Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka VII, Częstochowa 1999

Wykorzystanie idei odrzucania zdań w procesie dydaktycznym.

Grzegorz Bryll, Urszula Wlazłowska-Zając

W pracy dydaktycznej stosujemy przede wszystkim metody dowodzenia zdań prawdziwych (twierdzeń). Wydaje się, że na gruncie szkolnym, obok metody dowodzenia również metoda obalania (odrzucania) zdań może stanowić silne narzędzie uzasadniania (fałszywości zdań).

W szkole średniej obala się zwykle zdanie fałszywe przez podanie tzw. ,,kontrprzykładu".

Na przykład zdanie

$$\bigwedge_{x\in R}(x<1\Rightarrow x^2<1)$$

(gdzie R jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych) jest zdaniem fałszywym, gdyż dla $x=-5$ otrzymujemy zdanie falszywe

$$-5<1\Rightarrow 25<1$$

Zauważmy przy tym, że znajdowanie odpowiednich ,,kontrprzykładów" może okazać się zadaniem niełatwym.

Weźmy na przykład zdanie[1]

$$\bigwedge_{x\in N}(x^2+x+41 \quad \text{jest liczbą pierwszą}),$$

gdzie N jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych.
Zdanie to jest fałszywe, jednak podstawiając we wzorze

$$x^2+x+41$$

kolejne liczby naturalne $0,1,2,3,\ldots,39$ otrzymujemy zawsze liczbę pierwszą. Dopiero dla $x=40$ otrzymujemy liczbę złożoną.

Dowód przez odrzucanie miałby postać:

1. $\bigwedge_{x\in N}(x^2+x+41 \text{ jest liczbą pierwszą}),$ {zał.}

[1]Przykład powyższy pochodzi od Loeonarda Eulera (1707-1783).

2. $\bigwedge_{x \in N} [(x^2 + x + 41$ jest liczbą pierwszą)
$\Longrightarrow (x(x+1) + (40+1))$ jest liczbą pierwszą] {oczywiste}

3. $\bigwedge_{x \in N} [x(x+1) + (40+1)$ jest liczbą pierwszą] {1,2}

4. $40 \in N$ {oczywiste}

5. $40(40+1) + (40+1)$ jest liczbą pierwszą {3,4}

6. $(40+1)(40+1)$ jest liczbą pierwszą {5}

7. $41 \cdot 41$ jest liczbą pierwszą {6}

(0) Zdanie 7 jest fałszywe {7}
Zdanie 1 jest fałszywe {1 → (0)}

W powyższym dowodzie odrzucania w punkcie 3. skorzystaliśmy z następującej reguły rachunku kwantyfikatorów:

$$\bigwedge x[\varphi(x) \Leftrightarrow \Psi(x)],$$

$$\bigwedge_x \varphi(x)$$

$$\overline{\bigwedge_x \Psi(x).}$$

Metoda odrzucania zdań stosowana jest powszechnie w naukach empirycznych oraz w praktyce dochodzeniowej, jednak gruntowne badania nad teorią zdań odrzuconych zostały przeprowadzone dopiero niedawno.

W naukach empirycznych odrzuca się istniejącą hipotezę, o ile z hipotezy tej wynika choć jedno zdanie pozostające w sprzeczności z doświadczeniem. W czasie dochodzenia odrzuca się te wszystkie wersje określonego wypadku, które pozostają w sprzeczności z zebranym materiałem dowodowym, bądź też zawierają sprzeczności logiczne. Metodę odrzucania stosowano m.in. w procesach o dochodzenie ojcostwa, gdy nie znano jeszcze sposobu odczytywania informacji na podstawie kodu genetycznego.

Pojęcie odrzucania formuł znaleźć można już u Arystotelesa. Udowadniał on nie tylko prawdziwe formuły sylogistyczne, ale obalał błędne, przy tym przy obalaniu posługiwał się w zasadzie przykładami, niekiedy jednak stosował metodę sprowadzania pewnych błędnych form sylogistycznych do innych form, których błędność była widoczna lub została wcześniej wykazana (por. [5]).

