Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka VII, Częstochowa 1999

Metoda założeniowa odrzucania wyrażeń dla intuicjonistycznego rachunku zdań i systemu $S4$ Lewisa

Zofia Kostrzycka, Grzegorz Bryll

Metoda założeniowa odrzucania wyrażeń, zwana też uogólnioną metodą dedukcji naturalnej, różni się od zwykłej metody założeniowej tym, że oprócz reguł uznawania wyrażeń stosuje się także reguły ich odrzucania. Jedyną regułą dowodzenia jest reguła tworzenia dowodu nie wprost.[1] Warto nadmienić, że poprzez wprowadzenie reguł odrzucania można ideę semantyk Kripkego [2,3] przenieść na grunt czysto syntaktyczny.

W niniejszej pracy podamy reguły uznawania i odrzucania wyrażeń dla intuicjonistycznego rachunku zdań oraz udowodnimy, że zbiór tez systemu aksjomatycznego INT oraz zbiór wyrażeń uznanych są sobie równe.[2] Podamy też reguły uznawania i odrzucania dla systemu $S4$ Lewisa. W sposób istotny korzystamy z pomysłów zawartych w pracy [5].

I. Intuicjonistyczny rachunek zdań.

Symbolami n i k oznaczać będziemy dowolne liczby naturalne dodatnie, symbolem „$|$" - relację podzielności (mającą m. in. własność zwrotności i przechodniości), symbolami K, A, C, N — odpowiednio funktory koniunkcji, alternatywy, implikacji i negacji, zaś symbolem S - zbiór wszystkich wyrażeń sensowych.

Przyjmujemy następujące reguły dekompozycji wyrażeń w rachunku INT:[3]

$$(K^{\vdash})\quad \frac{\vdash^n K\alpha\beta}{\begin{array}{l}\vdash^n \alpha\\ \vdash^n \beta\end{array}}, \qquad\qquad (K^{\dashv})\quad \frac{\dashv^n K\alpha\beta}{\dashv^n \alpha \quad \dashv^n \beta},$$

[1] Szczegółowy opis metody założeniowej (metody dedukcji naturalnej) zawierają m. in. prace [6,7], zaś uogólnionej metody założeniowej (uogólnionej metody dedukcji naturalnej) — praca [1].

[2] Podane w tej pracy reguły odrzucania dla INT, dotyczące implikacji i negacji oraz reguła repetycji, różnią się od odpowiednich reguł podanych w [1]. Można zauważyć, że system scharakteryzowany w pracy [1] zawiera w sobie rachunek INT.

[3] Symbol $\vdash^n \alpha$ oznacza, że wyrażenie α jest uznane na n-tym poziomie, zaś symbol $\dashv^n \alpha$, że wyrażenie α jest odrzucone na n-tym poziomie. Zapis $n \mid k$ oznacza, że liczba naturalna k jest podzielna przez liczbę naturalną n.

$$(A^{\vdash})\ \frac{\vdash^n A\alpha\beta}{\vdash^n \alpha \quad \vdash^n \beta}, \qquad (A^{\dashv})\ \frac{\dashv^n A\alpha\beta}{\dashv^n \alpha}, \atop \dashv^n \beta$$

$$(C^{\vdash})\ \frac{\vdash^n C\alpha\beta}{\dashv^n \alpha \quad \vdash^n \beta}, \qquad (C^{\dashv})\ \frac{\dashv^n C\alpha\beta}{\exists_k(n \mid k \wedge \vdash^k \alpha \wedge \dashv^k \beta)},$$

$$(N^{\vdash})\ \frac{\vdash^n N\alpha}{\dashv^n \alpha}, \qquad (N^{\dashv})\ \frac{\dashv^n N\alpha}{\exists_k(n \mid k \wedge \vdash^k \alpha)},$$

$$(R^{\vdash})\ \frac{\vdash^n \alpha \wedge n \mid k}{\vdash^k \alpha}.$$

Reguła $(R^{\vdash})$ nosi nazwę reguły repetycji lub reguły dziedziczenia.

