Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka VII, Częstochowa 1999

Liczba relacji binarnych niektórych typów w zbiorze skończonym

Grzegorz Bryll, Ramona Wiora

Młodzież szkolna w czasie nauki w szkole podstawowej i średniej spotyka się z wieloma przykładami relacji binarnych, a także bada własności niektórych relacji. Między innymi ustala się własności następujących relacji:

$<$ – relacja mniejszości,

$\leq$ – relacja niewiększości,

$>$ – relacja większości,

$\geq$ – relacja niemniejszości,

$|$ – relacja podzielności w zbiorze liczb całkowitych,

$=$ – relacja równości w dowolnym zbiorze,

rl – relacja równoliczności w rodzinie zbiorów,

$\subseteq, \subset$ – relacje inkluzji (zawierania) i ostrej inkluzji (zawierania właściwego) w rodzinie zbiorów,

$\|, \perp$ – relacje równoległości i prostopadłości w zbiorze prostych na płaszczyźnie

$\equiv, \approx$ – relacje przystawania i podobieństwa w zbiorze figur na płaszczyźnie

Dla pełnego wyjaśnienia niektórych własności relacji celowe jest podawanie przykładów relacji, rozpatrywanych w zbiorze skończonym. Dobór tych przykładów nie jest trudny, gdy uświadomimy sobie jaka jest liczba relacji danego typu w zbiorze skończonym i w jaki sposób można je znajdować.

1. Rodzaje relacji binarnych w danym zbiorze.

Wśród relacji binarnych rozpatrywanych w danym zbiorze X wyróżnia się m. in. następujące rodzaje (typy)[1]:

a) relacja R jest *zwrotna* w $X \iff \forall_{a \in X}\ (aRa)$;

b) relacja R jest *przeciwzwrotna* w $X \iff \forall_{a \in X}[\sim (aRa)]$;

c) relacja R jest *symetryczna* w $X \iff \forall_{a,b \in X}(aRb \Rightarrow bRa)$;

d) relacja R jest *asymetryczna (przeciwsymetryczna)* w $X \iff \forall_{a,b \in X}[aRb \Rightarrow \sim (bRa)]$;

e) relacja R jest *antysymetryczna (na wpół przeciwsymetryczna)* w $X \iff \forall_{a,b \in X}(aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$;

f) relacja R jest *przechodnia* w $X \iff \forall_{a,b,c \in X}(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$;

g) relacja R jest *równoważnością* w $X \iff$ (R jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią w X);

h) relacja R jest *quasi-porządkiem* w $X \iff$ (R jest relacją zwrotną i przechodnią w X);

i) relacja R jest *porządkiem* w $X \iff R$ jest relacją zwrotną, antysymetryczną i przechodnią w X);

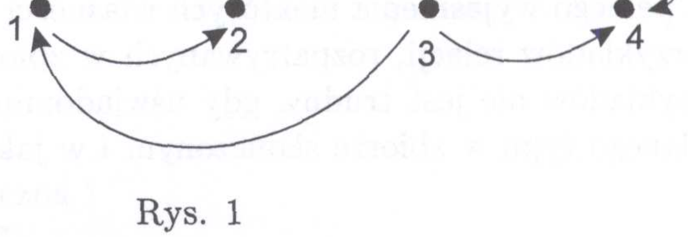
j) relacja R jest *spójna* w $X \iff \forall_{a,b \in X}[a \neq b \Rightarrow (aRb \vee bRa)]$;

k) relacja R jest *silnie spójna* w $X \iff \forall_{a,b \in X}(aRb \vee bRa)$.

Relację binarną R określoną w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ można ilustrować przy użyciu tablicy kwadratowej lub przy użyciu grafu.

Na przykład relacja $R = \{(1,2), (3,1), (4,2), (3,4), (4,4)\}$ rozpatrywana w zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$ ma następujące ilustracje (rys. 1):

R	1	2	3	4
1		+		
2				
3	+			+
4		+		+



Rys. 1

[1]Obszerne wiadomości o relacjach można znaleźć m. in. w pracach [1-8]. W niektórych z tych prac podane są również zadania dotyczące liczby relacji określonego typu.

Jeśli $(a,b) \in R$, to w odpowiedniej kratce tablicy umieszczamy znak „+"; jeśli zaś $(a,b) \notin R$, to w odpowiedniej kratce umieszczamy znak „−". W ten sposób przy pomocy tablicy kwadratowej możemy wyznaczyć liczbę relacji określonego typu w danym zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Zauważmy, że liczba wszystkich relacji binarnych w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest równa 2^{n^2}.

