Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka VII, Częstochowa 1999

Pewien sposób badania rozwiązalności równań z parametrem

Grzegorz Bryll, Grażyna Rygał

Badanie równań o jednej niewiadomej postaci $F(x,a)=0$, gdzie a jest parametrem, można zastąpić badaniem funkcji jednej zmiennej w postaci uwikłanej $F(x,y)=0$. Tak na przykład liczbę pierwiastków równań postaci: $a^x=ax, x^a=ax, a^x=x^a, a^x=\lg_a x$, można ocenić na podstawie wykresu funkcji $y=y(x)$, podanej odpowiednio w postaci uwikłanej: $y^x=xy, x^y=xy, y^x=x^y, y^x=\lg_y x$.

Badanie funkcji $y=f(x)$ w postaci uwikłanej $F(x,y)=0$ jest często prostsze niż bezpośrednie badanie odpowiedniego równania z parametrem. Wiadomo na przykład, że dla pewnych wartości parametru a równanie $a^x=\lg_a x$ ma trzy różne pierwiastki (zob. np. [1,2,3]), co jest trudne do zauważenia, gdy bada się punkty przecięcia wykresów funkcji $y=a^x$ i $y=\lg_a x$.

I. Równanie $a^x=ax (x>0, a>0)$.
Równanie to zastępujemy równaniem

(1) $y^x=xy\ (x>0,\ y>0)$

i sporządzamy wykres funkcji $y=y(x)$ podanej w postaci uwikłanej (1).

Na podstawie (1) otrzymujemy $x\ln y=\ln x+\ln y$, czyli $(x-1)\ln y=\ln x$.

Jeśli $x\neq 1$, to $\ln y=\frac{\ln x}{x-1}$, skąd

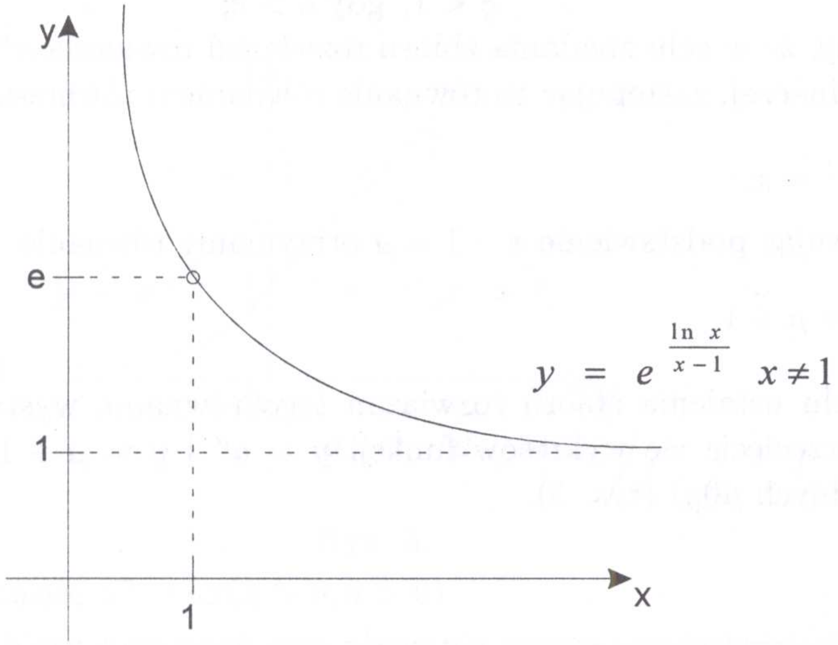
(2) $y=e^{\frac{\ln x}{x-1}}$

Jeśli $x=1$, to równanie (1) jest spełnione przez dowolną parę postaci $(1,y)$, gdzie $y>0$. Dla naszkicowania wykresu funkcji (2) wystarczy zbadać granice w punktach $0,1,+\infty$.

Mamy wtedy:

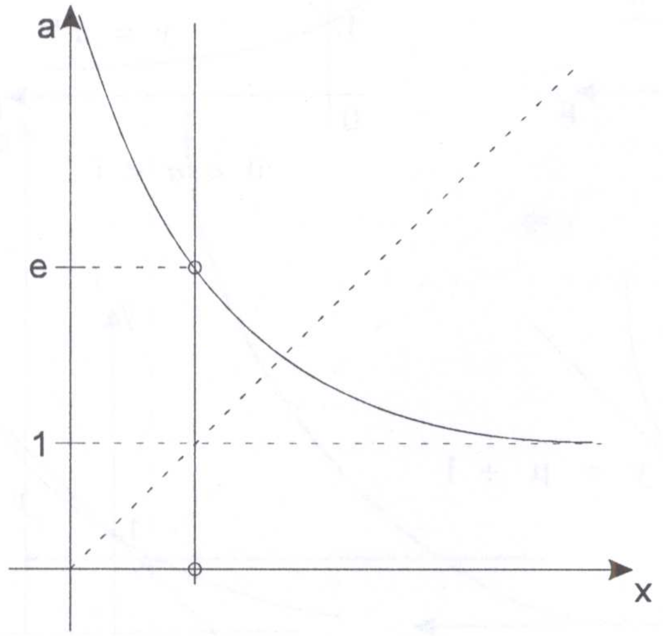
$$\lim_{x\to 0_+} y=e^{+\infty}=+\infty, \lim_{x\to 1} y=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}}=e, \lim_{x\to+\infty} y=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}}=e^0=1.$$

Funkcja (2) ma więc przebieg zmienności podany na rys. 1.



Rys. 1.

Kreśląc ponadto prostą o równaniu $x = 1$ możemy odczytać na podstawie rys. 2 liczbę pierwiastków równania $a^x = ax$ $(a > 0)$ w zależności od parametru a. Równanie to ma więc następujące liczby pierwiastków:



Rys. 2.

dokładnie jeden pierwiastek, gdy $0 < a \leq 1$ lub $a = e$;

dwa różne pierwiastki, gdy $1 < a < +\infty$, i $a \neq e$, przy czym:

$$x_1 = 1 \text{ i } x_2 = \xi, \quad \text{gdzie: } \xi > 1, \text{ gdy } 1 < a < e;$$
$$\xi < 1, \text{ gdy } a > e;$$

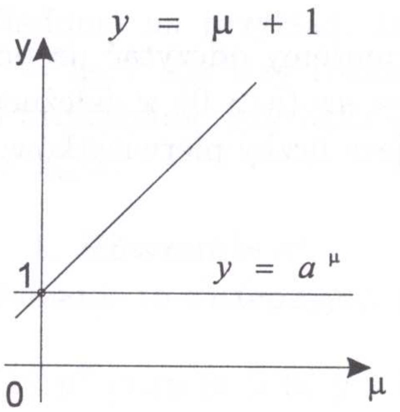
Zauważmy, że w celu zbadania zbioru rozwiązań równania $a^x = ax$ można postąpić inaczej, zastępując to równanie równaniem równoważnym

(3) $a^{x-1} = x$.

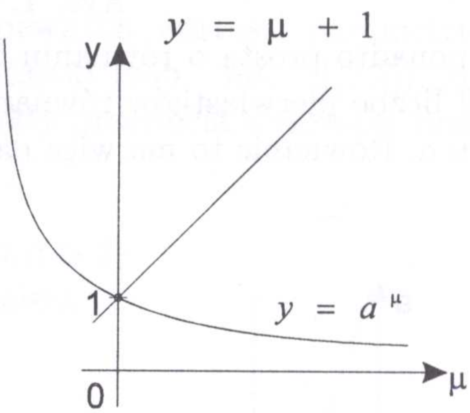
Stosując podstawienie $x - 1 = \mu$ otrzymamy równanie

(4) $a^{\mu} = \mu + 1$.

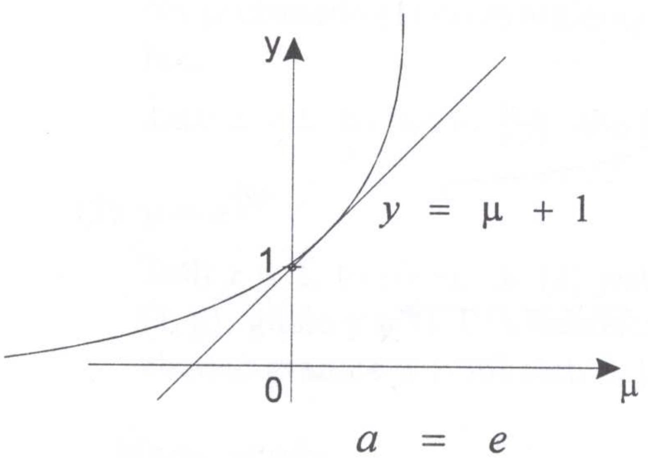
W celu ustalenia zbioru rozwiązań tego równania wystarczy zbadać punkty przecięcia się wykresów funkcji $y = a^{\mu}$ i $y = \mu + 1$ (w układzie współrzędnych $\mu 0 y$) (rys. 3).