Wyrażenie α jest uznane w rachunku INT (symb. $\alpha \in$ Taut), gdy przypuszczenie, że jest ono odrzucone na dowolnym n–tym poziomie prowadzi do sprzeczności. Dla dowolnego wyrażenia α tworzymy drzewo dekompozycji wyrażenia $\dashv^n \alpha$, stosując podane reguły do wszystkich funktorów występujących w α. Gałąź drzewa dekompozycji jest zamknięta, gdy w gałęzi tej występują wyrażenia sprzeczne, tj. wyrażenia postaci $\vdash^k \gamma, \dashv^k \gamma$. Drzewo dekompozycji wyrażenia $\dashv^n \alpha$ jest zamknięte, gdy zamknięta jest każda gałąź tego drzewa.

Zbiór tautologii można więc określić następująco:

Definicja 1. $\alpha \in$ Taut $\Leftrightarrow \forall_{n \in N}$ (drzewo dekompozycji wyrażenia $\dashv^n \alpha$ jest zamknięte).

Przed podaniem twierdzenia o pełności, opisaną metodę zilustrujemy kilkoma przykładami.

Przykład 1. $C\alpha NN\alpha \in$ Taut

Dowód.

1. $\dashv^n C\alpha NN\alpha$ {zał.}
2. $\vdash^{k_1} \alpha$
3. $\dashv^{k_1} NN\alpha$ } dla pewnego k_1 $\{C^{\dashv} : 1\}$
4. $n \mid k_1$
5. $\vdash^{k_2} N\alpha$
6. $k_1 \mid k_2$ } dla pewnego k_2 $\{N^{\dashv} : 3\}$
7. $\dashv^{k_2} \alpha$ $\{N^{\vdash} : 5\}$
8. $\vdash^{k_2} \alpha$ $\{R^{\vdash} : 2, 6\}$

sprzeczność $\{7, 8\}$

Przykład 2. $C\alpha CN\alpha\beta \in$ Taut

$$
\begin{array}{lll}
\text{Dowód. } 1. & \dashv^n C\alpha CN\alpha\beta & \{\text{zał.}\} \\
\left.\begin{array}{l} 2.\ \vdash^{k_1} \alpha \\ 3.\ \dashv^{k_1} CN\alpha\beta \\ 4.\ n \mid k_1 \end{array}\right\} & \text{dla pewnego } k_1 & \{C^{\dashv} : 1\} \\
\left.\begin{array}{l} 5.\ \vdash^{k_2} N\alpha \\ 6.\ \dashv^{k_2} \beta \\ 7.\ k_1 \mid k_2 \end{array}\right\} & \text{dla pewnego } k_2 & \{C^{\dashv} : 3\} \\
8. & \dashv^{k_2} \alpha & \{N^{\vdash} : 5\} \\
9. & \vdash^{k_2} \alpha & \{R^{\vdash} : 2, 7\} \\
 & \text{sprzeczność} & \{8, 9\}
\end{array}
$$

Przykład 3. $CNN\alpha\alpha \notin \text{Taut}$

$$
\begin{array}{lll}
\text{Dowód. } 1. & \dashv^n CNN\alpha\alpha & \{\text{zał.}\} \\
\left.\begin{array}{l} 2.\ \vdash^{k_1} NN\alpha \\ 3.\ \dashv^{k_1} \alpha \\ 4.\ n \mid k_1 \end{array}\right\} & \text{dla pewnego } k_1 & \{C^{\dashv} : 1\} \\
5. & \dashv^{k_1} N\alpha & \{N^{\vdash} : 2\} \\
\left.\begin{array}{l} 6.\ \vdash^{k_2} \alpha \\ 7.\ k_1 \mid k_2 \end{array}\right\} & \text{dla pewnego } k_2 & \{N^{\dashv} : 5\} \\
 & \text{brak sprzeczności} &
\end{array}
$$