2. Liczba relacji zwrotnych.

Tablica dowolnej relacji zwrotnej, określonej w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ ma tę własność, że we wszystkich kratkach na głównej przekątnej występuje znak „+". Liczba wszystkich kratek tablicy, znajdujących się poza główną przekątną wynosi $n^2 - n$. W kratkach tych można umieścić znak „+" lub znak „−". Tak więc liczba relacji zwrotnych w zbiorze X jest równa liczbie $(n^2 - n)$- wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru dwuelementowego $\{+, -\}$. Liczba ta wynosi:

$$(1) \qquad 2^{n^2-n} \quad \text{czyli} \quad 2^{2\binom{n}{2}}.$$

3. Liczba relacji przeciwzwrotnych.

Tablica dowolnej relacji przeciwzwrotnej w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ ma we wszystkich kratkach na głównej przekątnej znak „−". Pozostałe kratki w liczbie $n^2 - n$ możemy zaopatrywać znakami „+", „−". Liczba relacji przeciwzwrotnych jest więc równa liczbie relacji zwrotnych i wynosi:

$$(2) \qquad 2^{n^2-n} \quad \text{czyli} \quad 2^{2\binom{n}{2}}.$$

4. Liczba relacji symetrycznych.

Tablica relacji symetrycznej w zbiorze $\{1, 2 \ldots, n\}$ ma tę własność, że znak „+" jest rozmieszczony symetrycznie względem głównej przekątnej. Umieszczenie znaku „+" w kratce nad główną przekątną powoduje, że znak ten (ze względu na symetrię) należy umieścić pod główną przekątną, symetrycznie względem tej przekątnej. Liczba kratek znajdujących się nad główną przekątną i na głównej przekątnej wynosi $\frac{1}{2}(n^2 - n) + n$, czyli $\frac{1}{2}(n^2 + n)$. Liczba relacji symetrycznych w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest więc równa liczbie $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ - wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru dwuelementowego $\{+, -\}$, czyli liczbie

$$(3) \qquad 2^{\frac{1}{2}(n^2+n)} \quad \text{czyli} \quad 2^{\binom{n+1}{2}}$$

Przy okazji zauważmy, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ można określić n^{n^2} różnych działań binarnych. Liczba działań binarnych przemiennych jest równa

$$n^{\frac{1}{2}(n^2+n)} \quad \text{czyli} \quad n^{\binom{n+1}{2}}.$$

5. Liczba relacji asymetrycznych.

Tablica dowolnej relacji asymetrycznej w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ ma następującą własność: jeśli w i–tym wierszu i w j–tej kolumnie tej tablicy występuje znak „+" (tj.: $(i, j) \in R$), to w j–tym wierszu i w i–tej kolumnie umieszczamy znak „$*$" dla zaznaczenia, że warunek $(i, j) \in R$ dla relacji asymetrycznej R implikuje warunek $(i, j) \notin R$.

We wszystkich kratkach na głównej przekątnej występuje znak „–", bowiem $(i, i) \notin R$, dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dla wyznaczenia liczby relacji asymetrycznych wystarczy wziąć pod uwagę jedynie kratki znajdujące się nad główną przekątną, bowiem rozmieszczenie znaków „+", „–", „$*$" nad główną przekątną determinuje odpowiednie rozmieszczenie pod główną przekątną. Symetria względem głównej przekątnej jest następująca:

znakowi + nad główną przekątną odpowiada znak „$*$" pod główną przekątną,

znakowi $*$ nad główną przekątną odpowiada znak „+" pod główną przekątną,

znakowi – nad główną przekątną odpowiada znak „–" pod główną przekątną.

Liczba kratek nad główną przekątną wynosi $\frac{1}{2}(n^2 - n)$, zatem liczba relacji asymetrycznych jest równa liczbie $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ - wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru $\{+, -, *\}$. Liczba ta wynosi:

$$(4) \qquad 3^{\frac{1}{2}(n^2-n)} \quad \text{czyli} \quad 3^{\binom{n}{2}}.$$

6. Liczba relacji antysymetrycznych.

Liczba wszystkich relacji antysymetrycznych o tej własności, że do relacji tych nie należą żadne pary uporządkowane o identycznych elementach, równa jest liczbie wszystkich relacji asymetrycznych.

Istnieją jednak relacje antysymetryczne, do których należą pary uporządkowane o identycznych elementach. Przy danym rozmieszczeniu znaków „+", „–", „$*$" we wszystkich kratkach tablicy, znajdujących się poza główną przekątną, można znaki „+", „–" rozmieścić w kratkach głównej przekątnej 2^n sposobami. Liczba wszystkich relacji antysymetrycznych wynosi więc:

$$(5) \qquad 2^n \cdot 3^{\frac{1}{2}(n^2-n)} \quad \text{czyli} \quad 2^n \cdot 3^{\binom{n}{2}}.$$

7. Liczba równoważności.

W celu wyznaczenia liczby wszystkich równoważności w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ przypomnimy najpierw związek pomiędzy równoważnościami w dowolnym zbiorze $X (X \neq \emptyset)$ i podziałami tego zbioru.

