Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka VII, Częstochowa 1999

O dwóch metodach geometrycznych rozwiązywania zadań tekstowych

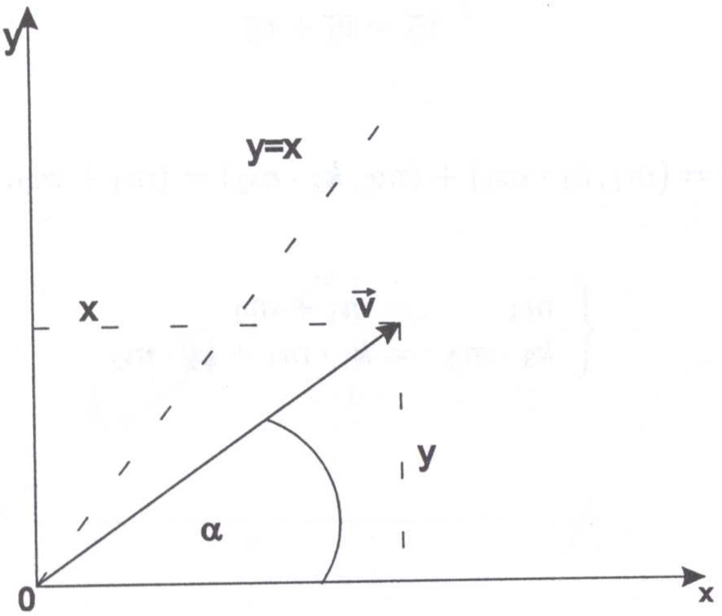
Grzegorz Bryll, Karolina Wojtal

Metodyka rozwiązywania zadań tekstowych stanowi jeden z istotnych elementów metodyki nauczania matematyki. Proponowanie uczniom różnych metod rozwiązywania tych samych zadań może przyczynić się do rozbudzenia zainteresowań matematyką, a także do przyswojenia różnych narzędzi badawczych. Wiadomo, że niejednokrotnie większą wartość przedstawia wybór sposobu rozwiązania niż samo rozwiązanie zadania. Pragniemy w zarysie przedstawić dwie, rzadko stosowane w praktyce szkolnej, metody geometryczne rozwiązywania zadań tekstowych: metodę wektorową i metodę figur równoważnych. W pierwszej z nich wykorzystuje się proste własności wektorów, zaś w drugiej- własności trójkątów przystających.

I. Metoda wektorowa rozwiązywania zadań dotyczących roztworów, mieszanin i stopów.

a) Wykorzystanie pojęcia stężenia.

Będziemy posługiwać się pojęciami roztworu i jego stężenia, bowiem w odniesieniu do mieszanin i stopów postępowanie jest podobne.
Roztwór o masie całkowitej x (kg) zawierający y (kg) substancji rozpuszczonej można interpretować na płaszczyźnie jako wektor $\overline{v}$ o współrzędnych x, y (rys. 1), tj. $\overline{v} = (x, y)$.



Rys. 1

Stężenie roztworu wyraża się wzorem:

1. $k = \frac{y}{x}$, przy czym $0 \leq k \leq 1$.

Masa substancji rozpuszczonej wynosi więc

2. $y = k \cdot x$.

Kąt α nachylenia wektora $\overline{v}$ do dodatniego kierunku osi OX spełnia warunek:

3. $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, gdyż $0 \leq k \leq 1$, czyli $0 \leq tg\alpha \leq 1$.

Dla $k > 1$ lub $k < 0$, wektor $\overline{v} = (x, k \cdot x)$ nie reprezentuje żadnego roztworu.

Jeśli $k = 0$ to wektor $\overline{v} = (x, 0)$ jest równoległy do osi $0X$. Reprezentujeon wówczas czysty rozpuszczalnik.

Jeśli $k = 1$ to wektor $\overline{v} = (x, x)$ jest równoległy do prostej $y = x$. Reprezentuje on wówczas czystą substancję.

