Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka VII, Częstochowa 1999

Klasa funkcji o ograniczonej drugiej wariacji

Tadeusz Kostrzewski

Streszczenie: Symbolem $BC[a,b]$ będziemy oznaczać rodzinę funkcji, które są różnicami dwóch funkcji wypukłych oraz spełniają pewne warunki regularnościowe na końcach przedziału $[a,b]$. W pracy omówiono pewne własności klasy $BC[a,b]$ oraz jej związki z innymi klasami funkcji takimi, jak $BV[a,b]$, $Lip[a,b]$, klasą funkcji o ograniczonym wygięciu.

Niech $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $(a < b)$ będzie ustalonym przedziałem. Symbolem $BC[a,b]$ będziemy oznaczać klasę funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ postaci $f = g - h$, gdzie g, h są funkcjami wypukłymi mającymi skończone pochodne jednostronne $g'(a+)$, $h'(a+)$, $g'(b-)$, $h'(b-)$ na końcach przedziału $[a,b]$.

Zbiór funkcji $BC[a,b]$ jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie przez skalary i tworzy przestrzeń liniową. Widoczne jest formalne podobieństwo pomiędzy przestrzenią $BC[a,b]$ i przestrzenią $BV[a,b]$ funkcji o wahaniu ograniczonym na przedziale $[a,b]$, gdyż każdą funkcję o wahaniu ograniczonym można przedstawić w postaci różnicy dwóch funkcji rosnących. Poniższy wynik pokazuje, że istnieje ścisła zależność pomiędzy obiema klasami funkcji.

Lemat 1. (por. [4], Twierdzenie A, str. 23). $f \in BC[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) - f(a) = \int_a^x r(t)dt$$

dla pewnej funkcji $r \in BV[a,b]$.

Na zbiorze wszystkich funkcji rzeczywistych określonych na przedziale $[a,b]$ zdefiniujemy teraz funkcjonał K_a^b odgrywający podobną rolę jak funkcjonał wahania V_a^b dla przestrzeni $BV[a,b]$.

Niech $\mathcal{P} = \mathcal{P}([a, b])$ będzie rodziną wszystkich podziałów

$$P = (x_o, x_1, \ldots, x_n),\ a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b,\ n \in \mathbb{N}$$

przedziału $[a, b]$ takich, że $n \geq 2$. Dla dowolnej funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i dowolnego podziału $P \in \mathcal{P}$ definiujemy liczbę

$$K(f, P) := \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right|,$$

a następnie funkcjonał

$$K_a^b(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}} K(f, P).$$

Bezpośrednio z definicji funkcjonału K_a^b wynika, że jeśli f jest funkcją wypukłą, to

$$K_a^b(f) = f'(b-) - f'(a+).$$

Znaczenie funkcjonału K_a^b dla przestrzeni $BC[a, b]$ określa następujące

Twierdzenie 1. ([4], Twierdzenie D, str 26) $f \in BC[a, b]$ wtedy i tylko wtedy gdy $K_a^b(f) < \infty$.

Liczba $K_a^b(f)$ jest również nazywana drugą wariacją funkcji f a przestrzeń $BC[a, b]$ - przestrzenią funkcji o ograniczonej drugiej wariacji na przedziale $[a, b]$ (por. [2]).

Następujący lemat podaje proste własności funkcjonału K_a^b wynikające wprost z jego definicji.

Lemat 2. Funkcjonał K_a^b ma następujące własności:

(a) $K_a^b(f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \alpha x + \beta$ dla $x \in [a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(b) $K_a^b(\alpha \cdot f) = \mid \alpha \mid K_a^b(f), \quad \alpha \in \mathbb{R}$,

(c) $K_a^b(f + g) \leq K_a^b(f) + K_a^b(g)$.

Z uwagi na własność (a) funkcjonał K_a^b można również interpretować jako „miarę wypukłości funkcji".

Przytoczymy jeszcze inne własności funkcjonału K_a^b oraz funkcji należących do przestrzeni $BC[a, b]$.

Lemat 3. ([4], Twierdzenie C, str. 25). Jeżeli $K_a^b(f) < \infty$, to funkcja f spełnia warunek Lipschitza w przedziale $[a, b]$.

Lemat 4. ([4], Twierdzenie B, str. 24). Jeżeli $K_a^b(f) < \infty$, to istnieje pochodna lewostronna f'_- w przedziale $[a, b)$ i pochodna prawostronna f'_+ w przedziale $(a, b]$.