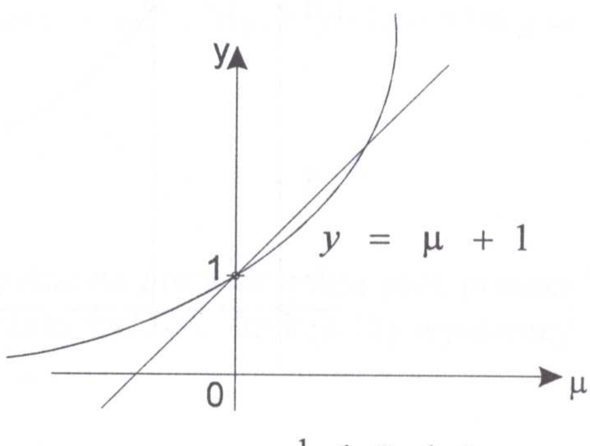
$a = 1$



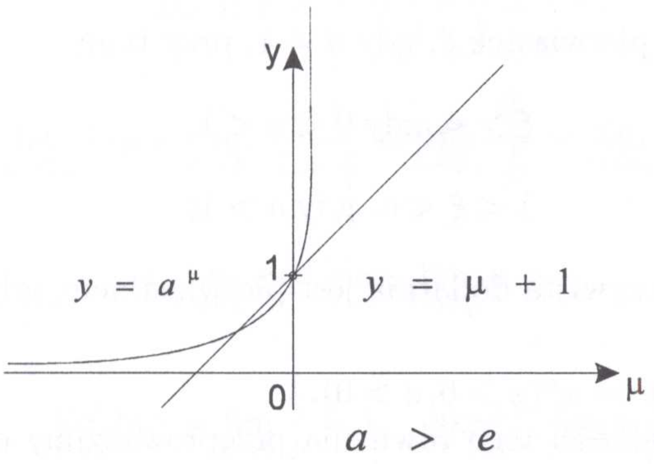
$0 < a < 1$



$a = e$



$1 < a < e$



Rys. 3.

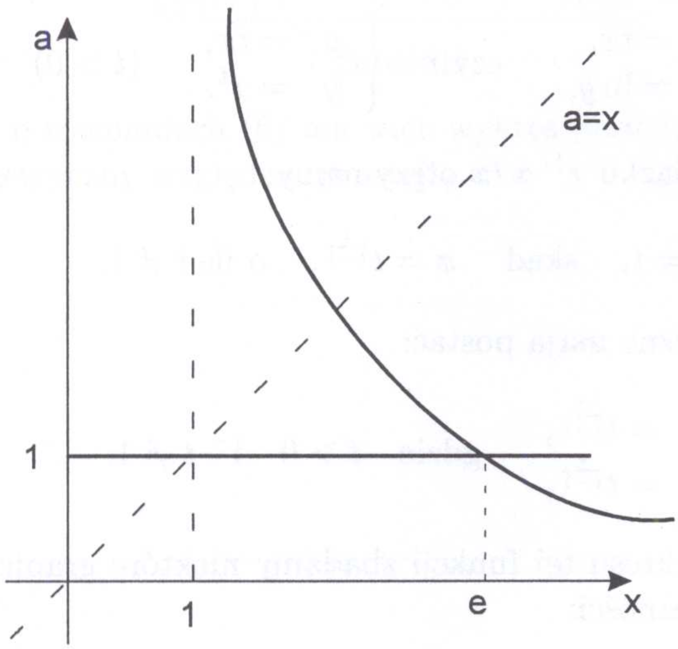
II. Równanie $x^a = ax (x > 0, a > 0)$.

Badanie zbioru rozwiązań tego równania można przeprowadzić w oparciu o równanie:

(4) $x^y = xy, (x > 0, y > 0)$.

Dla $y = a$ otrzymujemy równanie $x^a = ax$.

Równanie (4) można otrzymać z równania (1) stosując zamianę zmiennych. Tak więc dla otrzymania odpowiedniego wykresu wystarczy dokonać odbicia symetrycznego wykresu podanego na rys. 2 względem prostej $a = x$ (rys. 4).



Rys. 4.

Równanie $x^a = ax(x > 0, a > 0)$ ma więc następujące pierwiastki (odczytane na podstawie rys. 4):

— dokładnie jeden pierwiastek ξ, gdy $a \neq 1$; przy tym:

$$\xi > e, \text{ gdy } 0 < a < 1,$$

$$1 < \xi < e, \text{ gdy } a > 1;$$

— każda liczba rzeczywista dodatnia jest pierwiastkiem, gdy $a = 1$.