Pojęcie odrzucania i koncepcja odrzucania zostały jednak wprowadzone na stałe do logiki dopiero pod koniec lat 30–tych przez Jana Łukasiewicza, chociaż pojęcie zdania odrzuconego zostało użyte po raz pierwszy już w pracy [6], opublikowanej w 1921 r. Badania nad pojęciem odrzucania były kontynuowane i rozwijane przez J. Słupeckiego oraz jego uczniów i współpracowników. Doprowadziły one m.in. do dowodu rozstrzygalności uogólnionej sylogistyki Arystotelesa [9], zdefiniowania funkcji odrzucania na gruncie teorii systemów dedukcyjnych A. Tarskiego [10], zbudowania teorii zdań odrzuconych [15], sformułowania twierdzeń o istnieniu aksjomatyk odrzuconych [1,2,7,13] oraz ustalenia związków pomiędzy Ł–rozstrzygalnością i rozstrzygalnością w zwykłym sensie [11].

Sformułujemy teraz definicję pojęcia dowodu odrzucania poprzedzając ją definicją „zwykłego" dowodu.

Pojęcie „zwykłego" dowodu jest omówione dokładnie w książce J. Słupeckiego i W. Pogorzelskiego „O dowodzie matematycznym", napisanej głównie z myślą o nauczycielach i uczniach [8]. Pojęcie to można zdefiniować na tyle ogólnie, by możliwe było dowodzenie nie tylko na gruncie dowolnego systemu aksjomatycznego, ale także na gruncie dowolnego zbioru przesłanek. Niekiedy przesłanek nie zaliczamy do aksjomatów lub twierdzeń danego systemu.

Definicja 1. (por. [8], s. 73). Dowodem wyrażenia α na gruncie zbioru wyrażeń X jest ciąg skończony wyrażeń

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n, \qquad (1 \leq k \leq n) \tag{1}$$

w którym $\alpha_n = \alpha$, wyrazy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są przesłankami, zaś dla każdego i takiego, że $k < i \leq n$ wyraz α_i wynika z wcześniejszych wyrazów ciągu (1).

Przesłankami dowodu mogą być te i tylko te wyrażenia, które są elementami zbioru X lub podstawieniami praw logicznych.

Zauważmy tutaj, że w definicji 1 jako zbiór X można przyjąć zbiór wszystkich aksjomatów i definicji pewnego systemu aksjomatycznego i wówczas otrzymuje się pojęcie dowodu danego wyrażenia α na gruncie tego systemu.
Pojęcie dowodu odrzucania definiujemy następująco:

Definicja 2. Ciąg

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \tag{2}$$

jest dowodem odrzucania wyrażenia α na gruncie zbioru Y wtedy i tylko wtedy, gdy

1. $\alpha_1 = \alpha$
2. $\alpha_n \in Y$

3. Ciąg (2) jest „zwykłym” dowodem wyrażenia α_n na gruncie wyrażenia α.

Jako zbiór Y można przyjąć zbiór wszystkich aksjomatów odrzuconych pewnego systemu aksjomatycznego i wówczas otrzymuje się pojęcie dowodu odrzucania zdefiniowane w pracy [16].

W logice rozważa się też inne pojęcia dowodu odrzucania, w definicjach których korzysta się z pojęcia reguły odrzucania. Reguły odrzucania zostały wprowadzone przez J. Łukasiewicza. Używał on reguły odrzucania przez podstawianie i reguły odrzucania przez odrywanie. Później posługiwano się też innymi regułami odrzucania (zob. [4,5,9,11,13,14]).

Ciąg $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będący dowodem odrzucania wyrażenia α na gruncie systemu aksjomatycznego z aksjomatyką odrzuconą A^{-1} posiada następującą własność: skoro przy pomocy tez danego systemu i reguł wnioskowania, z wyrażenia α daje się otrzymać wyrażenie α_n, to przy założeniu, że wyrażenie α_n jest fałszywe, wyrażenie α też musi być fałszywe. Gdyby bowiem wyrażenie α było prawdziwe, wówczas wnioskując na podstawie prawdziwych przesłanek przy pomocy niezawodnych reguł wnioskowania (tj. reguł prowadzących od wyrażeń prawdziwych do wyrażeń prawdziwych) otrzymywalibyśmy wyłącznie zdania prawdziwe, nie uzyskując wyrażenia fałszywego α_n.
Ciąg $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będący dowodem odrzucania wyrażenia α (zob. def. 2) proponujemy notować w postaci

1. α_1 {zał}
2. α_2

$\vdots$

n. α_n

(0) Zdanie α_n jest fałszywe
Zdanie α jest fałszywe {$1 \to (0)$}.

