Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka VII, Częstochowa 1999

Zastosowanie metody kolejnych różnic do stawiania hipotez indukcyjnych

Grzegorz Bryll

Metoda kolejnych różnic może być wykorzystana już w szkole średniej pod warunkiem jednak, że zapoznamy młodzież z metodą dowodzenia twierdzeń drogą indukcji zupełnej.

Dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}$ ciąg k–tych różnic $\{\Delta^k a_n\}$ określamy indukcyjnie w następujący sposób:

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta^1 a_1 = a_{i+1} - a_i, \\ \Delta^{k+1} a_i = \Delta^k a_{i+1} - \Delta^k a_i. \end{cases} \qquad i, k \in N - \{0\},$$

Metodą indukcji zupełnej można wykazać, że:

Twierdzenie 1. Dowolny wyraz ciągu $\{a_n\}$ wyraża się wzorem:

$$(2)\qquad a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta^1 a_1 + \ldots + \binom{n-1}{n-1} \Delta^{n-1} a_1.$$

Widzimy więc, że dla wyznaczenia n–tego wyrazu ciągu $\{a_n\}$ wystarcza znajomość pierwszego wyrazu oraz kolejnych różnic:
$\Delta^1 a_1, \Delta^2 a_1, \ldots, \Delta^{n-1} a_1$.
Symbol kombinatoryczny $\binom{n}{k}$ ma następujące znaczenie:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Oprócz ciągów arytmetycznych można rozważać również ciągi arytmetyczne wyższych stopni.
Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy <u>ciągiem arytmetycznym</u> stopnia $m (m = 1, 2, \ldots)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{\Delta^m a_n\}$ jest stały i $\Delta^m a_n \neq 0$.
Tak więc zwykły ciąg arytmetyczny, tj. ciąg dla którego ciąg pierwszych różnic jest ciągiem stałym, różnym od zera, jest ciągiem arytmetycznym stopnia pierwszego. Ciągi stałe nazywać będziemy ciągami arytmetycznymi zerowego stopnia.

Na podstawie twierdzenia 1 wnioskujemy, że dowolny wyraz ciągu arytmetycznego m–tego stopnia wyraża się wzorem

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta^1 a_1 + \ldots + \binom{n-1}{m} \Delta^m a_1 \tag{3}$$

Korzystając z wzoru (3) można łatwo wykazać, że:

Twierdzenie 2. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $\{a_n\}$ stopnia m wyraża się wzorem:

$$s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta^1 a_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{n}{m+1} \Delta^m a_1 \tag{4}$$

Dla ciągu arytmetycznego stopnia pierwszego otrzymujemy więc:

$$s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta^1 a_1 = \frac{n}{2}\Big[2a_1 + (n-1)r\Big], \text{ gdzie } r = \Delta^1 a_1. \tag{5}$$

Sumę s_n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego m–tego stopnia można więc wyznaczyć, podobnie jak wyraz a_n, na podstawie a_1 i różnic $\Delta^1 a_1, \Delta^2 a_1, \ldots, \Delta^m a_1$.
Dla znalezienia ciągów kolejnych różnic sporządzamy tablicę:

$$\begin{array}{ccccc}
a_1 & & & & \\
 & \Delta^1 a_1 & & & \\
a_2 & & \Delta^2 a_1 & & \\
 & \Delta^1 a_2 & & \Delta^3 a_1. & \cdot \\
a_3 & & \Delta^2 a_2 & \cdot & \cdot \\
 & \Delta^1 a_3 & \cdot & \cdot & \\
a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & & & \\
\cdot & & & &
\end{array}$$

Pierwsze elementy poszczególnych kolumn tej tablicy (z wyjątkiem kolumny pierwszej) są kolejnymi różnicami występującymi we wzorach (2), (3) i (4).

Sumy postaci $\sum\limits_{i=1}^{n} f(i)$, gdzie f jest wielomianem jednej zmiennej, można obliczać w oparciu o następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. Jeśli wyraz ciągu $\{a_n\}$ mają postać

$$a_n = f(n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

gdzie f jest wielomianem m–tego stopnia ($m \geq 0$), to dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym m–tego stopnia.