Przykład 4. $CCC\alpha\beta\alpha\alpha \notin \text{Taut}$

$$
\begin{array}{llll}
\text{Dowód. } 1. & \dashv^n CCC\alpha\beta\alpha\alpha & & \{\text{zał.}\} \\
\left.\begin{array}{l} 2.\ \vdash^{k_1} CC\alpha\beta\alpha \\ 3.\ \dashv^{k_1} \alpha \\ 4.\ n \mid k_1 \end{array}\right\} & \text{dla pewnego } k_1 & & \{C^{\dashv} : 1\} \\
 & \swarrow \quad \searrow & & \\
5.1.\ \dashv^{k_1} C\alpha\beta & & 5.2.\ \vdash^{k_1} \alpha & \{C^{\vdash} : 2\} \\
\left.\begin{array}{l} 6.1.\ \vdash^{k_2} \alpha \\ 7.1.\ \dashv^{k_2} \beta \\ 8.1.\ k_1 \mid k_2 \end{array}\right\} & \text{dla pewnego } k_2 \quad \{C^{\dashv} : 5.1\} & \text{sprzeczność} & \{3, 5.2\} \\
 & \text{brak sprzeczności} & &
\end{array}
$$

W powyższym przykładzie jedna z gałęzi drzewa dekompozycji wyrażenia $\dashv^n CCC\alpha\beta\alpha\alpha$ jest otwarta, zatem drzewo tego wyrażenia nie jest zamknięte.

Przykład 5. $AC\alpha\beta C\beta\alpha \notin \text{Taut}$

$$
\begin{array}{lll}
\text{Dowód. } 1. & \dashv^n AC\alpha\beta C\beta\alpha & \{\text{zał.}\}
\end{array}
$$

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ \dashv^{n} C\alpha\beta \\ 3.\ \dashv^{n} C\beta\alpha \end{array}\right\} \qquad \{A^{\dashv} : 1\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4.\ \vdash^{k_1} N\alpha \\ 5.\ \dashv^{k_1} \beta \\ 6.\ n \mid k_1 \end{array}\right\} \text{dla pewnego } k_1 \qquad \{C^{\dashv} : 2\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7.\ \vdash^{k_2} \beta \\ 8.\ \dashv^{k_2} \alpha \\ 9.\ n \mid k_2 \end{array}\right\} \text{dla pewnego } k_2 \qquad \{C^{\dashv} : 3\}$$

brak sprzeczności

Przykład 6. $AN\alpha NN\alpha \notin \mathrm{Taut}$

Dowód. 1. $\dashv^{n} AN\alpha NN\alpha$ {zał.}

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ \dashv^{n} N\alpha \\ 3.\ \dashv^{n} NN\alpha \end{array}\right\} \qquad \{A^{\dashv} : 1\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4.\ \vdash^{k_1} N\alpha \\ 5.\ n \mid k_1 \end{array}\right\} \text{dla pewnego } k_1 \qquad \{N^{\dashv} : 3\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6.\ \vdash^{k_2} \alpha \\ 7.\ n \mid k_2 \end{array}\right\} \text{dla pewnego } k_2 \qquad \{N^{\dashv} : 2\}$$

8. $\dashv^{k_1} \alpha$ $\{N^{\vdash} : 4\}$

brak sprzeczności

Przykład 7. $CC\alpha\beta CN\beta N\alpha \in \mathrm{Taut}$

Dowód. 1. $\dashv^{n} CC\alpha\beta CN\beta N\alpha$ {zał.}

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ \vdash^{k_1} C\alpha\beta \\ 3.\ \dashv^{k_1} CN\beta N\alpha \\ 4.\ n \mid k_1 \end{array}\right\} \text{dla pewnego } k_1 \qquad \{C^{\dashv} : 1\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ \vdash^{k_2} N\beta \\ 6.\ \dashv^{k_2} N\alpha \\ 7.\ k_1 \mid k_2 \end{array}\right\} \text{dla pewnego } k_2 \qquad \{C^{\dashv} : 3\}$$

8. $\vdash^{k_2} C\alpha\beta$ $\{R^{\vdash} : 2, 7\}$

$$\left.\begin{array}{l} 9.\ \vdash^{k_3} \alpha \\ 10.\ k_2 \mid k_3 \end{array}\right\} \text{dla pewnego } k_3 \qquad \{N^{\dashv} : 6\}$$

