Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka VII, Częstochowa 1999

Rachunek refutacyjny a rachunek dualny

Grzegorz Bryll, Anetta Górnicka

Dla rachunku zdaniowego o języku $J = (S, \mathbb{F})$ i algebrze podobnej do tego języka $(U, \mathbf{f})$ można rozważać dwie matryce logiczne:

(1) $\mathfrak{M} = (U, V, \mathbf{f}), \quad \mathfrak{M}' = (U, U - V, \mathbf{f})$,
gdzie $\emptyset \neq V \subset U$.

Konsekwencje matrycowe odpowiadające powyższym matrycom określone są następująco:

(2) $C_{\mathfrak{M}}(X) = \left\{x \in S : \forall_{h \in Hom}[h(X) \subseteq V \Rightarrow h(x) \in V]\right\}$,

(3) $C_{\mathfrak{M}'}(X) = \left\{x \in S : \forall_{h \in Hom}[h(X) \subseteq U - V \Rightarrow h(x) \in U - V]\right\}$,
dla dowolnego $X \subseteq S$.

Hom jest zbiorem wszystkich homomorfizmów języka J w algebrę $(U, \mathbf{f})$. Matrycę $\mathfrak{M}'$ nazywamy matrycą dualną względem matrycy $\mathfrak{M}$. Zawartości matryc (1) są następujące:

(4) $E(\mathfrak{M}) = C_{\mathfrak{M}}(\emptyset) = \{x \in S : \forall_{h \in Hom}(h(x) \in V)\}$,

(5) $E(\mathfrak{M}') = C_{\mathfrak{M}'}(\emptyset) = \{x \in S : \forall_{h \in Hom}(h(x) \in U - V)\}$.

Niech $C_R(X)$ będzie najmniejszym zbiorem spośród zbiorów Y, domkniętych ze względu na układ reguł R i spełniających warunek $E(\mathfrak{M}) \cup X \subseteq Y$, zaś $C_{R'}(X)$ – najmniejszym zbiorem spośród zbiorów Y, domkniętych ze względu na układ reguł R' i spełniających warunek $E(\mathfrak{M}') \cup X \subseteq Y$.

Jeżeli spełniony jest warunek $C_R(\emptyset) = E(\mathfrak{M})$, to mówimy o adekwatności matrycy $\mathfrak{M}$ względem rachunku (S, C_R), jeśli natomiast spełniony jest warunek $C_R = C_{\mathfrak{M}}$, to mówimy o silnej adekwatności matrycy $\mathfrak{M}$ względem tego rachunku. Podobnie określamy pojęcia adekwatności i silnej adekwatności matrycy $\mathfrak{M}'$ względem rachunku $(S, C_{R'})$.

Przy określaniu funkcji C_R i $C_{R'}$ zamiast zbiorów $E(\mathfrak{M})$ i $E(\mathfrak{M}')$ przyjmuje się zwykle pewne układy aksjomatów A i A'.

Rachunek zdaniowy $(S, C_{R'})$ o matrycy silnie adekwatnej $\mathfrak{M}'$ nazywamy *rachunkiem dualnym* względem rachunku (S, C_R) (por. [5,6]).

Rozważmy jeszcze jedną funkcję konsekwencji C_{R^*}, określoną następująco:

$C_{R^*}(X)$ jest najmniejszym spośród zbiorów Y, domkniętych ze względu na układ reguł odrzucania R^* i spełniających warunek $A^* \cup X \subseteq Y$.

Zbiór A^* $(A^* \cap C_R(\emptyset) = \emptyset)$ jest układem aksjomatów odrzuconych.

Rachunek zdaniowy (S, C_{R^*}) nazywany *rachunkiem refutacyjnym* (rejekcyjnym, odrzuceniowym) względem rachunku (S, C_R), zaś sam rachunek (S, C_R) nazywamy *rachunkiem asercyjnym* (uznaniowym).