Wiersz oznaczony symbolem (0) nie należy do dowodu, informuje nas jednak, że w wierszu n otrzymaliśmy zdanie fałszywe. Ze zdania α wynika zdanie fałszywe (zdanie odrzucone) α_n.

Przykład

Przeprowadzić dowód odrzucania zdania „liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną”.

1. Liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną {zał.}
2. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, przy czym ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny (p, q liczby naturalne względnie pierwsze, $q > 1$) {1}
3. $2 = (\frac{p}{q})^2$ {2}

4. $2 = \frac{pp}{qq}$ {3}

5. Ponieważ ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny, więc ułamek $\frac{pp}{qq}$ o mianowniku $qq > 1$ jest nieskracalny. {2}

(0) Równość 4 jest fałszywa. {4,5}

Zdanie 1 jest fałszywe. {$1 \rightarrow (0)$}

W systemach z kwantyfikatorami odrzucanie wyrażeń fałszywych może być zastąpione dowodzeniem ich negacji. Możemy więc obalić zdanie fałszywe α dowodząc wyrażenia $\sim \alpha$. Ze względów dydaktycznych nie jest jednak celowe eliminowanie metody odrzucania wyrażeń poprzez zastąpienie jej metodą dowodzenia. W matematyce (w tym również i szkolnej) nie każde zdanie $\sim \alpha$, o tej własności, że α jest zdaniem fałszywym, pretenduje do roli twierdzenia. W formie twierdzeń ujmuje się tylko najbardziej istotne i możliwie najbardziej ogólne własności badanych pojęć.

W systemach bezkwantyfikatorowych (rachunek zdań, sylogistyka Arystotelesa) pojęcie odrzucania okazuje się istotne. Odrzucanie wyrażenia domkniętego nie jest równoważne dodaniu jego negacji do systemu. Świadczy o tym następujący przykład podany przez T. Prucnala (por. [15]).

W rachunku intuicjonistycznym tezami są następujące wyrażenia:

(a) $\sim (p \vee q) \Rightarrow \sim p \wedge \sim q$ (prawo de Morgana)

(b) $p \wedge \sim p \Rightarrow q$ (prawo przepełniania)

nie jest zaś tezą wyrażenie

(c) $p \vee \sim p$ (prawo wyłączonego środka).

Odrzucając następujące podstawienie prawa (c):

(d) $\bigwedge_x \varphi(x) \vee \sim \bigwedge_x \varphi(x)$

nie zmieniamy w ten sposób części „pozytywnej” systemu intuicjonistycznego. Gdybyśmy jednak dołączyli do systemu negację wyrażenia (d), czyli wyrażenie

$$\sim \left(\bigwedge_x \varphi(x) \vee \sim \bigwedge_x \varphi(x) \right),$$

wówczas wobec (a) i (b) otrzymalibyśmy dowolne wyrażenie. Rachunek intuicjonistyczny byłby więc systemem sprzecznym.

W systemach bez kwantyfikatorów możliwe jest obalenie wyrażeń fałszywych przez użycie aksjomatycznej metody odrzucania, o czym wspominaliśmy wprowadzając pojęcie dowodu odrzucania.

Na zakończenie tych rozważań zauważmy, że obalanie zdań fałszywych może okazać się niekiedy równie trudne, jak dowodzenie zdań prawdziwych.