III. Równanie $a^x = x^a (x > 0, a > 0)$.

Dyskusję rozwiązalności tego równania przeprowadzimy opierając się na własnościach równania

$$x^y = y^x (x > 0, y > 0). \tag{5}$$

Zamiana zmiennych w tym równaniu nie zmienia jego postaci, tak więc zbiór $X = \{(x, y) : y = x \wedge x > 0\}$ jest pewnym zbiorem rozwiązań. Nie są to jednak wszystkie rozwiązania równania (5). Równanie (5) potraktujemy jako postać uwikłaną pewnej funkcji. Funkcję tę przedstawimy w postaci parametrycznej. Logarytmując obustronnie równanie (5) otrzymamy:

$$\ln x^y = \ln y^x, \quad \text{skąd} \quad y \ln x = x \ln y \quad \text{czyli} \quad \frac{y}{x} \ln x = \ln y.$$

Niech $\frac{y}{x} = t$. Otrzymamy więc:

$$\begin{cases} y &= tx, \\ t \ln x &= \ln y, \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} y &= tx, \\ y &= x^t. \end{cases} \quad (t > 0)$$

Wyznaczając x ze związku $x^t = tx$ otrzymamy:

$$x^{t-1} = t, \quad \text{skąd} \quad x = t^{\frac{1}{t-1}}, \quad \text{o ile } t \neq 1.$$

Równania parametryczne mają postać:

$$\begin{cases} x &= t^{\frac{1}{t-1}}, \\ y &= t^{\frac{t}{t-1}}, \end{cases} \quad \text{gdzie} \quad t > 0 \quad \text{i} \quad t \neq 1. \tag{6}$$

Dla naszkicowania wykresu tej funkcji zbadamy niektóre granice. Skorzystamy przy tym z zależności:

$$\ln x = \frac{\ln t}{t-1}, \quad \ln y = \frac{t \ln t}{t-1},$$

otrzymanych na podstawie (6). Mamy więc:

$$\lim_{t\to 0_+} \ln x = \lim_{t\to 0_+} \frac{\ln t}{t-1} = +\infty,$$

$$\lim_{t\to 0_+} \ln y = \lim_{t\to 0_+} \frac{\ln t}{1-\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0_+} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0_+} t = 0,$$

skąd

$$\lim_{t\to 0_+} x = +\infty, \lim_{t\to 0_+} y = 1.$$

Podobnie:

$$\lim_{t\to 1} \ln x = \lim_{t\to 1} \frac{\frac{1}{t}}{1} = 1, \quad \text{skąd} \quad \lim_{t\to 1} x = e,$$

$$\lim_{t\to 1} \ln y = \lim_{t\to 1} \frac{\ln t + 1}{1} = 1, \quad \text{skąd} \quad \lim_{t\to 1} y = e,$$

$$\lim_{t\to +\infty} \ln x = \lim_{t\to +\infty} \frac{\frac{1}{t}}{1} = 0, \quad \text{skąd} \quad \lim_{t\to +\infty} x = 1,$$

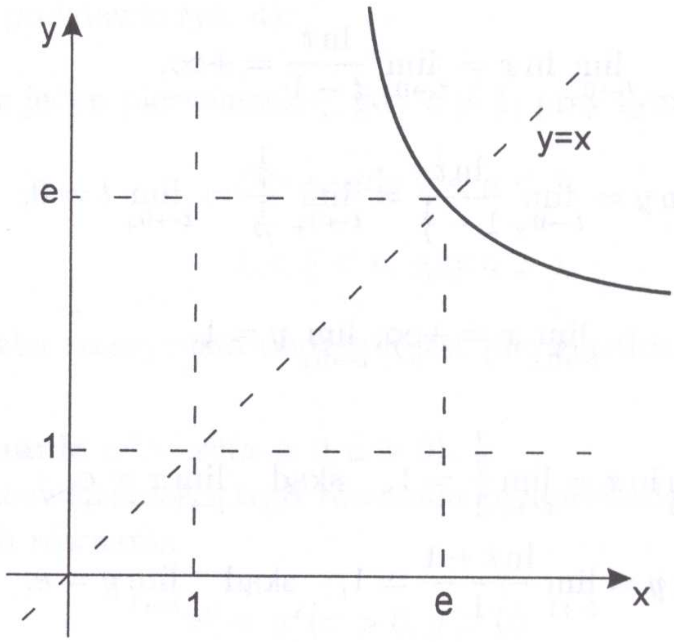
$$\lim_{t\to +\infty} \ln y = \lim_{t\to +\infty} \frac{\ln t + 1}{1} = +\infty, \quad \text{skąd} \quad \lim_{t\to +\infty} y = +\infty.$$

Wielkości x, y w zależności od parametru t zmieniają się następująco (tabela 1):

t	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\searrow$	1
$y(t)$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