Jeśli R jest równoważnością w zbiorze X, to zbiór ilorazowy X/R, czyli zbiór klas abstrakcji wyznaczonych przez R i elementy zbioru X, jest podziałem zbioru X. Istotnie, zbiór $X/R = \{[a]_R : a \in X\}$ ma następujące własności:

$$\forall_{a \in X}([a]_R \neq \emptyset), \tag{6}$$

$$\forall_{a,b \in X}([a]_R \neq [b]_R \Rightarrow [a]_R \cap [b]_R = \emptyset), \tag{7}$$

$$\bigcup_{a \in X} [a]_R = X. \tag{8}$$

Na odwrót, dla dowolnego podziału P zbioru X relacja R_P określona wzorem:

$$aR_Pb \Longleftrightarrow \exists_{Z \in P}(a, b \in Z) \tag{9}$$

jest relacją typu równoważności w zbiorze X.

Tak więc badania równoważności w danym zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ można sprowadzić do badania podziałów tego zbioru.

Niech $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Liczbę p_n wszystkich równoważności w zbiorze X_n można określić indukcyjnie następująco:

$$\begin{cases} p_o = 1, \\ p_n = \binom{n-1}{0}p_o + \binom{n-1}{1}p_1 + \binom{n-1}{2}p_2 + \ldots + \binom{n-1}{n-1}p_{n-1}, \ n \geq 1. \end{cases} \tag{10}$$

Dla zbiorów $X_1, \ldots, X_5$ na podstawie (10) otrzymujemy:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 15, \quad p_5 = 52.$$

Podziały odpowiadające poszczególnym równoważnościom mają postać:

Zbiór	Liczba podziałów	Podziały	Razem liczba podziałów
X_1	$\binom{0}{0}p_o = 1$	$(\{1\})$	1
X_2	$\binom{1}{0}p_o = 1$	$(\{1,2\})$	2
	$\binom{1}{1}p_1 = 1$	$(\{1\},\{2\})$	
X_3	$\binom{2}{0}p_o = 1$	$(\{1,2,3\})$	5
	$\binom{2}{1}p_1 = 2$	$(\{1\},\{2,3\}), (\{2\},\{1,3\})$	
	$\binom{2}{2}p_2 = 2$	$(\{1,2\},\{3\}), (\{1\},\{2\},\{3\})$	
X_4	$\binom{3}{0}p_o = 1$	$(\{1,2,3,4\})$	15
	$\binom{3}{1}p_1 = 3$	$(\{1\},\{2,3,4\}), (\{2\},\{1,3,4\}), (\{3\},\{1,2,4\})$	
	$\binom{3}{2}p_2 = 6$	$(\{1\},\{2\},\{3,4\}), (\{1,2\},\{3,4\})$, $(\{1\},\{3\},\{2,4\}), (\{1,3\},\{2,4\})$, $(\{2\},\{3\},\{1,4\}), (\{2,3\},\{1,4\})$	
	$\binom{3}{3}p_3 = 5$	$(\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}), (\{1,2\},\{3\},\{4\})$, $(\{1,3\},\{2\},\{4\}), (\{1,2,3\},\{4\})$, $(\{1,2,3\},\{4\})$	

Wzór (10) można uzasadnić następująco:
dla $n = 1, 2$ wzór jest oczywisty. Załóżmy więc, że wzór ten jest prawdziwy dla wszystkich liczb naturalnych m, gdzie $1 \leq m \leq n$ i rozważmy zbiór $X_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Zamiast równoważności będziemy rozważać odpowiednie podziały. Z elementów zbioru $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ można utworzyć następujące zbiory jednoelementowe, dwuelementowe, $\ldots$, n–elementowe:

Liczba kombinacji

(11.1) $\{1\},\{2\},\ldots,\{n\};$ $\binom{n}{1}$

(11.2) $\{1,2\},\{1,3\},\ldots,\{n-1,n\};$ $\binom{n}{2}$

(11.3) $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\ldots,\{n-2,n-1,n\};$ $\binom{n}{3}$

....