Zdanie[2]

$$\bigwedge_{x\in N-\{0\}} \bigwedge_{y\in N} \left(991x^2 + 1 \neq y^2\right)$$

jest fałszywe, jednak najmniejszą liczbą naturalną x, dla której liczba $991x^2 + 1$ jest pełnym kwadratem, jest liczba

$$x = 12055735790331359447442538767.$$

Słynna hipoteza Fermata, że liczby postaci

$$2^{2^n} + 1, \qquad \text{(gdzie } n \in N)$$

są liczbami pierwszymi, została obalona przez Eulera, który wykazał, że liczba

$$2^{2^5} + 1 \text{ jest liczbą złożoną,}$$

gdyż

$$2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417.$$

Przez kilka stuleci absorbowało umysły wielu ludzi następujące zdanie, zwane wielkim twierdzeniem Fermata

$$\bigwedge_{x,y,z\in N-\{0\}} \bigwedge_{x\in N} (n > 2 \Rightarrow x^n + y^n \neq z^n)\,,$$

które uzasadnione zostało dopiero niedawno.[3]

Na podstawie doświadczenia w pracy dydaktycznej ze studentami możemy stwierdzić, że duże trudności natury logicznej występują przy dowodzeniu twierdzeń przez sprowadzanie do niedorzeczności (dowody nie wprost). Podamy pewne propozycje, które jak sądzimy, mogą złagodzić lub zniwelować te trudności.

Przypomnijmy, że założeniowy dowód nie wprost wyrażenia

$$\text{(I)} \qquad \Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3 \ldots \Rightarrow (\Phi_{n-1} \Rightarrow \Phi_n)\ldots))$$

tworzymy w następujący sposób (por. [12]):

1. Wypisujemy wyrażenia $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$, jako założenia twierdzenia (w $(n-1)$ pierwszych wierszach dowodu),

---

[2]Powyższe przykłady zostały zaczerpnięte z książki [3].

[3]W roku 1905 ustanowiona została nagroda za rozwiązanie hipotezy Fermata. Dowód twierdzenia Fermata podał Andrew Wiles w 1993 r., zaś luka w dowodzie uzupełniona została w 1994 r. Instytut Matematyczny Uniwersytetu w Getyndze w dniu 27.06.1997 przyznał Wilesowi nagrodę w wysokości 75 000 DM.

2. w n–tym wierszu wypisujemy wyrażenie $\sim \Phi_n$ jako założenie dowodu nie wprost;
3. Do dowodu wolno dołączyć:
   (a) nowe wiersze otrzymane na podstawie wierszy dotychczasowych według reguł logicznych,
   (b) twierdzenia poprzednio udowodnione.
4. Dowód jest zakończony, jeśli występują w nim dwa wiersze sprzeczne.

   Zakończenie dowodu zaznaczamy pisząc w ostatnim wierszu „sprz" (sprzeczność) i podając po prawej stronie numery dwóch wierszy sprzecznych.

Jeśli dowodzone twierdzenie nie ma postaci implikacji, to na początku twierdzenia występuje założenie dowodu nie wprost, będące w tym przypadku negacją dowodzonego twierdzenia.
Przypomnijmy też, że każdy dowód założeniowy wprost wyrażenia (I) daje się natychmiast przekształcić w założeniowy dowód nie wprost tego wyrażenia (zob. [12]).
Dla uproszczenia załóżmy, że dowodzone twierdzenie T ma postać implikacji[4]

(II) $$\Phi \Rightarrow \Psi$$

Schemat dowodu nie wprost jest następujący:

1. Φ {zał.}
2. $\sim \Psi$ {z.d.n.}

$\vdots$

$k.\ \alpha$

$\vdots$

$n.\ \sim \alpha$

Sprzeczność {k, n}

Dowód nie wprost wyrażenia (II) można zastąpić dowodem odrzucania wyrażenia

(III) $$\sim (\Phi \Rightarrow \Psi),$$

będącego negacją wyrażenia (II)[5]

[4]Wyrażenie (I) jest równoważne wyrażeniu $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \Phi_{n-1} \Rightarrow \Phi_n$, czyli wyrażeniu o postaci (II).

[5]Ogólniej zamiast dowodu nie wprost wyrażenia (II) podajemy dowód odrzucania wyrażenia sprzecznego z wyrażeniem (II).