11. $\vdash^{k_3} C\alpha\beta$ $\{R^{\vdash} : 8, 10\}$

12. $\vdash^{k_3} N\beta$ $\{R^{\vdash} : 5, 10\}$

$\swarrow \qquad \searrow$

13.1. $\dashv^{k_3} \alpha$ 13.2. $\vdash^{k_3} \beta$ $\{C^{\vdash} : 11\}$

sprzeczność {13.1, 9} 14.2. $\dashv^{k_3} \beta$ $\{N^{\vdash} : 12\}$

sprzeczność {14.2, 13.2}

Przykład 8. $CCN\alpha N\beta C\beta\alpha \notin \mathrm{Taut}$

Dowód. 1. $\dashv^{n} CCN\alpha N\beta C\beta\alpha$ {zał.}

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ \vdash^{k_1} CN\alpha N\beta \\ 3.\ \dashv^{k_1} C\beta\alpha \\ 4.\ n \mid k_1 \end{array}\right\} \text{dla pewnego } k_1 \qquad \{C^{\dashv}:1\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ \vdash^{k_2} \beta \\ 6.\ \dashv^{k_2} \alpha \\ 7.\ k_1 \mid k_2 \end{array}\right\} \text{dla pewnego } k_2 \qquad \{C^{\dashv}:3\}$$

8. $\vdash^{k_2} CN\alpha N\beta$ $\{R^{\vdash}:2,7\}$

↙ ↘

$$\left.\begin{array}{l} 9.1.\ \dashv^{k_2} N\alpha \\ 10.1.\ \vdash^{k_3} \alpha \\ 11.1.\ k_2 \mid k_3 \end{array}\right\} \text{dla pewnego } k_3 \ \{N^{\dashv}:9.1\}$$

brak sprzeczności

9.2. $\vdash^{k_2} N\beta$ $\{C^{\vdash}:8\}$
10.2. $\dashv^{k_2} \beta$ $\{N^{\vdash}:9.2\}$
sprzeczność $\{10.2, 5\}$

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia o pełności scharakteryzujemy krótko system aksjomatyczny rachunku intuicjonistycznego (system INT). W systemie INT, w wersji strukturalnej, obowiązuje reguła odrywania r_o o schemacie:

$$r_o : \frac{\begin{array}{c} C\alpha\beta \\ \alpha \end{array}}{\beta}.$$

Można przyjąć następujące schematy aksjomatów:

a1. $C\alpha C\beta\alpha$

a2. $CC\alpha C\beta\gamma CC\alpha\beta C\alpha\gamma$

a3. $CA\alpha\beta A\beta\alpha$

a4. $CK\alpha\beta K\beta\alpha$

a5. $C\alpha A\alpha\beta$

a6. $CK\alpha\beta\alpha$

a7. $C\alpha C\beta K\alpha\beta$

a8. $CC\alpha\gamma CC\beta\gamma CA\alpha\beta\gamma$

a9. $CC\alpha N\beta C\beta N\alpha$

a10. $C\alpha CN\alpha\beta$

Oznaczmy przez T zbiór wszystkich tez rachunku $INT = (A, \{r_o\})$, gdzie $A = \{$a1, a2, ..., a10$\}$.

Wprowadźmy funkcję konsekwencji, związaną z rachunkiem intuicjonistycznym następująco (por. [4]):

Definicja 2.

a. $\alpha \in Cn^o(X) \Leftrightarrow \alpha \in A \cup X$,

b. $\alpha \in Cn^{m+1}(X) \Leftrightarrow \alpha \in Cn^m(X) \vee \exists \beta \in S\ (\{C\beta\alpha, \beta\} \subseteq Cn^m(X))$,

c. $\alpha \in Cn(X) \leftrightarrow \exists m(\alpha \in Cn^m(X))$,

dla dowolnego $X \subseteq S$ i dowolnego $\alpha \in S$.

Mamy wówczas:

Twierdzenie 1. $T = Cn(\emptyset)$.

Przejdźmy do dowodu twierdzenia o pełności:

Lemat 1. $T \subseteq$ Taut

Lemat ten jest oczywisty, bowiem każdy aksjomat systemu INT jest tautologią i reguła odrywania r_o jest niezawodna (tzn. że: jeśli $C\alpha\beta, \alpha \in$ Taut, to $\beta \in$ Taut).

W dowodzie kolejnego lematu skorzystamy z następującego relatywnego twierdzenia Lindenbauma o maksymalizacji ([4,5]):

Twierdzenie 2. Jeśli $\alpha \notin Cn(X)$, to istnieje zbiór Y (zależny od X i α) o następujących własnościach:

1. $\alpha \notin Y$,
2. $\beta \notin Y \Rightarrow \alpha \in Cn(Y \cup \{\beta\})$,
3. $Cn(Y) = Y$
4. $X \subseteq Y$.