Lemat 5. ([4], Problem D, str. 27)

(a) Jeśli $K_a^b(f) < \infty$, to zbiór punktów przedziału $[a, b]$, w których nie istnieje pochodna f', jest co najwyżej przeliczalny.

(b) Jeżeli pochodna f' istnieje w przedziale (a, b), to

$$K_a^b(f) = V_a^b(f').$$

(c) Jeżeli pochodna f' istnieje i jest absolutnie ciągła w przedziale $[a, b]$, to

$$K_a^b(f) = \int_a^b |\, f''(x)\, |\, dx.$$

Związek pomiędzy funkcjonałami K_a^b i V_a^b określa następujący

Lemat 6. ([4], Problem E, str. 28). Jeżeli $K_a^b(f) < \infty$, to

$$K_a^b(f) = V_a^b(\overline{f})$$

gdzie funkcja $\overline{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f'(x-) - f'(a+), & x \in (a, b], \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Lemat 7. ([4], Problem C, str. 27). Niech $a < c < b$. $K_a^b(f) < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $K_a^c(f) < \infty$ i $K_c^b(f) < \infty$ oraz zachodzi równość

$$K_a^b(f) = K_a^c(f) + K_c^b(f) + |\, f'(c+) - f'(c-)\, | .$$

Z lematu 3 wynika, że klasa $BC[a, b]$ zawiera się w klasie funkcji $Lip[a, b]$. Istnieją jednak funkcje spełniające warunek Lipschitza, które nie należą do klasy $BC[a, b]$, jak to pokazuje następujący

Przykład 1. Rozważmy funkcję $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha+1} \sin \frac{\pi}{x^{\alpha}}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

gdzie $\alpha \in [1, +\infty)$.

Funkcja f jest różniczkowalna oraz

$$|\, f'(x)\, | \leq \alpha(\pi + 1) + 1, \quad x \in [0, 1]$$

skąd wynika, że $f \in Lip[0, 1]$. Weźmy ciąg punktów (x_k) zawarty w przedziale $[0, 1]$, określony wzorem

$$x_k = \left(\frac{2}{2k + 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Prawdziwe jest następujące oszacowanie:

$$K_{x_n}^1(f) = V_{x_n}^1(f') \geq \sum_{k=1}^{n-1} | f'(x_k) - f'(x_{k+1}) | =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} | (\alpha+1)\frac{2}{2k+1}(-1)^k - (\alpha+1)\frac{2}{2k+3}(-1)^{k+1} | =$$

$$= (\alpha+1)\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{2}{2k+1}+\frac{2}{2k+3}\Big) = (\alpha+1)\Big(\frac{2}{3}+\frac{2}{2n+1}\Big)+$$

$$+2(\alpha+1)\sum_{k=2}^{n-1}\frac{2}{2k+1}.$$

Ponieważ ostatnia suma dąży do $+\infty$ gdy $n \to \infty$, zatem funkcja f nie należy do klasy $BC[0,1]$.

Dla dowolnej funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spełniającej warunek Lipschitza symbolem $L_a^b(f)$ będziemy oznaczać stałą Lipschitza funkcji f, tzn.

$$L_a^b(f) := \sup_{\substack{x,\overline{x}[a,b] \\ x\neq\overline{x}}} \left| \frac{f(x)-f(\overline{x})}{x-\overline{x}} \right|.$$

Kolejne lematy określają dalsze własności klasy $BC[a,b]$ oraz funkcjonału K_a^b.

Lemat 8. Jeżeli $f, g \in BC[a,b]$, to $f \cdot g \in BC[a,b]$ oraz zachodzi nierówność

$$K_a^b(f\cdot g) \leq \sup_{[a,b]} | f | K_a^b(g) + \sup_{[a,b]} | g | K_a^b(f) + 2L_a^b(f)L_a^b(g)(b-a).$$