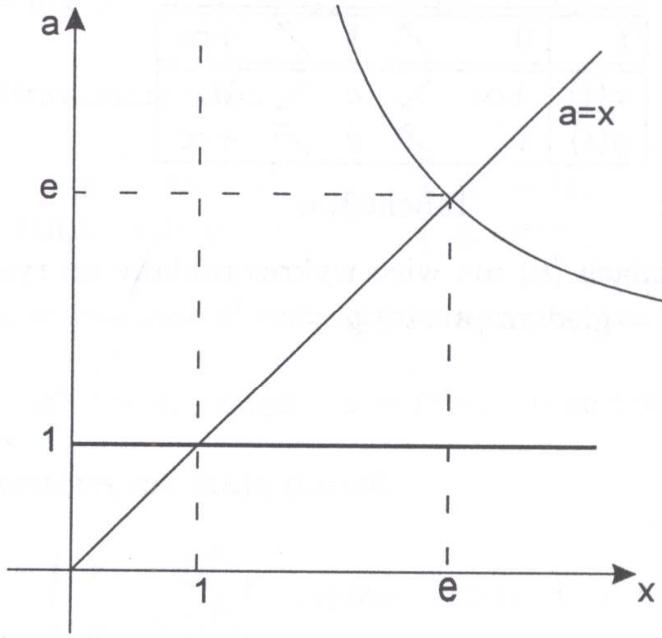
Tabela 1.

Funkcja o równaniach (6) ma więc wykres podany na rys. 5. Wykres ten jest symetryczny względem prostej $y = x$



Rys. 5.

Dodając zbiór rozwiązań X oraz przyjmując $y = a$ otrzymujemy wykres, którego punkty spełniają równanie $a^x = x^a (a > 0, x > 0)$ (rys. 6).



Rys. 6.

Równanie $a^x = x^a$ ma więc następujące liczby pierwiastków (odczytane na podstawie rys. 6):

— dokładnie jeden pierwiastek, gdy $0 < a \leq 1$ lub $a = e$,

— dwa różne pierwiastki, gdy $a > 1$ i $a \neq e$.

Rezultat powyższy można też otrzymać na innej drodze, badając przecięcie się wykresów funkcji $y = a^x$ i $y = x^a$, dla różnych wartości parametru $a (a > 0)$.

IV. Równanie $a^x = \lg_a x$ $(x > 0, a > 0, a \neq 1)$.

Równanie powyższe zastępujemy równaniem

$$z^x = \lg_z x, \quad \text{gdzie } z > 0, x > 0, z \neq 1. \tag{7}$$

Niech $z^x = y$, skąd $z = y^{\frac{1}{x}}$.
Równanie (7) przyjmuje więc postać $z^{z^x} = x$, czyli $z^y = x$, skąd

$$z = x^{\frac{1}{y}}. \tag{8}$$

Na podstawie (8) i związku $z = y^{\frac{1}{x}}$ otrzymujemy:

$$x^{\frac{1}{y}} = y^{\frac{1}{x}},$$

czyli

$$x^x = y^y. \tag{9}$$

Równanie powyższe spełniają pary (x, y) takie, że $y = x$. Ponadto równanie to nie zmieni się, gdy zamienimy rolę zmiennych. Tak więc wykres krzywej o równaniu (9) jest symetryczny względem prostej $y = x$.

Równanie (9) potraktujemy jako równanie pewnej funkcji uwikłanej $y = y(x)$ (o ile $y \neq x$). Logarytmując obustronnie równanie (9) otrzymujemy:

$$x \ln x = y \ln y, \quad \text{czyli} \quad \ln x = \frac{y}{x} \ln y.$$

Wprowadzimy parametr t za pomocą wzoru:

$$t = \frac{y}{x}. \tag{10}$$

Mamy wtedy:

$$\ln x = t \ln(tx), \quad \text{czyli} \quad \ln x = t(\ln t + \ln x),$$

skąd

$$\ln x = \frac{t}{1-t} \ln t \quad (\text{o ile} \quad t \neq 1).$$

Zatem

$$
(11) \qquad \begin{cases} x = t^{\frac{t}{1-t}}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{gdzie} \quad t > 0 \ \text{ i } \ t \neq 1, \\ y = tx = t^{\frac{1}{1-t}}. \end{cases}
$$

Dla naszkicowania krzywej o równaniach (11) napiszemy jej równania w postaci:

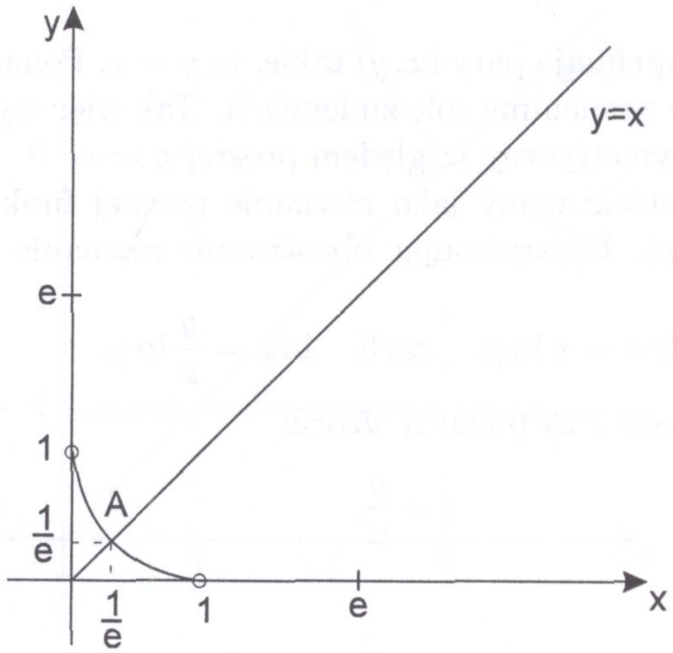
$$
\begin{cases} \ln x = \frac{t \ln t}{1-t}, \\ \qquad\qquad\qquad (t > 0 \quad \text{i} \quad t \neq 1), \\ \ln y = \frac{\ln t}{1-t}, \end{cases}
$$

Łatwo sprawdzić, że ze zmianą parametru t wielkości x, y zmieniają się następująco (tabela 2):

t	0	$\nearrow$		1		$\nearrow$	$+\infty$
x	1	$\searrow$	$\frac{1}{e}$		$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$		$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	1

Tabela 2.

Krzywa o równaniu (9) ma więc kształt podany na rys. 7.



Rys. 7.

Punkt A na rys. 7 ma współrzędne $A(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ (zob. tabelę 2). W celu zbadania liczby rozwiązań równania $a^x = \log_a x$ wystarczy zbadać punkty przecięcia się krzywej podanej na rys. 7 z krzywą wykładniczą $y = a^x$ (w układzie $0xy$).

Rozważmy dwa przypadki: $a > 1, 0 < a < 1$.

1.$\underline{a > 1}$.

Zbadamy najpierw sytuację, gdy prosta $y = x$ jest styczna do krzywej $y = a^x$. Spełniony jest wówczas warunek $(a^x)' = x'$, czyli $a^x \ln a = 1$. Stąd $a^x = \frac{1}{\ln a}$, czyli $x \ln a = -\ln\ln a$. Tak więc rozważane krzywe są styczne w punkcie

$$x_0 = -\frac{\ln\ln a}{\ln a}. \tag{12}$$

Parametr a możemy wyznaczyć z warunków $y = x_0$ i $y = a^{x_0}$, czyli z warunku $a^{x_0} = x_0$.

Mamy wtedy:

$$a^{-\frac{\ln\ln a}{\ln a}} = -\frac{\ln\ln a}{\ln a},$$

skąd otrzymujemy kolejno:

$$-\frac{\ln\ln a}{\ln a}\ln a = \ln\left(-\frac{\ln\ln a}{\ln a}\right), \ \ln(\ln a)^{-1} = \ln\left(-\frac{\ln\ln a}{\ln a}\right),$$

