

Przyjmujemy umowę, że gałąź drzewa dekompozycji wyrażenia znakowanego jest zamknięta, gdy w gałęzi tej występuje wyrażenie postaci $\vdash_{\frac{1}{2}} C\gamma\delta$ lub wyrażenie postaci $\vdash_{\frac{1}{2}} C^*\gamma\delta$ lub jedna z par wyrażeń postaci:

$$\begin{cases}\vdash_o \gamma \\ \vdash_{\frac{1}{2}} \gamma\end{cases}, \quad \begin{cases}\vdash_o \gamma \\ \dashv \gamma\end{cases}, \quad \begin{cases}\vdash_{\frac{1}{2}} \gamma \\ \dashv \gamma\end{cases}.$$

Gałąź zamkniętą oznaczać będziemy symbolem (c). Drzewo dekompozycji danego wyrażenia znakowanego jest zamknięte, gdy każda gałąź tego drzewa jest zamknięta.

Oznaczmy przez T^* zbiór twierdzeń systemu opartego na podanych regułach dekompozycji.

Definicja 3. $\alpha \in T^* \Leftrightarrow$ (drzewo dekompozycji wyrażenia $\dashv \alpha$ jest zamknięte).

Można wykazać, że:

Twierdzenie 4. $T^* = E(\mathfrak{M}_d)$

Tym samym otrzymujemy:

Twierdzenie 5. $T^* = T$.

Udowodnimy dla przykładu, że $a4 \in T^*$

Dowód:

1. $\dashv C^*C^*\beta C^*\beta\alpha C^*\beta N\alpha$ {zał.}

2.1. $\dashv C^*\beta C^*\beta\alpha$ 2.2. $\dashv C^*\beta C^*\beta\alpha$ $\{C^*:1\}$

3.1. $\vdash_o C^*\beta N\alpha$ 3.2. $\vdash_{\frac{1}{2}} C^*\beta N\alpha$

(c) {3.2}

4.1.1. $\dashv \beta$ 4.1.2. $\dashv \beta$ $\{C^*:2.1\}$

5.1.2. $\vdash_o C^*\beta\alpha$ 5.1.2. $\vdash_{\frac{1}{2}} C^*\beta\alpha$

(c) {5.1.2.}

6.1.1.1. $\dashv \alpha$ 6.1.1.2. $\vdash_o \beta$ 6.1.1.3. $\vdash_{\frac{1}{2}} \beta$ $\{C^*:5.1.1\}$

(c) {4.1.1, 6.1.1.2} (c) {4.1.1, 6.1.1.3}

7.1.1.1.1. $\vdash_o \beta$ 7.1.1.1.2. $\vdash_{\frac{1}{2}} \beta$ 7.1.1.1.3. $\dashv N\alpha$ $\{C^*:3.1\}$

(c) {7.1.1.1.1,4.1.1 } (c) {7.1.1.1.2,4.1.1} 8.1.1.3. $\vdash_o \alpha$ {N:7.1.1.1.}

(c) {6.1.1.1,8.1.1.1.3}

Widzimy więc, że każda gałąź drzewa dekompozycji wyrażenia $\dashv a4$ jest zamknięta (występuje symbol (c)) zatem $a4 \in T^*$.

Bibliografia

[1] Asser G.: *Einführung in die mathematische Logik.* Teil I. Leipzig 1959.

[2] Bryll G.: *Metody odrzucania wyrażeń.* Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1996.

[3] Gniazdowski A.: *Nota o silnej adekwatności pewnej matrycy względem logiki W.* ZN WSP w Opolu, Matematyka 13 (1973).

[4] Górnicka A.: *Aksjomatyzacja rachunku zdaniowego dualnego względem klasycznego implikacyjno–negacyjnego rachunku zdań.* Prace Naukowe WSP w Częstochowie, Matematyka VII (1999), w druku.

[5] Łoś J.: *An algebraic proof of completeness for the two–valued propositional calculus.* Colloqium Mathematicum, III, 1 (1954).

[6] Maduch M.: *Aksjomatyzacja logiki W.* ZN WSP w Opolu, Matematyka 13 (1973), s. 79–82.

[7] Maduch M., Piróg–Rzepecka K.: *Matryca adekwatna dla pewnego rachunku zdań.* ZN WSP w Opolu, Matematyka 13 (1973).

[8] Piróg–Rzepecka K.: *Rachunek zdań, w którym wyrażenia tracą sens.* Studia Logica 18 (1966), s. 139–164.

[9] Piróg–Rzepecka K.: *Systemy nonsense logics.* PWN, Warszawa–Wrocław 1977.

[10] Piróg–Rzepecka K.: *Postacie normalne systemu W.* ZN WSP w Opolu, Matematyka 13 (1973).

[11] Piróg–Rzepecka K.: *System logiczny oparty na regułach,* [w:] Nauka i Praktyka – Nauki matematyczne, fizyczne, chemiczne, PWN, 1975.

[12] Pogorzelski W.A.: *Klasyczny rachunek zdań.* Zarys teorii. Wyd. 2, PWN, Warszawa 1973.

Grzegorz Bryll
Uniwersytet Opolski
ul. Oleska 48
45-052 Opole

Anetta Górnicka
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
al. Armii Krajowej 13/15
42-200 Częstochowa