Dowód. Niech $P(x_o, x_1, \ldots, x_n)$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a,b]$. Wtedy dla każdego $1 \leq i \leq n-1$ mamy tożsamości

$$\frac{f(x_{i+1})g(x_{i+1}) - f(x_i)g(x_i)}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} =$$

$$= g(x_i)\left(\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right)+$$

$$+f(x_{i+1})\left(\frac{g(x_{i+1})-g(x_i)}{x_{i+1}-x_i} - \frac{g(x_i)-g(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right)+$$

$$+\frac{g(x_i)-g(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(f(x_{i+1})-f(x_{i-1})),$$

skąd wynikają nierówności

$$\left|\frac{f(x_{i+1})g(x_{i+1}) - f(x_i)g(x_i)}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right| \leq$$

$$\leq \left(\sup_{[a,b]} | g |\right) \left| \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right| +$$

$$+ \left(\sup_{[a,b]} | f |\right) \left| \frac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right| +$$

$$+ L_a^b(f) L_a^b(g) \left(x_{i+1} - x_{i-1}\right).$$

Sumując ostatnie nierówności po $i = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz obliczając kres górny po wszystkich podziałów $P \in \mathcal{P}$ otrzymujemy tezę.

Oszacowanie występujące w ostatnim lemacie jest optymalne gdyż, jak łatwo sprawdzić, dla funkcji afinicznych

$$f(x) = \alpha x + \beta, \quad g(x) = \gamma x + \delta$$

w oszacowaniu otrzymujemy równość.

Lemat 9. Jeżeli $f, g \in BC[a,b]$, $g([a,b]) \subset [a,b]$ oraz funkcja g jest rosnąca (malejąca), to $f \circ g \in BC[a,b]$ oraz zachodzi nierówność

$$K_a^b(f \circ g) \leq L_a^b(g) K_{g(a)}^{g(b)}(f) + L_{g(a)}^{g(b)}(f) K_a^b(g)$$

(dla funkcji g malejącej odpowiednie granice po prawej stronie nierówności będą odwrotne).

Dowód. Dla dowolnego podziału $P = (x_o, x_1, \ldots, x_n)$ przedziału $[a,b]$ i każdego $1 \leq i \leq n-1$ mamy tożsamości

$$\frac{f(g(x_{i+1})) - f(g(x_i))}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f(g(x_i)) - f(g(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} =$$

$$= \frac{f(g(x_{i+1})) - f(g(x_i))}{g(x_{i+1}) - g(x_i)} \left(\frac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right) +$$

$$+ \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \left(\frac{f(g(x_{i+1})) - f(g(x_i))}{g(x_{i+1}) - g(x_i)} - \frac{f(g(x_i)) - f(g(x_{i-1}))}{g(x_i) - g(x_{i-1})} \right),$$

skąd wynika, że

$$\left| \frac{f(g(x_{i+1})) - f(g(x_i))}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f(g(x_i)) - f(g(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} \right| \leq$$

$$\leq L_{g(a)}^{g(b)}(f) \left| \frac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right|$$

$$+ L_a^b(g) \left| \frac{f(g(x_{i+1})) - f(g(x_i))}{g(x_{i+1}) - g(x_i)} - \frac{f(g(x_i)) - f(g(x_{i-1}))}{g(x_i) - g(x_{i-1})} \right|.$$

Sumując otrzymanie nierówności po $i = 1, \ldots, n-1$ oraz biorąc kres górny po wszystkich podziałach $P \in \mathcal{P}$ otrzymujemy nierówność występującą w tezie, co kończy dowód.

Lemat 10. Jeżeli funkcja $f \in BC[a,b]$ jest ściśle rosnąca oraz

$$c := \inf_{\substack{x,\overline{x}\in[a,b]\\ x\neq\overline{x}}} \left| \frac{f(x)-f(\overline{x})}{x-\overline{x}} \right| > 0,$$

to $f^{-1} \in BC[f(a), f(b)]$ oraz zachodzi nierówność

$$K_{f(a)}^{f(b)}(f^{-1}) \leq \frac{1}{c^2} K_a^b(f).$$

Dowód. Niech $Q = (y_o, y_1, \ldots, y_n)$ będzie danym podziałem przedziału $[f(a), f(b)]$. Wtedy punkty

$$x_i := f^{-1}(y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

tworzą podział P przedziału $[a,b]$. Dla każdego $1 \leq i \leq n-1$ mamy tożsamości

$$\frac{f^{-1}(y_{i+1}) - f^{-1}(y_i)}{y_{i+1}-y_i} - \frac{f^{-1}(y_i) - f^{-1}(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}} =$$

$$= \frac{\dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \dfrac{f(x_{i+1} - f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}}{\dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} \cdot \dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}},$$

skąd wynikają nierówności

$$\left| \frac{f^{-1}(y_{i+1}) - f^{-1}(y_i)}{y_{i+1}-y_i} - \frac{f^{-1}(y_i) - f^{-1}(y_{i-1})}{y_i - y_{i-1}} \right| \leq$$

$$\leq \tfrac{1}{c^2} \left| \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right|.$$

Sumując otrzymane nierówności po $i = 1, 2 \ldots, n-1$ oraz biorąc kres górny po wszystkich podziałach Q przedziału $[f(a), f(b)]$ dostajemy tezę.