$$\frac{1}{\ln a} = -\frac{\ln\ln a}{\ln a}, \ \ln\ln a = -1.$$

Ostatecznie więc

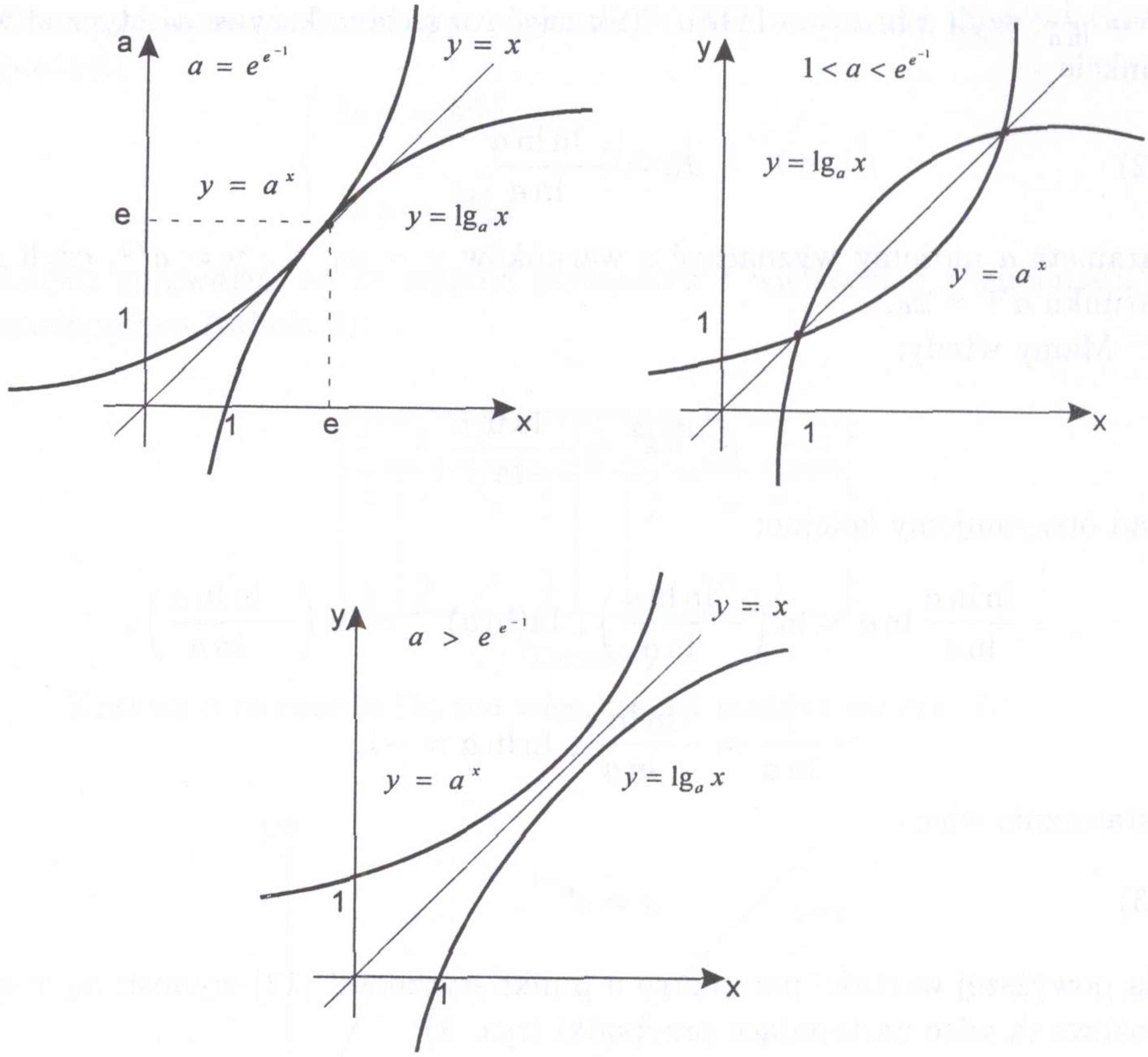
$$a = e^{e^{-1}}. \tag{13}$$

Dla powyższej wartości parametru a punkt styczności (12) wynosi: $x_0 = e$. Możliwe są więc następujące przypadki (rys. 8):

a) Krzywa $y = a^x$ jest styczna do prostej $y = x$, gdy $a = e^{e^{-1}}$. Wówczas równanie $a^x = \lg_a x$ ma dokładnie jeden pierwiastek.

b) Krzywa $y = a^x$ przecina prostą $y = x$ w dwóch punktach, gdy $1 < a < e^{e^{-1}}$. Wówczas równanie ma dwa różne pierwiastki.

c) Krzywa $y = a^x$ nie ma punktów wspólnych z prostą $y = x$, gdy $a > e^{e^{-1}}$. Równanie $a^x = \lg_a x$ nie ma wtedy rozwiązań.



Rys. 8

2. $0 < a < 1$.

Jeśli krzywa wykładnicza $y = a^x$ przechodzi przez punkt $A(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ (rys. 7), to $\frac{1}{e} = a^{\frac{1}{e}}$, skąd

$$a = e^{-e} \tag{14}$$

W punkcie A krzywe $y = \lg_a x$ i $y = a^x$ mają wspólną styczną, bowiem:

$$y_1' = \frac{1}{x \ln a}, \qquad y_2' = a^x \ln a,$$

$$y_1'(\tfrac{1}{e}) = -1, \qquad y_2'(\tfrac{1}{e}) = -1.$$

Rozważmy dwa przypadki:

a) $e^{-e} \leq a < 1$.

Dla powyższych wartości parametru a krzywa wykładnicza przecina jedynie prostą $y = x$. Tak więc równanie $a^x = \lg_a x$ ma dokładnie jeden pierwiastek.

b) $0 < a < e^{-e}$.