(11.$n-1$) $\{1,2,\ldots,n-1\},\{1,3,\ldots,n\},\ldots,\{2,3,\ldots,n\};$ $\binom{n}{n-1}$

(11.n) $\{1,2,\ldots,n-1,n\};$ $\binom{n}{n}$

Dla otrzymania wszystkich podziałów zbioru X_{n+1} z wyjątkiem jednego wystarczy utworzyć wszystkie podziały zbiorów (11.1)-(11.n). Na podstawie założenia indukcyjnego liczba podziałów dla zbioru m-elementowego $(1 \leq m \leq n)$ wynosi:

$$p_m = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} p_i.$$

Każdy z utworzonych podziałów uzupełniamy o zbiór złożony z pozostałych elementów zbioru X_{n+1}. W ten sposób otrzymamy następującą liczbę podziałów zbioru X_{n+1}:

$$\binom{n}{1} p_1 + \binom{n}{2} p_2 + \ldots + \binom{n}{n} p_n.$$

Dodając podział $(\{1,2,\ldots,n,n+1\})$ otrzymamy wszystkie podziały zbioru X_{n+1}. Tak więc liczba wszystkich równoważności w zbiorze X_{n+1} wynosi:

$$p_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} p_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p_i,$$

co kończy dowód indukcyjny.

8. Liczba relacji silnie spójnych.

Zauważmy, że relacja silnie spójna jest zwrotna. Tak więc tablica relacji silnie spójnej ma tę własność, że we wszystkich kratkach na głównej przekątnej znajduje się znak „+”.

Jeśli w pewnej kratce tablicy relacji silnie spójnej, znajdującej się pod główną przekątną występuje znak „−”, to w kratce symetrycznej względem głównej przekątnej występuje znak „+” (z uwagi na warunek silnej spójności).

Liczba l_n relacji silnie spójnych w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ wyraża się wzorem:

$$l_n = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{j} 2^{s-j}, \quad \text{gdzie} \quad s = \frac{1}{2}(n^2 - n). \tag{12}$$

Wzór powyższy można uzasadnić następująco:

Jeśli pod główną przekątną tablicy dokładnie w j kratkach ($0 \leq j \leq \frac{n^2-n}{2}$) umieścimy znak „$-$" (a w pozostałych znak „$+$"), to nad główną przekątną w odpowiednich j kratkach należy umieścić znak „$+$" (ze względu na warunek silnej spójności), zaś w pozostałych $\frac{1}{2}(n^2 - n) - j$ kratkach można umieścić znaki „$+$" lub „$-$". Liczba sposobów rozmieszczenia znaku „$-$" w j kratkach pod główną przekątną wynosi $\frac{1}{2}\binom{n^2-n}{j}$, zatem liczba wszystkich relacji silnie spójnych wnosi wtedy

$$\left(\frac{1}{2}\binom{n^2-n}{j}\right) \cdot 2^{\frac{1}{2}(n^2-n)-j}.$$

Uwzględniając, że $j = 0, 1, \ldots, \frac{n^2-n}{2}$ otrzymamy wzór (12).

9. Liczba relacji spójnych.

O ile tablica relacji silnie spójnej ma tę własność, że we wszystkich kratkach na głównej przekątnej występuje znak „$+$", to w przypadku relacji spójnej w kratkach na głównej przekątnej mogą występować znaki „$+$" i „$-$". Na głównej przekątnej znaki te można rozmieśćić na 2^n sposobów.

Zatem korzystając ze wzoru (12) stwierdzamy, że liczba r_n wszystkich relacji spójnych w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ wynosi:

$$r_n = 2^n \cdot \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{j} 2^{s-j}, \quad \text{gdzie} \quad s = \frac{1}{2}(n^2 - n). \tag{13}$$

10. Liczba porządków liniowych.

Łatwo zauważyć, że liczba s_n relacji porządkowych w danym zbiorze skończonym $\{1, 2 \ldots, n\}$, spełniających warunek silnej spójności, jest równa liczbie permutacji tego zbioru. Zatem

$$s_n = n!$$

Bibliografia

[1] Flachsmeyer J.: *Kombinatoryka.* PWN, Warszawa 1974 (wyd. niem.: J.Flachsmeyer, Kombinatorik, Berlin 1969)

[2] Kuratowski K., Mostowski A.: *Teoria mnogości.* Wyd. 2, MM, t. 27, PWN, Warszawa 1966

[3] Marek W., Onyszkiewicz J.: *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach.* PWN, Warszawa 1972

[4] Mostowski A.: *Logika matematyczna.* MM, t. 18, Warszawa - Wrocław 1948

[5] Moszner Z.: *O teorii relacji,* Biblioteczka Matematyczna Nr 27, PZWS, Warszawa 1967

[6] Musielak J.: *Wstęp do matematyki.* PWN, Warszawa 1970

[7] Rasiowa H.: *Wstęp do matematyki współczesnej.* BM, t.30, PWN, Warszawa 1968

[8] Słupecki J., Hałkowska K., Piróg–Rzepecka K.: *Logika i teoria mnogości.* wyd. 2, PWN, Warszawa 1994.

Grzegorz Bryll
Uniwersytet Opolski
ul. Oleska 48
45-052 Opole

Ramona Wiora
Politechnika Częstochowska
ul. Dąbrowskiego 69
42-200 Częstochowa