Lemat 11. Jeżeli $f \in BC[a,b]$, to zachodzi nierówność

$$L_a^b(f) \leq K_a^b(f) + \mid f'(a+) \mid .$$

Dowód. Dla dowolnych punktów $x_1, x_2, \overline{x} \in [a,b]$ takich, że $a < \overline{x} < x_1 < x_2 \leq b$ mamy nierówności

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| - \left|\frac{f(\overline{x})-f(a)}{\overline{x}-a}\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(\overline{x})}{x_1-\overline{x}}\right| + \left|\frac{f(x_1)-f(\overline{x})}{x_1-\overline{x}} - \frac{f(\overline{x})-f(a)}{\overline{x}-a}\right| \leq$$
$$\leq K_a^b(f).$$

Przechodząc w nierówności

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \leq \left|\frac{f(\overline{x})-f(a)}{\overline{x}-a}\right| + K_a^b(f)$$

do granicy przy $\overline{x}$ dążącym prawostronnie do a otrzymujemy tezę.

W przypadku funkcji afinicznej

$$f(x) = \alpha x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

w nierówności występującej w ostatnim lemacie otrzymujemy równość co oznacza, że oszacowanie stałej Lipschitza jest optymalne.

Lemat 12. (por [1]) Jeśli $f \in BC[a,b]$, to zachodzą następujące równości

(a) $\lim\limits_{x\to a^+} L_a^x(f) = f'(a+)$,

(b) $\lim\limits_{x\to a^+} K_a^x(f) = 0$.

Lemat 13. Jeśli ciąg $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny (punktowo) w $[a,b]$ do funkcji f i ciąg liczbowy $\left(K_a^b(f_k)\right)$ jest ograniczony (od góry) przez M, to $K_a^b(f) \leq M$.

Dowód. Niech $P \in \mathcal{P}$ będzie dowolnym (danym) podziałem przedziału $[a,b]$ punktami $a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b$. Dla każdego k naturalnego mamy

$$K\left(f_k, P\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{f_k(x_{i+1}) - f_k(x_i)}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f_k(x_i)-f_k(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right| \leq M$$

Z założenia o punktowej zbieżności ciągu $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ w przedziale $[a,b]$ zauważmy, że dla każdego $j = 1, 2, \ldots, n-1, n$ ciąg $(f_k(x_j))$ jest zbieżny do $f(x_j)$. Przechodząc do granicy, pod znakiem nierówności, otrzymujemy więc

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right| \leq M,$$

czyli $K(f,P) \leq M$, a stąd $K_a^b(f) \leq M$.

Z lematu 2 wynika, że funkcjonał $\|\cdot\| : BC[a,b] \to \mathbb{R}_+$ określony wzorem

$$(1) \quad \|f\| := K_a^b(f) + |f'(a+)| + |f(a)|$$

jest normą w przestrzeni $BC[a,b]$.

Kolejne twierdzenie opisuje jedną z ważniejszych własności przestrzeni unormowanej $(BC[a,b], \|\cdot\|)$.

Twierdzenie 2. Przestrzeń $BC[a,b]$ z normą określoną wzorem (1) jest przestrzenią Banacha.

Dowód. Niech $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni unormowanej $(BC[a,b], \|\cdot\|)$. Weźmy dowolne $\mathcal{E} > 0$. Z definicji normy wynika istnienie takiego $k_o \in \mathbb{N}$, że dla dowolnych $k, l > k_o$ zachodzą nierówności

$$K_a^b(f_k - f_l) < \mathcal{E}, \ |f_k'(a+) - f_l'(a+)| < \mathcal{E}, |f_k(a) - f_l(a)| < \mathcal{E}.$$

