Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka VII, Częstochowa 1999

# Aksjomatyzacja rachunku zdaniowego dualnego względem klasycznego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań

*Anetta Górnicka*

Klasyczny implikacyjno-negacyjny rachunek zdań może być scharakteryzowany między innymi w sposób matrycowy i w sposób aksjomatyczny. Podobne charakteryzacje można podać dla rachunku dualnego.

Dla dowolnego języka $J = (S, \mathbf{F})$ rachunku zdań (ze zbiorem wyrażeń sensownych $S$ i zbiorem funktorów zdaniotwórczych $\mathbf{F}$) można rozważać algebrę $\mathbf{A} = (U, \mathbf{f})$, podobną do tego języka (z uniwersum $U$ i zbiorem działań $\mathbf{f}$).

Jeśli w algebrze $\mathbf{A}$ wyróżnimy pewien podzbiór $V$, $\emptyset \neq V \subset U$, zwany zbiorem wartości wyróżnionych, to otrzymamy następującą matrycę logiczną, odpowiadającą językowi $J$ :

$$\mathfrak{M} = (U, V, \mathbf{f}). \tag{1}$$

Matrycę

$$\mathfrak{M}_d = (U, U - V, \mathbf{f}) \tag{2}$$

nazywamy matrycą dualną względem matrycy $\mathfrak{M}$ (zob. [4]).

Konsekwencję matrycową wyznaczoną przez matrycę (1) definiujemy następująco:

**Definicja 1.**

$$\alpha \in C_{\mathfrak{M}}(X) \iff \forall_{h \in H}[h(X) \subseteq V \Rightarrow h(\alpha) \in V], \quad (X \subseteq S).$$

gdzie $H$ oznacza zbiór wszystkich homomorfizmów języka $J$ w algebrę $\mathbf{A}$.

Zawartość matrycy $\mathfrak{M}$ (czyli zbiór tautologii) oznaczamy przez $E(\mathfrak{M})$. Przyjmujemy następującą definicję:

**Definicja 2.**

$$E(\mathfrak{M}) = \{\alpha \in S : \forall_{h \in H}(h(\alpha) \in V)\}.$$

Mamy więc:

**Wniosek 1.**

$$E(\mathfrak{M}) = C_{\mathfrak{M}}(\emptyset).$$

Dla klasycznego implikacyjno–negacyjnego rachunku zdań matryce logiczne (1) i (2) mają postać:

(3) $$\mathfrak{M}^{c,n} = (\{0,1\}, \{1\}, \{c,n\}),$$

(4) $$\mathfrak{M}_d^{c,n} = (\{0,1\}, \{0\}, \{c,n\}),$$

gdzie działania $c$ i $n$ określone są następująco:

(5) $$c(x,y) = \min(1, 1-x+y), \quad n(x) = 1-x.$$

Zawartości tych matryc są następujące:

(6) $$E(\mathfrak{M}^{c,n}) = \{\alpha \in S : \forall_{h \in H}(h(\alpha) = 1)\} = C_{\mathfrak{M}^{c,n}}(\emptyset);$$

(7) $$E(\mathfrak{M}_d^{c,n}) = \{\alpha \in S : \forall_{h \in H}(h(\alpha) = 0)\} = C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}(\emptyset).$$

Wiadomo, że dla klasycznego implikacyjno–negacyjnego rachunku zdań można przyjąć następujący układ $A_x$ schematów aksjomatów, pochodzący od J. Łukasiewicza [3]:

$\mathrm{A}_1$. $CC\alpha\beta CC\beta\gamma C\alpha\gamma$

$\mathrm{A}_2$. $C\alpha CN\alpha\beta$

$\mathrm{A}_3$. $CCN\alpha\alpha\alpha$

Jedyną regułą pierwotną jest reguła odrywania $r_o$ o schemacie:

$$r_o : \frac{C\alpha\beta, \alpha}{\beta}$$

Dla rachunku dualnego przyjmujemy następującą aksjomatykę $A_x^d = \{A_1^d, A_2^d, A_3^d, A_4^d, A_5^d\}$, gdzie:

$\mathrm{A}_1^d$. $NCNC\alpha\beta\alpha$

$\mathrm{A}_2^d$. $NCNCNC\alpha\beta NC\alpha\gamma NC\gamma\beta$

$\mathrm{A}_3^d$. $NCNC\alpha\beta N\beta$

$A_4^d$. $NCN\alpha NCN\alpha\alpha$

$A_5^d$. $NC\alpha NC\alpha N\alpha$

Jedyną regułą pierwotną jest reguła $r_o^d$ o schemacie:

$$r_o^d : \frac{NC\alpha\beta, \beta}{\alpha}$$

Jeśli wprowadzimy funktor $C^*$ określony następująco:

(8) $$C^*\alpha\beta = NC\alpha\beta$$

to regułę $r_o^d$ i schematy aksjomatów $A_1^d$–$A_5^d$ można zapisać w postaci:

(9) $$r_o^d : \frac{C^*\alpha\beta, \beta}{\alpha}$$

$A_1^d$. $C^*C^*\alpha\beta\alpha$

$A_2^d$. $C^*C^*C^*\alpha\beta C^*\alpha\gamma C^*\gamma\beta$

$A_3^d$. $C^*C^*\alpha\beta N\beta$

$A_4^d$. $C^*N\alpha C^*N\alpha\alpha$

$A_5^d$. $C^*\alpha C^*\alpha N\alpha$

Funktor $C^*$ określony wzorem (8) można byłoby nazwać implikacją dualną względem implikacji $C$.

Funktorowi $C^*$ w matrycach $\mathfrak{M}^{c-n}$ i $\mathfrak{M}_d^{c-n}$ odpowiada działanie $c^*$ określone wzorem:

(10) $$c^*(x, y) = n(c(x, y)) = \max(0, x - y).$$

Oznaczmy przez $T$ zbiór wszystkich tez klasycznego implikacyjno–negacyjnego rachunku zdań, zaś przez $T_d$–zbiór wszystkich tez rachunku dualnego.

Funkcje konsekwencji oparte odpowiednio na regułach $r_o$ i $r_o^d$ określamy następująco:

**Definicja 3.**

a. $Cn_{\{r_o\}}(X)$ jest najmniejszym zbiorem spośród zbiorów $Y$, domkniętych ze względu na regułę $r_o$ i spełniających warunek: $A_x \cup X \subseteq Y$;

b. $Cn_{\{r_o^d\}}(X)$ jest najmniejszym zbiorem spośród zbiorów $Y$, domkniętych ze względu na regułę $r_o^d$ i spełniających warunek: $A_x^d \cup X \subseteq Y$.

Widzimy więc, że:

**Wniosek 2.**

$$Cn_{\{r_o\}}(\emptyset) = T \quad \text{i} \quad Cn_{\{r_o^d\}}(\emptyset) = T^d.$$

Istnieje kilka metod dowodu następującego twierdzenia o silnej adekwatności matrycy (3) względem klasycznego implikacyjno–negacyjnego rachunku zdań (symb. $KRZ_{C-N}$) :

**Twierdzenie 1.**

$$Cn_{\{r_o\}} = C_{\mathfrak{M}^{c,n}}.$$

Stosując metodę Assera–Łosia [1,2] wykażemy, że:

**Twierdzenie 2.**

$$Cn_{\{r_o^d\}} = C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}.$$

Tak więc matryca $\mathfrak{M}_d^{c,n}$ jest silnie adekwatna względem rachunku dualnego (symb. $KRZ^d_{C-N}$). W dowodzie wykorzystujemy idee zawarte w pracy [6], dotyczące jednak konsekwencji $Cn_{\{r_o^d\}}$.
Dowód twierdzenia 2 poprzedzimy kilkoma definicjami i lematami.