Z powyższych rozważań wynika, że niekiedy na podstawie pewnej liczby początkowych wyrazów danego ciągu $\{a_n\}$ i na podstawie ciągów kolejnych różnic można postawić hipotezę indukcyjną dotyczącą budowy n–tego wyrazu oraz sumy n początkowych wyrazów tego ciągu. Hipotezę tę należy uzasadnić na drodze indukcji zupełnej.
Podamy dwa przykłady stawiania hipotez indukcyjnych.

Przykład 1. Na ile części rozcina płaszczyznę n prostych leżących na tej płaszczyźnie, jeśli żadne dwie proste nie są równoległe i żadne trzy proste nie przechodzą przez jeden punkt ?
Bezpośrednie obserwacje wskazują, że przy rozcinaniu płaszczyzny prostymi, dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ otrzymamy odpowiednio:

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 11, a_5 = 16$$

Tablica kolejnych różnic ma postać (zob. tabelę (6)):

$$\begin{array}{cccc}
2 & & & \\
 & 2 & & \\
4 & & 1 & \\
 & 3 & & 0 \\
7 & & 1 & \\
 & 4 & & 0 \\
11 & & 1 & . \\
 & 5 & . & . \\
16 & . & . & . \\
. & . & . & \\
. & . & & \\
. & & &
\end{array}$$

Tak więc $a_1 = 2$, $\Delta^1 a_1 = 2$, $\Delta^2 a_1 = 1$, $\Delta^3 a_1 = 0$.

Przypuszczamy więc, że badany ciąg jest ciągiem arytmetycznym drugiego stopnia. Stosując wzór (3) otrzymujemy:

$$a_n = 2\binom{n-1}{0} + 2\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} = \frac{1}{2}\left(n^2 + n + 2\right)$$

Wzór ten uzasadniamy na drodze indukcji zupełnej.

Przykład 2. Ciąg liczb naturalnych układamy w grupy:

$$(1),(2,3,4),(5,6,7,8,9),(10,11,12,13,14,15,16),\ldots$$

Znaleźć sumę liczb n–tej grupy.

W celu znalezienia pierwszego elementu n–tej grupy tworzymy ciąg z pierwszych elementów poszczególnych grup:

$$1,2,5,10,17,\ldots$$

Tablica kolejnych różnic dla tego ciągu ma postać:

$$\begin{array}{cccc}
1 & & & \\
 & 1 & & \\
2 & & 2 & \\
 & 3 & & 0 \\
5 & & 2 & \\
 & 5 & & 0 \\
10 & & 2 & . \\
 & 7 & . & . \\
17 & . & . & . \\
. & . & . & \\
. & . & & \\
. & & &
\end{array}$$

Przypuszczamy więc, że powyższy ciąg jest ciągiem arytmetycznym drugiego stopnia. Na podstawie wzoru (3) otrzymujemy:

$$a_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{2} = n^2 - 2n + 2$$

Metodą indukcji zupełnej przekonujemy się, że pierwszym elementem n–tej grupy jest liczba $n^2 - 2n + 2$. Łatwo zauważyć, że grupa ta zawiera $2n - 1$ elementów, tworzących ciąg arytmetyczny pierwszego stopnia ($r = 1$). Stosując wzór (5) otrzymujemy:

$$s = \frac{2n-1}{2}\left[2\left(n^2 - 2n + 2\right) + (2n-2)\right] = (n-1)^3 + n^3.$$

Bibliografia

[1] Bryll, G., *Kilka uwag o postępach arytmetycznych wyższych stopni.* ZN WSP w Opolu, Matematyka 7 (1969), s. 23–37.

[2] Mostowski, A., Stark, M., *Elementy algebry wyższej.* PWN, Warszawa 1958.

[3] Lübsen, H., B., *Analysis.*, Leipzig 1922.

Grzegorz Bryll
Uniwersytet Opolski
ul. Oleska 48
45-052 Opole