Na mocy lematu 11 mamy również

$$L_a^b(f_k - f_l) \leq K_a^b(f_k - f_l) + |f_k'(a+) - f_l'(a+)| < 2\mathcal{E},$$

a więc dla każdego $x \in [a,b]$ prawdziwe jest oszacowanie

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leq |f_k(a) - f_l(a)| + |(f_k - f_l)(x) - (f_k - f_l)(a)| \leq$$
$$\leq |f_k(a) - f_l(a)| + L_a^b(f_k - f_l)|x - a| < \varepsilon + 2\varepsilon(b - a).$$

To oznacza, że ciąg (f_k) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[a,b]$. Niech

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x), \quad x \in [a,b].$$

Połóżmy $l_o = k_o + 1$ i dla $k \in \mathbb{N}$ $g_k = f_{l_o+k} - f_{l_o}$. Ciąg (g_k) jest punktowo zbieżny do $f - f_{l_o}$ i ponieważ $l_o > k_o$ mamy $K_a^b(f_{l_o+k} - f_{l_o}) < \varepsilon$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.
Na mocy lematu 13 mamy $K_a^b(f - f_{l_o}) \leq \varepsilon$.
Ponieważ $BC[a,b]$ jest przestrzenią liniową, więc z równości

$$f = (f - f_{l_o}) + f_{l_o}$$

wynika, że $f \in BC[a,b]$.

Pokażemy teraz, że ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny do funkcji f w sensie normy przestrzeni $BC[a,b]$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Na podstawie jednostajnej zbieżności ciągu (f_n) do funkcji f istnieje $k_o \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n > k_o$ ciąg $(h_k) = (f_{n+k} - f_n)$ spełnia założenia lematu 13. Rzeczywiście, ciąg (h_k) jest punktowo zbieżny do funkcji $f - f_n$ oraz ciąg $K_a^b(h_k)$ jest ograniczony (od góry) przez ε. Z lematu 13 wynika, że

$$K_a^b(f - f_n) \leq \varepsilon \quad \text{dla każdego} \quad n > k_o,$$

tzn.

$$\lim_{n \to \infty} K_a^b(f - f_n) = 0.$$

Ponadto

$$\lim_{n \to \infty} f_n(a) = f(a),$$

oraz ciąg

$$\left(\frac{(f_n(x) - f(x)) - (f_n(a) - f(a))}{x - a} \right)_{n=1}^{\infty}$$

jest jednostajnie zbieżny w przedziale $(a, b]$. Wówczas zachodzą równości

$$\lim_{n \to \infty} \mid (f_n)'_+(a) - f'_+(a) \mid =$$

$$= \lim_{x \to a^+} \left| \frac{(f_n(x) - f(x)) - (f_n(a) - f(a))}{x - a} \right| =$$

$$= \lim_{x \to a^+} \left| \lim_{n \to \infty} \frac{(f_n(x) - f(x)) - (f_n(a) - f(a))}{x - a} \right| = 0.$$

Stąd wynika, że

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

co kończy dowód.

W pracy [3] uzyskano tezę ostatniego twierdzenia w inny sposób wykorzystując fakt, że przestrzeń $BV[a, b]$ z normą określoną wzorem

$$\|f\|_{BV} := V_a^b(f) + \mid f(a) \mid$$

jest przestrzenią zupełną.

Uwaga 1.

Norma określona wzorem (1) jest równoważna normie

(2) $\quad \|f\|_o := K_a^b(f) + \mid f'(x_o+) \mid + \mid f(x_o) \mid$

gdzie x_o jest dowolnym punktem z przedziału $[a, b)$.

Istotnie, dla dowolnych punktów x_o, x_1, x_2 takich, że $a < x_2 < x_o < x_1 \leq b$ mamy nierówności

$$\left| \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} \right| - \left| \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o} \right| \leq \left| \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} - \frac{f(x_o) - f(x_2)}{x_o - x_2} \right| +$$

$$+ \left| \frac{f(x_o) - f(x_2)}{x_o - x_2} - \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o} \right| \leq K_a^b(f),$$