**Lemat 1.**

$$\forall_{\alpha,\beta\in S}\left[C^*\alpha\beta \in Cn_{\{r_o^d\}}(X) \Longleftrightarrow \alpha \in Cn_{\{r_o^d\}}(X \cup \{\beta\})\right],$$

dla dowolnego $X \subseteq S$.
Pojęcie niesprzeczności i zupełności ze względu na $Cn_{\{r_o^d\}}$ definiujemy w sposób klasyczny:

**Definicja 4.**

$$X \in Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Syst} \Longleftrightarrow Cn_{\{r_o^d\}}(X) \subseteq X,$$

**Definicja 5.**

$$X \in Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Nsp} \Longleftrightarrow \sim \exists_{\alpha\in S}\left[\alpha, N\alpha \in Cn_{\{r_o^d\}}(X)\right],$$

**Definicja 6.**

$$X \in Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Zpł} \Longleftrightarrow \forall_{\alpha\in S}\left[\alpha \in Cn_{\{r_o^d\}}(X) \vee N\alpha \in Cn_{\{r_o^d\}}(X)\right],$$

dla dowolnego $X \subseteq S$.

Można wykazać, że[1]:

[1]Dowody lematów 2–5 są analogiczne do dowodów odpowiednich twierdzeń podanych w pracy [6], dotyczą jednak konsekwencji $Cn_{\{r_o^d\}}$ i funktora $C^*$.

**Lemat 2.**

$$X \in Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Nsp} \iff \exists_{\alpha \in S} \left[ \alpha \notin Cn_{\{r_o^d\}}(X) \right],$$

**Lemat 3.**

$$X \in Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Zpł} \iff \forall_{\alpha \notin Cn_{\{r_o^d\}}(X)} \left( X \cup \{\alpha\} \notin Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Nsp} \right),$$

**Lemat 4.**

$$\alpha \notin Cn_{\{r_o^d\}}(X) \iff X \cup \{N\alpha\} \in Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Nsp},$$

**Lemat 5.** (twierdzenie Lindenbauma o maksymalizacji) (por. [5]):

$$X \in Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Nsp} \Rightarrow \exists_Y \Big( X \subseteq Y \wedge Y \in Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Syst} \cap$$
$$\cap Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Nsp} \cap Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Zpł} \Big),$$

Przed podaniem dowodu twierdzenia 2 wykażemy następujące twierdzenie o słabej adekwatności matrycy $\mathfrak{M}_d^{c,n}$ względem rachunku $KRZ_{C-N}^d$ (twierdzenie o pełności):

**Twierdzenie 3.**

$$Cn_{\{r_o^d\}}(\emptyset) = E\left(\mathfrak{M}_d^{c,n}\right).$$

**Dowód.** Inkluzja $Cn_{\{r_o^d\}}(\emptyset) \subseteq E(\mathfrak{M}_d^{c,n})$ jest oczywista. W celu wykazania inkluzji $E(\mathfrak{M}_d^{c,n}) \subseteq Cn_{\{r_o^d\}}(\emptyset)$, czyli implikacji

$$\alpha \notin Cn_{\{r_o^d\}}(\emptyset) \Rightarrow \alpha \notin E(\mathfrak{M}_d^{c,n}),$$

załóżmy, że $\alpha \notin Cn_{\{r_o^d\}}(\emptyset)$. Stąd wobec lematu 4 otrzymujemy $\{N\alpha\} \in Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Nsp}$.
W myśl lematu 5 istnieje więc zbiór $Y_1$ o własnościach:

(11) $$Y_1 \in Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Syst},$$

(12) $$Y_1 \in Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Nsp},$$

(13) $$Y_1 \in Cn_{\{r_o^d\}} - \text{Zpł.},$$

(14) $$N\alpha \in Y_1$$

Określamy wartościowanie $V : At \to \{0,1\}$ w następujący sposób:[2]

$$V(p_i) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad p_i \in Y_1, \\ & \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots \\ 1, & \text{gdy} \quad Np_i \in Y_1. \end{cases} \tag{15}$$

Na drodze indukcyjnej (ze względu na złożoność formuł) można wykazać, że dla dowolnej formuły $\gamma$ spełniony jest warunek:

$$V(\gamma) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad \gamma \in Y_1, \\ 1, & \text{gdy} \quad N\gamma \in Y_1. \end{cases} \tag{16}$$

Ponieważ $N\alpha \in Y_1$, zatem $V(\alpha) = 1$, czyli $\alpha \notin E(\mathfrak{M}_d^{c,n})$, co kończy dowód.