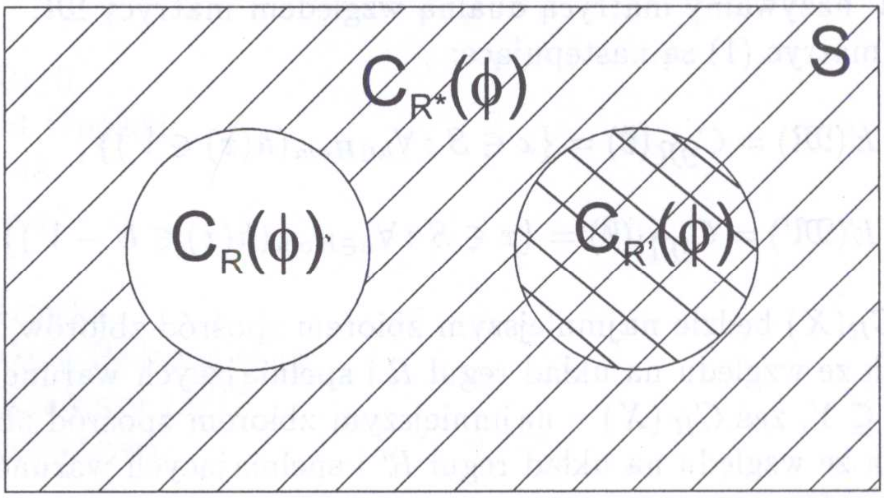
Jeżeli spełnione są warunki:

(6) $\quad C_R(\emptyset) \cap C_{R^*}(\emptyset) = \emptyset,$ (warunek Ł–niesprzeczności)

(7) $\quad C_R(\emptyset) \cup C_{R^*}(\emptyset) = S,$ (warunek Ł–zupełności)

to rachunek (S, C_R) nazywamy rachunkiem Ł–rozstrzygalnym (rozstrzygalnym w sensie Łukasiewicza) (por. [7]).

Zbiory tez poszczególnych rachunków, w przypadku systemu Ł–rozstrzygalnego, przedstawiono na rys. 1.



rys. 1.

Ustalimy z kolei pewien związek między systemem refutacyjnym i systemem dualnym dla rachunku (S, C_R).

Załóżmy, że w języku J występują funktory C (implikacja) i N (negacja) i że do zbioru $\mathbf{f}$, występującego w matrycach (1), należą odpowiadające im funkcje c i n o własnościach:

(8) $\quad c(x,y), x \in V \Rightarrow y \in V,$

(9) $\quad x \in V \Rightarrow n(x) \in U - V,$

(10) $\quad c'(x,y), y \in U - V \Rightarrow x \in U - V,$
gdzie $c'(x,y) = n(c(x,y)), \quad x, y \in U.$

Rozważmy też trzy reguły odrywania (modus ponens) o schematach:

$$r_{mp} : \frac{C\alpha\beta, \alpha}{\beta}, \qquad r'_{mp} : \frac{C'\alpha\beta, \beta}{\alpha}, \qquad r^*_{mp} : \frac{C\alpha\beta \in C_R(\emptyset), \beta}{\alpha},$$

gdzie: $C'\alpha\beta = NC\alpha\beta$.

Niech $R = \{r_{mp}\}, \quad R' = \{r'_{mp}\}, \quad R^* = \{r^*_{mp}\}$.
Załóżmy ponadto, że zachodzą wzory (twierdzenia o pełności):

(11) $\quad C_R = C_{\mathfrak{M}}, \; C_{R'} = C_{\mathfrak{M}'}.$

Tym samym zakładamy, że zostały sformalizowane rachunki zdaniowe o matrycach (1).
Wykażemy, że:

Lemat 1. Jeżeli zachodzą wzory (11), to reguła r^*_{mp} jest regułą konsekwencji $C_{R'}$.

Symbolicznie: $C\alpha\beta \in C_R(\emptyset) \Rightarrow \alpha \in C_{R'}(\{C\alpha\beta, \beta\})$.

Dowód.
Załóżmy, że
(12) $\quad C\alpha\beta \in C_R(\emptyset),$

Korzystając z własności:
(13) $\quad \gamma \in C_R(\emptyset) \Rightarrow N\gamma \in C_{R'}(\emptyset)$[1], $\quad \gamma \in S,$
otrzymamy $NC\alpha\beta \in C_{R'}(\emptyset)$, czyli

(14) $\quad C'\alpha\beta \in C_{R'}(\emptyset)$

[1] W dowodzie własności (13) korzysta się ze wzorów
$$C_R(\emptyset) = E(\mathfrak{M}), \; C_{R'}(\emptyset) = E(\mathfrak{M}') \text{ i wzoru (9).}$$

Stąd wynika, że:

(15) $C'\alpha\beta, \beta \in C_{R'}(\{\beta\}) \subseteq C_{R'}(\{C\alpha\beta, \beta\})$

Korzystając z własności:

$$C'\alpha\beta, \beta \in C_{R'}(X) \Rightarrow \alpha \in C_{R'}(X), \quad X \subseteq S$$

otrzymujemy $\alpha \in C_{R'}(\{C\alpha\beta, \beta\})$.