skąd po przejściu do granicy przy $x_2 \to a+$ i $x_1 \to x_o+$, wynika, że

$$| f'(a+) | \leq | f'(x_o+) | + K_a^b(f).$$

Uwzględniając lemat 11 oraz ostatnią nierówność dostajemy

$$\begin{aligned}
&| f(a) | \leq | f(x_o) | + | f(a) - f(x_o) | \leq | f(x_o) | + L_a^b(f)(b-a) \leq \\
&\leq | f(x_o) | + K_a^b(f)(b-a) + | f'(a+) | (b-a) \leq \\
&\leq | f(x_o) | + 2K_a^b(f)(b-a) + | f'(x_o+) | (b-a).
\end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę postać normy (1) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\|f\| = K_a^b(f) + | f'(a+) | + | f(a) | \leq K_a^b(f) + | f'(x_o+) | + \\
&+ K_a^b(f) + | f(x_o) | + K_a^b(f)(b-a) + | f'(x_o+) | (b-a) + \\
&+ K_a^b(f)(b-a) = K_a^b(f)[2 + 2(b-a)] + | f'(x_o+) | [1 + (b-a)] + \\
&+ | f(x_o) | \leq M_1 \|f\|_o,
\end{aligned}$$

gdzie

$$M_1 = 2[1 + (b-a)].$$

Podobnie z nierówności

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o} \right| - \left| \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} \right| \leq K_a^b(f)$$

wynika, że

$$| f'(x_o+) | \leq K_a^b(f) + | f'(a+) | .$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
&| f(x_o) | \leq | f(a) | + | f(x_o) - f(a) | \leq | f(a) | + L_a^b(f)(b-a) \leq \\
&\leq | f(a) | + K_a^b(f)(b-a) + | f'(a+) | (b-a).
\end{aligned}$$

Stąd na podstawie lematu 11 dostajemy

$$\begin{aligned}
&\|f\|_o = K_a^b(f) + | f'(x_o+) | + | f(x_o) | \leq [2 + (b-a)] K_a^b(f) + \\
&+ [1 + (b-a)] | f'(a+) | + | f(a) | \leq M_2 \|f\|,
\end{aligned}$$

gdzie

$$M_2 = 2 + (b-a).$$

To kończy dowód Uwagi 1.

Zdefiniujemy teraz nową klasę funkcji. W pracy [4] str. 268 wprowadzono następującą definicję:

Funkcję $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ nazywamy silnie wypukłą, jeśli istnieje stała $\alpha > 0$ taka, że

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \alpha \lambda (1-\lambda)(x-y)^2,$$
$$x, y \in (a,b), \lambda \in (0,1).$$

Rozważmy teraz dowolną funkcję $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, która spełnia następującą nierówność podobną do warunku silnej wypukłości

$$(3)\quad \exists_{\tau>0}\ \forall_{x_o,x_1\in[a,b]}\ \forall_{\lambda\in(0,1)} \mid f(\lambda x_o+(1-\lambda)x_1)-\lambda f(x_o)- \\ -(1-\lambda)f(x_1)\mid\leq \tau\lambda(1-\lambda)(x_o-x_1)^2$$

Nierówność ta ma następującą interpretację geometryczną: dla dowolnych punktów $x_o, x_1 \in [a,b], x_o < x_1$ i dowolnego $\lambda \in (0,1)$ długość odcinka o końcach $f(\lambda x_o + (1-\lambda)x_1)$ oraz $\lambda f(x_o) + (1-\lambda)f(x_1)$ jest nie większa od iloczynu stałej τ i długości odcinków

$$[x_o, \lambda x_o + (1-\lambda)x_1] \text{ i } [\lambda x_o + (1-\lambda)x_1, x_1].$$

Warunek (3) jest nieco innej natury niż warunek silnej wypukłości. W szczególności nie implikuje on wypukłości funkcji.

Funkcję spełniającą warunek (3) nazywamy funkcją o ograniczonym wygięciu na przedziale $[a,b]$. Nazwę tę usprawiedliwia własność tej funkcji wymieniona we wniosku poniżej.

Uwaga 2.

Warunek (3) jest równoważny następującej nierówności

$$(4)\quad \left|\frac{f(x_1)-f(\overline{x})}{x_1-\overline{x}} - \frac{f(\overline{x})-f(x_o)}{\overline{x}-x_o}\right| \leq \tau \mid x_o - x_1 \mid, x_o, x_1, \overline{x} \in [a,b], \\ x_o < \overline{x} < x_1.$$