Widzimy, więc, że każdemu roztworowi można przypisać odpowiedni wektor. Rzut tego wektora na osi OX daje informację o masie całkowitej roztworu, zaś rzut na osi OY – o masie substancji rozpuszczonej w rozpuszczalniku.

Jeżeli roztwory I i II są reprezentowane odpowiednio przez wektory:

$$\overline{v_1} = (m_1, k_1 \cdot m_1), \quad \overline{v_2} = (m_2, k_2 \cdot m_2),$$

to roztwór otrzymany przez zmieszanie tych roztworów jest reprezentowany przez wektor

$$\overline{v_3} = (m_3, k_3 \cdot m_3)$$

o własności (rys. 2):

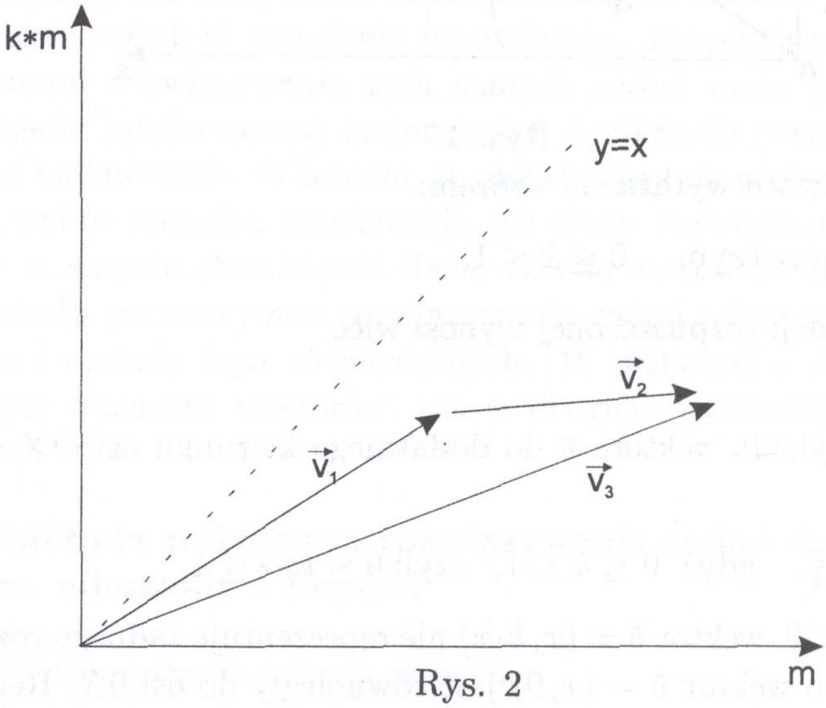
$$\overline{v_3} = \overline{v_1} + \overline{v_2}$$

czyli:

$$(m_3, k_3 \cdot m_3) = (m_1, k_1 \cdot m_1) + (m_2, k_2 \cdot m_2) = (m_1 + m_2, k_1 m_1 + k_2 m_2).$$

Stąd

$$\begin{cases} m_3 & = m_1 + m_2 \\ k_3 \cdot m_3 & = k_1 \cdot m_1 + k_2 \cdot m_2 \end{cases}$$