Przy tym w rachunku intuicjonistycznym zbiór Y ma następujące własności:

5. $N\beta \in Y \Rightarrow \beta \notin Y$,
6. $K\beta\gamma \in Y \Leftrightarrow (\beta \in Y \wedge \gamma \in Y)$,
7. $A\beta\gamma \in Y \Leftrightarrow (\beta \in Y \vee \gamma \in Y)$,
8. $C\beta\gamma \in Y \rightarrow (\beta \notin Y \vee \gamma \in Y)$.

Zbiór Y, zależny od X i α, o którym jest mowa w twierdzeniu 2, będziemy oznaczać przez Y_X^α.

Dla danego α zbiór Y_X^α nie jest jedyny, zależy on bowiem od sposobu ustawienia w ciąg wszystkich wyrażeń języka S.

Lemat 2. Taut $\subseteq T$

Wykażemy, że dla dowolnego α :jeśli $\alpha \notin T$, to $\alpha \notin$ Taut. Załóżmy więc, że $\alpha \notin T$ czyli $\alpha \notin Cn(\emptyset)$. (twierdzenie 1). Załóżmy też nie wprost, że $\alpha \in$ Taut. Z twierdzenia 2 wynika, że istnieje system $Y_\emptyset^\alpha$ taki, że $\alpha \notin Y_\emptyset^\alpha$. Korzystając ponownie z twierdzenia 2 można wykazać, że (zob. [5]):

— jeżeli $N\beta \notin Y_\emptyset^\alpha$, to istnieje system $Y_U^{N\beta}$, gdzie $\bigcup = Y_\emptyset^\alpha \cup \{\beta\}$, o własnościach 5–8 (tw.2);

— jeżeli $C\gamma\beta \notin Y_\emptyset^\alpha$, to istnieje system Y_V^β, gdzie $V = Y_\emptyset^\alpha \cup \{\gamma\}$, o własnościach 5–8 (tw. 2).

Dla systemów $Y_U^{N\beta}, Y_V^\delta$ tworzymy kolejne systemy, itd.

Rozpoczynając od zbioru $Y_\emptyset^\alpha$ otrzymamy dla wyrażenia α pewną rodzinę $\mathbb{R}_\alpha$ systemów. Ponumerujemy zbiory rodziny $\mathbb{R}_\alpha$ wskaźnikami będącymi liczbami naturalnymi, zachowując zasadę: $X_n \subseteq X_k \Leftrightarrow n \mid k$.

Zauważmy, że dla danego α rodzina $\mathbb{R}_\alpha$ nie musi być monotoniczną rodziną systemów.

Dla każdego zbioru X_n rodziny $\mathbb{R}_\alpha$ określamy funkcję (wartościowanie) V_n następująco:

$$V_n(\omega) = \begin{cases} \vdash^n \omega, & \text{gdy} \quad \omega \in X_n, \\ & \qquad\qquad\qquad \omega \in S, \\ \dashv^n \omega, & \text{gdy} \quad \omega \notin X_n. \end{cases}$$

W zbiorze wartościowań wprowadzamy relację ρ następująco:

$$V_n \rho V_k \Leftrightarrow n \mid k.$$

Widoczne jest, że relacja ρ jest zwrotna i przechodnia.

Uzasadnienie reguł uznawania i odrzucania w systemie INT jest następujące:

1. jeżeli $V_n(\beta) =\vdash^n \beta$ i $n \mid k$, to $\beta \in X_n$ i $X_n \subseteq X_k$. Stąd $\beta \in X_k$, czyli $V_k(\beta) =\vdash^k \beta$. (zob. regułę $(R^\vdash)$);

2. jeżeli $V_n(N\gamma) =\vdash^n N\gamma$, to $N\gamma \in X_n$, zatem zgodnie z twierdzeniem 2 punkt 5 mamy $\gamma \notin X_n$, czyli $V_n(\gamma) =\dashv^n \gamma$ (zob. regułę $(N^\vdash)$);

3. jeżeli $V_n(N\gamma) =\dashv^n N\gamma$, to $N\gamma \notin X_n$. W rodzinie $\mathbb{R}_\alpha$ istnieje jednak pewien zbiór X_{k_1} taki, że $\gamma \in X_{k_1}$ i $n \mid k_1$.