Istotnie, nierówność występującą w warunku (3) możemy zapisać w sposób równoważny w postaci

$$\mid \lambda[f(\lambda x_o + (1-\lambda)x_1) - f(x_o)] - \\ -(1-\lambda)[f(x_1) - f(\lambda x_o + (1-\lambda)x_1)] \mid\leq \\ \leq \tau\lambda(1-\lambda)(x_o-x_1)^2,$$

lub, dzieląc obie strony ostatniej nierówności przez $\lambda(1-\lambda) \mid x_o - x_1 \mid$, w postaci

$$\left|\frac{f(\lambda x_o + (1-\lambda)x_1) - f(x_o)}{(1-\lambda)(x_o-x_1)} - \frac{f(x_1) - f(\lambda x_o + (1-\lambda)x_1)}{\lambda(x_o-x_1)}\right| \leq \\ \leq \tau \mid x_o - x_1 \mid .$$

Kładąc $\overline{x} := \lambda x_o + (1-\lambda)x_1$ oraz uwzględniając tożsamości

$$\lambda(x_o - x_1) = \overline{x} - x_1,\ (1-\lambda)(x_o - x_1) = x_o - \overline{x}$$

otrzymujemy nierówność (4).

Następujący lemat daje odpowiedź na pytanie: jak regularne są funkcje spełniające warunek (3) ?

Lemat 14. (por. [1], Lemat 3). Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spełnia warunek (3) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona różniczkowalna w przedziale

$[a, b]$ (w punktach a i b istnieją odpowiednie pochodne jednostronne) oraz pochodna f' spełnia warunek Lipschitza w przedziale (a, b).

Wniosek 1.

Jeżeli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w przedziale (a, b), to warunek (3) jest równoważny nierówności

$$(5) \qquad | f''(x) | \leq 2\tau, \qquad x \in (a, b).$$

Istotnie, jeżeli f spełnia warunek (3), to zgodnie z lematem 13 ona jest różniczkowalna i pochodna f' spełnia warunek Lipschitza w przedziale (a, b) ze stałą 2τ. Stąd, jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna, to spełniony jest warunek (5). Jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna i zachodzi nierówność (5), wtedy f' spełnia warunek Lipschitza ze stałą 2τ. Wówczas zgodnie z lematem 13 funkcja f spełnia warunek (3) ze stałą 2τ.

Klasa funkcji o ograniczonym wygięciu zawiera się w klasie $BC[a, b]$. Istotnie, jeśli f spełnia warunek (3), to $K_a^b(f) < 2\tau(b - a)$.

Natomiast, jeśli $f \in BC[a, b]$, to f nie musi spełniać warunku (3), jak pokazuje następujący przykład.

Przykład 2.

Funkcja $f(x) = | x |$ dla $x \in [-1, 1]$ należy do przestrzeni $BC[-1, 1]$, bo $K_{-1}^1(f) = 2$. Nie spełnia ona warunku (3), bo dla dowolnych punktów $x_1 \in [-1, 0)$, $x_2 \in (0, 1]$ i $\overline{x} = 0$ iloraz

$$\left| \frac{f(\overline{x}) - \dfrac{x_2 - \overline{x}}{x_2 - x_1} f(x_1) - \dfrac{\overline{x} - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2)}{(x_2 - \overline{x}) \cdot (\overline{x} - x_1)} \right| = \left| \frac{-\dfrac{x_2}{x_2 - x_1} \, | x_1 | - \dfrac{-x_1}{x_2 - x_1} \, | x_2 |}{x_2 \cdot (-x_1)} \right| = \frac{2}{x_2 - x_1}$$

jest nieograniczony i dąży do nieskończoności gdy x_1 i x_2 dążą do $\overline{x} = 0$.

Bibliografia

[1] T. Kostrzewski, Existence and uniqueness of $BC[a, b]$ solutions of nonlinear functional equation, Demonstratio Mathematica, XXVI (1993) 61 - 74.

[2] A.M. Russel, Functions of bounded second variation and Stielties - type integrals, Journal of the London Math. Soc. 2(1970) 193 - 208.

[3] A. Wayne Roberts, Dale E. Varberg, Functions of bounded convexity, Bull. of the Amer. Math. Soc. 75 (1969) 568 - 572.

[4] A. Wayne Roberts, Dale E. Varberg,Convex functions, Academic Press, New York and London, 1973.

Abstract. By $BC[a,b]$ we denote the set of all real functions defined on an interval $[a,b]$ which are differences of two convex functions having finite one – sided derivatives at the points a and b. In this paper we investigate some properties of the function class $BC[a,b]$ and the relation between this class and the other function class such as $BV[a,b]$, $Lip[a,b]$, functions of bounded bend.

Tadeusz Kostrzewski
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
al. Armii Krajowej 64
42-200 Częstochowa