W dowodzie twierdzenia 2 skorzystamy z lematu 1 i z następujących własności funkcji $Cn_{\{r_o^d\}}$ i $C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}$ :

**Lemat 6.**

$$\alpha \in Cn_{\{r_o^d\}}(X) \Rightarrow \exists_Y \Big(Y \subseteq X \wedge \mathrm{card}(Y) < \aleph_o \wedge \alpha \in Cn_{\{r_o^d\}}(Y)\Big),$$

**Lemat 7.**

$$\alpha \in C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}(X) \Rightarrow \exists_Y \Big(Y \subseteq X \wedge \mathrm{card}(Y) < \aleph_o \wedge \alpha \in C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}(Y)\Big),$$

**Lemat 8.**

$$C^*\alpha\beta \in C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}(X) \Longleftrightarrow \alpha \in C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}(X \cup \{\beta\}),$$

Dowód twierdzenia 2.

Należy wykazać, że

$$\forall_{X \subseteq S} \Big[Cn_{\{r_o^d\}}(X) = C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}(X)\Big].$$

Załóżmy najpierw, że $\alpha \in Cn_{\{r_o^d\}}(X)$. Istnieje więc zbiór $Y_1$ o własnościach:

$$Y_1 \subseteq X, \ \mathrm{card}(Y_1) < \aleph_o, \ \alpha \in Cn_{\{r_o^d\}}(Y_1)$$

Jeśli $Y_1 = \emptyset$, to $\alpha \in Cn_{\{r_o^d\}}(\emptyset)$, skąd wobec twierdzenia 3 $\alpha \in E(\mathfrak{M}_d^{c,n})$ czyli $\alpha \in C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}(\emptyset)$ i tym samym $\alpha \in C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}(X)$.

Jeśli $Y_1 = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, to $\alpha \in Cn_{\{r_o^d\}}(\{\beta_1, \ldots, \beta_m\})$, skąd wobec lematu 1: $\underbrace{C^* \ldots C^*C^*}_{m-\text{razy}}\alpha\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m \in Cn_{\{r_o^d\}}(\emptyset)$.

[2] $At$ jest zbiorem wszystkich zmiennych zdaniowych, tj. $At = \{p_1, p_2, \ldots\}$.

W oparciu o twierdzenie 3 otrzymujemy

$$\underbrace{C^* \ldots C^* C^*}_{m-\text{razy}} \alpha\beta_1\beta_2 \ldots \beta_m \in C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}(\emptyset).$$

Stąd, korzystając z lematu 8 mamy: $\alpha \in C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}(\{\beta_1, \ldots, \beta_m\})$, czyli uwzględniając warunek $Y_1 \subseteq X$ otrzymujemy ostatecznie $\alpha \in C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}(X)$. Udowodniliśmy więc inkluzję $Cn_{\{r_o^d\}}(X) \subseteq C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}(X)$. Podobnie uzasadniamy inkluzję $C_{\mathfrak{M}_d^{c,n}}(X) \subseteq C_{\{r_o^d\}}(X)$, co kończy dowód twierdzenia 2.

## Bibliografia


[1] Asser G.: *Einführung in die mathematische Logik.* Teil I. Leipzig 1959.

[2] Łoś J.: *An algebraic proof of completeness for the two–valued propositional calculus.* Colloqium Mathematicum, III, 1.(1954).

[3] Łukasiewicz J.: *Elementy logiki matematycznej.* Warszawa 1929 (skrypt); wyd. 2 - 1958.

[4] Malinowski G., Spasowski M.: *Dual counterparts of Łukasiewicz's sentential calculi.* Studia Logica 33, no. 2 (1974), pp. 153–162.

[5] Pogorzelski W.A.: *Klasyczny rachunek zdań.* Zarys teorii. wyd. 2, PWN, Warszawa 1973.

[6] Rutkowski A.: *Elementy logiki matematycznej.* WSiP, Warszawa 1978.



Anetta Górnicka
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
al. Armii Krajowej 13/15
42-200 Częstochowa