   Mamy więc $V_{k_1}(\gamma) =\vdash^{k_1} \gamma$ i $n \mid k_1$ (zob. regułę $(N^\dashv)$);

4. jeżeli $V_n(C\gamma\delta) =\vdash^n C\gamma\delta$, to $C\gamma\delta \in X_n$. Z twierdzenia 2 punkt 8 wynika, że $\gamma \notin X_n$ lub $\delta \in X_n$, zatem $V_n(\gamma) =\dashv^k \gamma$ lub $V_n(\delta) =\vdash^k \delta$ (zob. regułę $(C^{\vdash})$);

5. jeżeli $V_n(C\gamma\delta) =\dashv^n C\gamma\delta$, to $C\gamma\delta \notin X_n$. Z konstrukcji zbiorów rodziny $\mathbb{R}_\alpha$ wynika, że w rodzinie tej istnieje pewien zbiór X_{k_1} taki, że: $n \mid k_1, \gamma \in X_{k_1}$ i $\delta \notin X_{k_1}$, czyli $V_{k_1}(\gamma) =\vdash^{k_1} \gamma$ i $V_{k_1}(\delta) =\dashv^{k_1} \delta$ (zob. regułę $(C^{\dashv})$);

6. jeżeli $V_n(K\gamma\delta) =\vdash^n K\gamma\delta$, to $K\gamma\delta \in X_n$ i wtedy wobec twierdzenia 2, $\gamma \in X_n$ i $\delta \in X_n$, czyli $V_n(\gamma) =\vdash^n \gamma, V_n(\delta) =\vdash^n \delta$ (zob. regułę $(K^{\vdash})$);

7. jeżeli $V_n(K\gamma\delta) =\dashv^n K\gamma\delta$, to $K\gamma\delta \notin X_n$. Wtedy wobec twierdzenia 2 punkt 6 mamy: $\gamma \notin X_n$ lub $\delta \notin X_n$, czyli $V_n(\gamma) =\dashv^n \gamma$ lub $V_n(\delta) =\dashv^n \delta$ (zob. regułę $(K^{\dashv})$);

8. jeżeli $V_n(A\gamma\delta) =\vdash^n A\gamma\delta$, to $A\gamma\delta \in X_n$, czyli wobec twierdzenia 2 punkt 7: $\gamma \in X_n$ lub $\delta \in X_n$, skąd otrzymujemy: $V_n(\gamma) =\vdash^n \gamma$ lub $V_n(\delta) =\vdash^n \delta$ (zob. regułę $A^{\vdash}$));

9. jeżeli $V_n(A\gamma\delta) =\dashv^n A\gamma\delta$, to $A\gamma\delta \notin X_n$, czyli $\gamma \notin X_n$ i $\delta \notin X_n$. Stąd $V_n(\gamma) =\dashv^n \gamma$ i $V_n(\delta) =\dashv^n \delta$ (zob. regułę $(A^{\dashv})$).

Do rodziny $\mathbb{R}_\alpha$ należy zbiór $Y_\emptyset^\alpha$ o własności: $\alpha \notin Y_\emptyset^\alpha$. Istnieje więc pewna liczba naturalna k_1 taka, że $V_{k_1}(\alpha) =\dashv^{k_1} \alpha$. Wobec założenia dowodu nie wprost mamy jednak $\sim \exists_k(\dashv^k \alpha)$, skąd otrzymujemy $\sim (\dashv^{k_1} \alpha)$, co prowadzi do sprzeczności.