Korzystamy też z następującej reguły logicznej negowania implikacji

$$\text{(NI)} \qquad \frac{\sim (p \Rightarrow q)}{p} \atop \sim q$$

Schemat dowodu odrzucania wyrażenia (III) jest następujący:

1. $\sim (\Phi \Rightarrow \Psi)$ {zał.}
2. Φ
3. $\sim \Psi$
$\vdots$
$k+1.\ \alpha$
$\vdots$
$n+1.\ \sim \alpha$
$n+2.\ \alpha \wedge \sim \alpha$

(0) Zdanie „$\alpha \wedge \sim \alpha$" jest fałszywe {oczywiste}
Zdanie „$\sim (\Phi \Rightarrow \Psi)$" jest fałszywe $\{1 \to (n+2), (0)\}$.

Podając dowód odrzucania wyrażenia (III) stwierdzamy tym samym, że wyrażenie to jest fałszywe. Prawdziwe jest więc wyrażenie (II).

Przykład.

Udowodnić twierdzenie: Jeżeli szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Dowód:

1. Nieprawda, że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ {zał.}
2. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ $\Big\}$ {1, reguła NI}
4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} [(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})] =$
$\lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}$ $\{2\}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ $\{4\}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ $\{3, 5\}$

(0) Zdanie „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$" jest fałszywe {oczywiste}
Zdanie 1 jest fałszywe $\{1 \to 6, (0)\}$.

Zdanie „Jeżeli szereg liczbowy $\sum_{n=1} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$" jest więc prawdziwe.

Bibliografia

[1] Bryll, G., Maduch, M., *Aksjomaty odrzucone dla wielowartościowych logik Łukasiewicza.* Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Opolu. Matematyka VI (1969), s. 3-17.

[2] Gniazdowski, A., *Nieistnienie skończonych pełnych układów aksjomatów odrzuconych dla pewnych logik zdaniowych.* Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Opolu. Matematyka XIII (1972), s. 123–129.

[3] Gołowin, L.J., Jagłom, J.M. *Indukcja w geometrii*, Moskwa 1961.

[4] Iwanuś B., *On Leśniewski's elementary ontology.* Studia Logica, 13 (1972), pp.73-125.

[5] Łukasiewicz, J., *O sylogistyce Arystotelesa.* Sprawozdania z czynności i posiedzeń PAU, 44 (1939). Zob. także: J. Łukasiewicz, Z zagadnień logiki i filozofii. Psima wybrane. PWN, Warszawa 1961, s. 220–227.

[6] Łukasiewicz, J., *Logika dwuwartościowa.* Przegląd Filozoficzny, 23 (1921), s. 189–205.

[7] Maduch, M., *O Łukasiewiczowskich regułach odrzucania.* Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Opolu. Matematyka XIII (1972), s. 115–121.

[8] Pogorzelski, W., Słupecki J., *O dowodzie matematycznym.* Biblioteczka Matematyczna Nr 11, PZWS, Warszawa 1962.

[9] Słupecki, J., *Z badań nad sylogistyką Arystotelesa.* Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego. Seria B, Nr 6. Wrocław 1948.

[10] Słupecki, J., *Funkcje Łukasiewicza.* Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Wrocławskiego Mat.–Fiz.–Astronom. seria B, Nr 3 (1959), s. 33–40.

[11] Słupecki, J., *Ł-rozstrzygalność.* Ruch Filozoficzny T 30, Nr 3–4 (1972), s. 305–307.

[12] Słupecki, J., Borkowski, I., *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, wyd. 2, PWN, Warszawa 1966.

[13] Słupecki, J., Bryll, G., *Proof of Ł–decidability of Lewis System S5.* Studia Logica, 32 (1973), pp. 99–107.

[14] Słupecki, J., Bryll, G., *O pojęciu rozstrzygalności w sensie Łukasiewicza.* Maszynopis referatu wygłoszonego na XXIII Konferencji Historii Logiki poświęconej twórczości J. Łukasiewicza, Kraków 22–24 kwietnia 1977 r.

[15] Słupecki, J., Bryll, G., Wybraniec–Skardowska, U., *Theory of rejected propositons.* Studia Logica. Part I - 29 (1971), pp 75–123, part II–3- (1972), pp. 97–145.

[16] Staszek, W., *On proofs of rejection.* Studia Logica, 29 (1971), pp 17–25.

Grzegorz Bryll
Uniwersytet Opolski
ul. Oleska 48
45-052 Opole

Urszula Wlazłowska-Zając
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
al. Armii Krajowej 13/15
42-200 Częstochowa