Tak więc reguła r^*_{mp} jest regułą wtórną w systemie $(S, C_{R'})$.

Z powyższego lematu wynika bezpośrednio:

Twierdzenie 1. Dołączając do systemu dualnego $(S, C_{R'})$ zbiór A^* aksjomatów odrzuconych systemu refutacyjnego (S, C_{R^*}) otrzymamy ten system refutacyjny.

Powyższe rozważania zilustrujemy na przykładzie klasycznego rachunku zdań (KRZ) w wersji inwariantnej. Matryce (1) dla rachunku implikacyjno-negacyjnego o funktorach C i N, mają postać:

(16) $\mathfrak{M}_{KRZ} = (\{0,1\}, \{1\}, \{c, n\}), \quad \mathfrak{M}'_{KRZ} = (\{0,1\}, \{0\}, \{c, n\}),$
gdzie: $c(x, y) = \min(1, 1 - x + y), n(x) = 1 - x, \; x, y \in \{0, 1\}$.

Wiadomo, że klasyczny implikacyjno-negacyjny rachunek zdań można zaksjomatyzować [4] przyjmując następujące schematy aksjomatów:

(A1) $CC\alpha\beta CC\beta\gamma C\alpha\gamma$,

(A2) $C\alpha CN\alpha\beta$

(A3) $CCN\alpha\alpha\alpha$

oraz regułę odrywania r_{mp}.

Zachodzi oczywiście wzór:

(17) $C_R = C_{\mathfrak{M}_{KRZ}}, \quad$ gdzie $R = \{r_{mp}\}$.

Rachunek dualny $(S, C_{R'})$ względem KRZ można oprzeć na następujących układach reguł i schematów aksjomatów [3]:

(18) $R' = \{r'_{mp}\}, \qquad A' = \{A'1, \ldots, A'5\}, \quad$ gdzie:

A′1. $C'C'\alpha\beta\alpha$

A′2. $C'C'C'\alpha\beta C'\alpha\gamma C'\gamma\beta$

A′3. $C'C'\alpha\beta N\beta$

A′4. $C'N\alpha C'N\alpha\alpha$

A′5. $C'\alpha C'\alpha N\alpha$

W pracy [3] wykazano, że:

Twierdzenie 2.

(19) $C_{R'} = C_{\mathfrak{M}'_{KRZ}}$

tym samym spełniony jest warunek:

(20) $C_{R'}(\emptyset) = E\left(\mathfrak{M}'_{KRZ}\right).$

Zbadamy z kolei rachunek refutacyjny (S, C_{R^*}) względem KRZ, (gdzie $R^* = \{r^*_{mp}\}$).

Przez At oznaczmy zbiór wszystkich zmiennych zdaniowych języka $J = (S, \{C, N\})$. Alternatywę A i alternatywę uogólnioną $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ określamy następująco:

$$(21)\qquad \begin{aligned} &A\alpha\beta = CN\alpha\beta,\\ &A(\alpha) = \alpha,\\ &A(\alpha, \beta) = A\alpha\beta,\\ &A(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = A(A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_{n+1}). \end{aligned}$$

Niech ponadto:

(22) $NX = \{\alpha : \exists_{\beta \in X}(\alpha = N\beta)\},$

$$(23)\qquad Dis(\alpha) = \begin{cases} Dis(\beta) \cup Dis(\gamma), & \text{gdy } \alpha = A\beta\gamma,\\ \{\alpha\}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wyrażenie α nazywamy *alternatywą elementarną* wtedy i tylko wtedy, gdy $Dis(\alpha) \subseteq At \cup NAt$. Jako aksjomaty odrzucone rachunku refutacyjnego przyjmujemy wszystkie wyrażenia będące alternatywami elementarnymi, w których każda zmienna zdaniowa występuje co najwyżej jeden raz.

Zbiór aksjomatów odrzuconych A^* ma więc postać:

(24) $A^* = \{\gamma \in S : \gamma$ jest alternatywą elementarną z jednokrotnym występowaniem zmiennych zdaniowych $\}$.

Wykażemy, że (por. [1,2]):

Twierdzenie 3. Inwariantny system (S, C_R) klasycznego implikacyjkno-negacyjnego rachunku zdań jest Ł–rozstrzygalny.