II. System $S4$ Lewisa.

System $S4$ jest rozszerzeniem klasycznego rachunku zdań (z funktorami C, A, K, N) poprzez wzbogacenie języka o funktory modalne konieczności L i możliwości M oraz uzupełnienie aksjomatyki KRZ o następujące schematy aksjomatów (por. [5]):

A1. $CL\alpha\alpha$

A2. $CLC\alpha\beta CL\alpha L\beta$

A3. $CL\alpha LL\alpha$

A4. $CM\alpha NLN\alpha$

A5. $CNLN\alpha M\alpha$

Regułami pierwotnymi systemu są reguła odrywania i reguła Gödla o schematach:

$$r_o : \frac{\begin{matrix} C\alpha\beta \\ \alpha \end{matrix}}{\beta}, \qquad r_G : \frac{\alpha}{L\alpha}.$$

Ze względu na stosowanie schematów aksjomatów nie włączamy do systemu reguły podstawiania jako reguły pierwotnej.

Dla systemu $S4$ można podać formalizację bezaksjomatyczną, opartą na regułach uznawania i odrzucania wyrażeń oraz regule tworzenia dowodu nie wprost, podobnie jak to uczyniliśmy dla systemu intuicjonistycznego. Dowody wyrażeń polegają na budowie odpowiednich drzew dekompozycji.

Reguły uznawania i odrzucania wyrażeń są następujące:

Reguły uznawania i reguły odrzucania dla koniunkcji i alternatywy są takie same jak w rachunku intuicjonistycznym. Obowiązują więc reguły $K^{\vdash}, K^{\dashv}, A^{\vdash}, A^{\dashv}$.

Natomiast reguły dla implikacji, negacji, koniunkcji i możliwości mają postać:

$$(C^{\vdash}_{S4}) \quad \frac{\vdash^n C\alpha\beta}{\dashv^n \alpha \;\; \vdash^n \beta}, \qquad (C^{\dashv}_{S4}) \quad \frac{\dashv^n C\alpha\beta}{\begin{matrix} \vdash^n \alpha \\ \dashv^n \beta \end{matrix}},$$

$$(N^{\vdash}_{S4}) \quad \frac{\vdash^n N\alpha}{\dashv^n \alpha}, \qquad (N^{\dashv}_{S4}) \quad \frac{\dashv^n N\alpha}{\vdash^n \alpha},$$

$$(L^{\vdash}_{S4}) \quad \frac{\begin{matrix} \vdash^n L\alpha \\ n \mid k \end{matrix}}{\vdash^k \alpha}, \qquad (L^{\dashv}_{S4}) \frac{\dashv^n L\alpha}{\left.\begin{matrix} \dashv^{k_1} \alpha \\ n \mid k_1 \end{matrix}\right\} \text{dla pewnego } k_1}$$

$$(M^{\vdash}_{S4}) \quad \frac{\vdash^n M\alpha}{\left.\begin{matrix} \vdash^{k_1} \alpha \\ n \mid k_1 \end{matrix}\right\} \text{dla pewnego } k_1} \qquad (M^{\dashv}_{S4}) \frac{\begin{matrix} \dashv^n M\alpha \\ n \mid k \end{matrix}}{\dashv^k \alpha}.$$

Jeśli przez T_{S4} oznaczymy zbiór wszystkich tez systemu aksjomatycznego $S4$, zaś przez Taut_{S4} zbiór wszystkich takich wyrażeń α, że odpowiadające im wyrażenia $\dashv^n \alpha$ mają zamknięte drzewa dekompozycji, to można wykazać, że (zob. [5]):

Twierdzenie. $T_{S4} = \mathrm{Taut}_{S4}$.

Literatura

[1] Bryll G.: Metody odrzucania wyrażeń. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1996.

[2] Kripke S.A.: Semantical analysis of modal logic I, Normal modal propositional calculi. Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 9 (1993), pp. 67–96.

[3] Kripke S.A.: Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I. In: Crossley, Dumment: Formal Systems and Recursive Functions. Amsterdam 1965.

[4] Pogorzelski W.A.: Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii. Wyd. 3, PWN, Warszawa 1975.

[5] Porębska M., Suchoń W.: Elementarne wprowadzenie w logikę formalną. PWN, Warszawa 1991.

[6] Słupecki J., Borkowski L.: Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości. PWN, Warszawa 1963.

[7] Słupecki J., Hałkowska K., Piróg–Rzepecka K.: Logika matematyczna. PWN, Warszawa - Wrocław 1976.

Zofia Kostrzycka
Uniwersytet Opolski
ul. Oleska 48
45-052 Opole

Grzegorz Bryll
Uniwersytet Opolski
ul. Oleska 48
45-052 Opole