Znajdujemy najpierw punkt przecięcia krzywej $y = a^x$ z prostą $y = x$. Wtedy $a^{x_0} = x_0$, skąd $\frac{\ln x_0}{x_0} = \ln a < -e$ (gdyż $a < e^{-e}$). Mamy więc $\ln x_0 < -ex_0$. Niech $G(x) = \ln x + ex$. Funkcja G jest rosnąca (jako suma dwóch funkcji rosnących). Mamy ponadto:

$$G\left(\frac{1}{e}\right) = \ln e^{-1} + 1 = 0.$$

Jeśli $x < \frac{1}{e}$, to $G(x) < G(\frac{1}{e}) = 0$, gdyż G jest funkcją rosnącą. Wykres funkcji $y = a^x$ przecina więc prostą $y = x$ w punkcie x_0 i ponadto przecina krzywą $x^x = y^y$ w pewnym punkcie (x_1, y_1), poza prostą $y = x$. Z warunku $\frac{\ln x_0}{x_0} = \ln a$ mamy $a = x_0^{\frac{1}{x_0}}$. Punkt (x_1, y_1) przecięcia krzywej $x^x = y^y$ z krzywą wykładniczą $y = (x_0^{\frac{1}{x_0}})^x$ spełnia więc warunek:

$$\tag{15} \begin{cases} x_1 \ln x_1 & = y_1 \ln y_1, \\ \ln y_1 & = \frac{x_1}{x_0} \ln x_0. \end{cases}$$

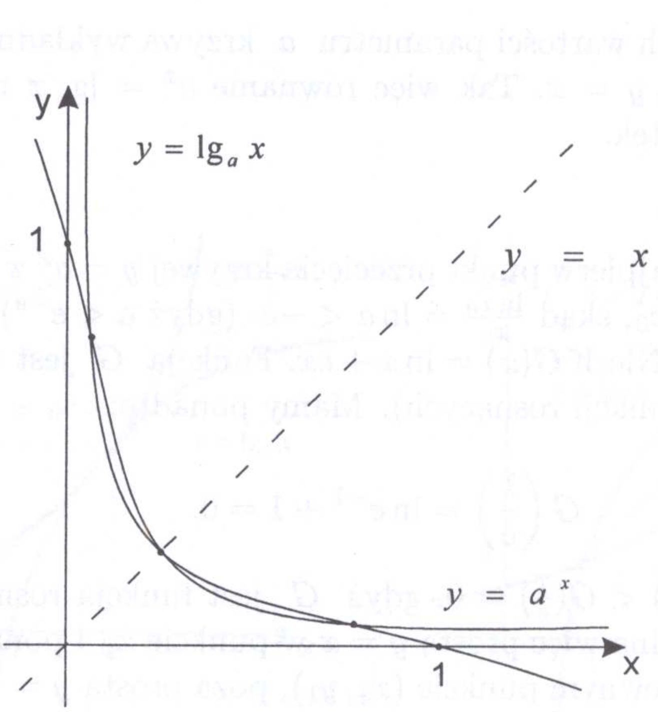
Zauważmy, że punkt (x_1, y_1) leży również na krzywej logarytmicznej $y = \lg_a x$, gdzie $a = x_0^{\frac{1}{x_0}}$.
Mamy bowiem:

$$y = \lg_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln x_0^{\frac{1}{x_0}}} = x_0 \frac{\ln x}{\ln x_0},$$

natomiast z warunku (15) poprzez dzielenie stronami otrzymujemy:

$$\frac{y_1 \ln y_1}{\ln y_1} = \frac{x_1 \ln x_1}{\frac{x_1}{x_0} \ln x_0}, \quad \text{czyli} \quad y_1 = x_0 \frac{\ln x_1}{\ln x_0}.$$

Tak więc punkt (x_1, y_1) leży na krzywych $y = a^x, y = \lg_a x$ i nie leży na prostej $y = x$. W przypadku $0 < a < e^{-e}$ krzywe $y = a^x$ i $y = \lg_a x$ przecinają się w trzech różnych punktach $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (y_1, x_1)$. Równanie $a^x = \lg_a x$ ma więc trzy różne pierwiastki (rys. 9).



Rys. 9.

Bibliografia

[1] Anusiak Z.: *Ile pierwiastków ma równanie* $a^x = \lg_a x$ *?* Matematyka – czasopismo dla nauczycieli, 4(1986), s. 227-233.

[2] Dybiec Z.: *Jeszcze o równaniu* $a^x = \lg_a x$. Matematyka – czasopismo dla nauczycieli, 6 (1987), s. 336-337.

[3] Wilenkin N.: *Tri točki, tri točki, tri točki ...*, Kwant 2 (1980), s. 48-50.

Grzegorz Bryll
Uniwersytet Opolski
ul. Oleska 48
45-052 Opole

Grażyna Rygał
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
al. Armii Krajowej 13/15
42-200 Częstochowa