Dowód. Warunek (6) dla KRZ jest oczywisty.

Dla dowodu warunku (7) wystarczy wykazać, że:

(25) $S - C_R(\emptyset) \subseteq C_{R^*}(\emptyset).$

Załóżmy więc, że $\alpha = \alpha(p_1, \ldots p_n)$ i $\alpha \in S - C_R(\emptyset)$. Wobec twierdzenia o adekwatności $C_R(\emptyset) = E(\mathfrak{M}_{KRZ})$ mamy: $\alpha \notin E(\mathfrak{M}_{KRZ})$. Istnieje więc taki homomorfizm $h_o : S \to \{0, 1\}$, że $h_o(\alpha) = 0$.

Korzystamy z aksjomatu odrzuconego

$$A(\gamma_1, \ldots \gamma_n) \in A^*,$$

gdzie:

$$\gamma_i = \begin{cases} p_i, & \text{gdy } h_o(p_i) = 0, \\ Np_i, & \text{gdy } h_o(p_i) = 1. \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Dla dowolnego homomorfizmu $h : S \to \{0, 1\}$ mamy wówczas: $h(C\alpha A(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)) = 1$, czyli $C\alpha A(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in C_R(\emptyset)$.
Stosując regułę r^*_{mp} otrzymujemy $\alpha \in C_{R^*}(\emptyset)$.
Rachunek (S, C_R) jest więc Ł–rozstrzygalny. Dołączając do systemu $(S, C_{R'})$ zbiór aksjomatów A^*, określony wzorem (24), otrzymamy, zgodnie z twierdzeniem 1, system refutacyjny (S, C_{R^*}) dla klasycznego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań w wersji inwariantnej.

Rozważmy jeszcze konsekwencję dualną wzgiędem konsekwencji C_R dla KRZ.

Konsekwencję dualną względem dowolnej konsekwencji Cn definiuje się następująco [8]:

(26) $$\alpha \in dCn(X) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists_Y (Y \subseteq X \wedge card\ Y < \aleph_o \wedge \bigcap_{\beta \in Y} Cn(\{\beta\}) \subseteq Cn(\{\alpha\})),$$

dla dowolnego $X \subseteq S$.

Z odpowiednich twierdzeń podanych w pracy [6] i dotyczących logik wielowartościowych Łukasiewicza wynika, że:

Twierdzenie 4. Dla klasycznego rachunku zdań spełniony jest warunek:

(27) $$dC_R = C_{R'}.$$

Na podstawie wzorów (17), (19) i (27) otrzymujemy ciąg równości (por. [6]):

(28) $$C_{R'} = C_{\mathfrak{M}'_{KRZ}} = dC_R = dC_{\mathfrak{M}_{KRZ}}.$$

Bibliografia

[1] Bryll G.: *Metody odrzucania wyrażeń.* Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1996.

[2] Bryll G., Sochacki R.: *Aksjomatyczne odrzucanie w inwariantnych rachunkach zdaniowych Łukasiewicza.* ZN Uniwersytetu Opolskiego. Matematyka 29 (1995), s. 29-37.

[3] Górnicka A.: *Aksjomatyzacja rachunku zdaniowego dualnego względem klasycznego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań.* Prace naukowe WSP w Częstochowie, Matematyka VII. (w druku).

[4] Łukasiewicz J.: *Elementy logiki matematycznej.* Warszawa 1929 (skrypt); wyd. 2 - 1958.

[5] Malinowski G.: *Matrix representation for the dual counterparts of Łukasiewicz n-valued sentential calculi and the problem of their degrees of maximality.* Bulletin of the Section of logic, vol. 4, no. 1 (1975), pp. 26-32.

[6] Malinowski G., Spasowski M.: *Dual counterparts of Łukasiewicz's sentential calculi.* Studia Logica 33, no. 2 (1974), pp. 153-162.

[7] Słupecki J., Bryll G., Wybraniec-Skardowska U.: Theory of rejected propositions.

part I: Studia Logica 29 (1971), pp. 76-123;

part II: Studia Logica 30 (1971), pp. 97-145.

[8] Wójcicki R.: *Dual counterpart of consequence operations.* Bulletin of the Section of Logic, vol. 2, no. 1 (1973), pp. 54 - 57.

Grzegorz Bryll
Uniwersytet Opolski
ul. Oleska 48
45-052 Opole

Anetta Górnicka
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
al. Armii Krajowej 13/15
42-200 Częstochowa