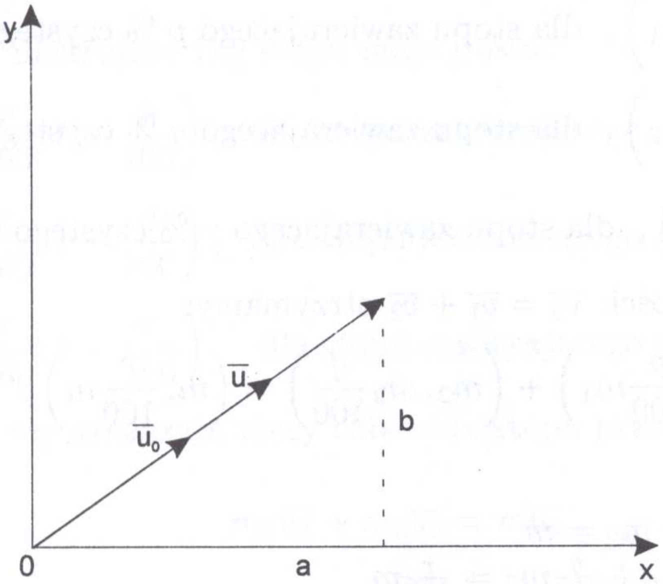


Rys. 2

b) Wykorzystanie pojęcia udziału.

Weźmy pod uwagę stop wykonany z dwu metali, w którym stosunek masy metalu II do masy metalu I wynosi $b : a$. Wówczas jeden kg stopu można interpretować jako wektor $\overline{u}$:

$$\overline{u} = \left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right)$$



Rys. 3

Wektor $\overline{u_o}$, gdzie

$$\overline{u} = \frac{1}{|\overline{u}|} \cdot \overline{u} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

jest wektorem jednostkowym, tj. $|\overline{v_o}| = 1$ (rys. 3). Stosunek $b : a$ wyraża tangens kąta, jaki tworzy wektor $\overline{u}$ z dodatnim kierunkiem osi $OX(\overline{u} \| \overline{u_o})$.

Jeśli w wyniku stopnienia dwóch stopów, w których stosunek masy metalu II do masy metalu I jest równy odpowiednio $b : a$ i $d : c$, otrzymamy nowy stop o masie całkowitej m i o stosunku mas $f : e$, to wektory charakteryzujące masę jednostkową (1kg) poszczególnych stopów mają postać:

$$\overline{u_1} = \left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b} \right), \quad \overline{u_2} = \left(\frac{c}{c+d}, \frac{d}{c+d} \right),$$

$$\overline{u_3} = \left(\frac{e}{e+f}, \frac{f}{e+f} \right),$$

zaś masa całkowita spełnia warunek:

$x\overline{u_1} + y\overline{u_2} = m\overline{u_3}$ dla pewnych x, y $\quad x > 0, y > 0$.

Przykład 1.

Stopione zostały dwa stopy zawierające odpowiednio p % i q % czystego złota. W wyniku stopienia otrzymano stop o masie m kg zawierający r % czystego złota. Obliczyć masę poszczególnych stopów przed stopieniem.

I sposób:

Oznaczymy masy stopów wyjściowych przez m_1 i m_2. Wtedy poszczególne stopy można interpretować jako wektory:

$$\overline{v_1} = \left(m_1, \frac{p}{100}m_1\right), \text{ dla stopu zawierającego } p \text{ \% czystego złota.}$$

$$\overline{v_2} = \left(m_2, \frac{q}{100}m_2\right), \text{ dla stopu zawierającego } q \text{ \% czystego złota.}$$

$$\overline{v_3} = \left(m, \frac{r}{100}m\right), \text{ dla stopu zawierającego } r \text{ \% czystego złota.}$$

Na podstawie zależności: $\overline{v_3} = \overline{v_1} + \overline{v_2}$ otrzymamy:

$$\left(m_1, \frac{p}{100}m_1\right) + \left(m_2, m_2\frac{q}{100}\right) = \left(m, \frac{r}{100}m\right),$$

stąd:

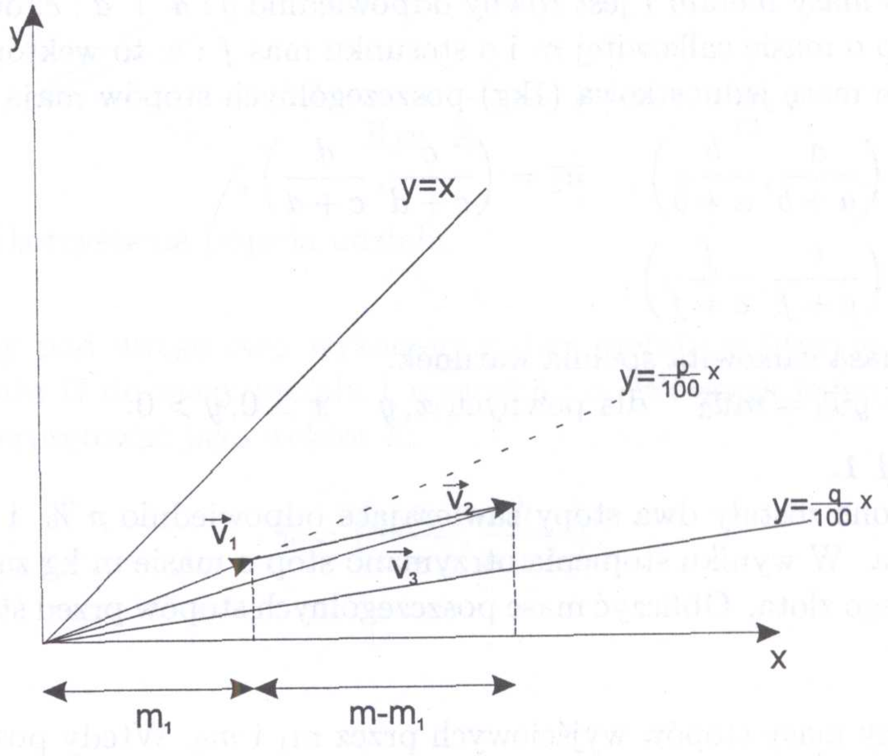
$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m \\ \frac{p}{100}m_1 + \frac{q}{100}m_2 = \frac{r}{100}m \end{cases}$$

czyli

$$m_1 = \frac{m(r-q)}{p-q}, \; m_2 = \frac{m(r-p)}{q-p}.$$

Rozwiązanie czysto geometryczne można otrzymać przedstawiając wektor $\overline{v_3}$ jako sumę dwóch wektorów $\overline{v_1}$ i $\overline{v_2}$ równoległych do prostych (rys. 4)

$$y = \frac{p}{100}x, \quad y = \frac{q}{100}x,$$



Rys. 4

II sposób.

Wektory ilustrujące 1kg stopu mają postać:

$\overline{u_1} = \left(\frac{p}{100}, 1 - \frac{p}{100}\right)$, dla stopu zawierającego $p\%$ czystego złota,

$\overline{u_2} = \left(\frac{q}{100}, 1 - \frac{q}{100}\right)$, dla stopu zawierającego $q\%$ czystego złota,

$\overline{u_3} = \left(\frac{r}{100}, 1 - \frac{r}{100}\right)$, dla stopu zawierającego $r\%$ czystego złota.

Niech m_1 i m_2 oznaczają masy całkowite stopu przed stopieniem. Mamy więc:

$$m_1\overline{u_1} + m_2\overline{u_2} = m\overline{u_3}$$

czyli:

$$m_1\left(\frac{p}{100}, 1 - \frac{p}{100}\right) + m_2\left(\frac{q}{100}, 1 - \frac{q}{100}\right) = m\left(\frac{r}{100}, 1 - \frac{r}{100}\right),$$

stąd:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \frac{p}{100} + m_2 \cdot \frac{q}{100} = m \cdot \frac{r}{100} \\ m_1\left(1 - \frac{p}{100}\right) + m_2\left(1 - \frac{q}{100}\right) = m\left(1 - \frac{r}{100}\right) \end{cases}$$

Po uproszczeniach powyższy układ przyjmuje postać:

$$\begin{cases} p\, m_1 + q\, m_2 = r\, m \\ m_1 + m_2 = m. \end{cases}$$

Otrzymujemy więc rozwiązanie:

$$m_1 = \frac{(m(r-q)}{p-q}, m_2 = \frac{m(r-p)}{q-p}.$$

II. Metoda figur równoważnych.

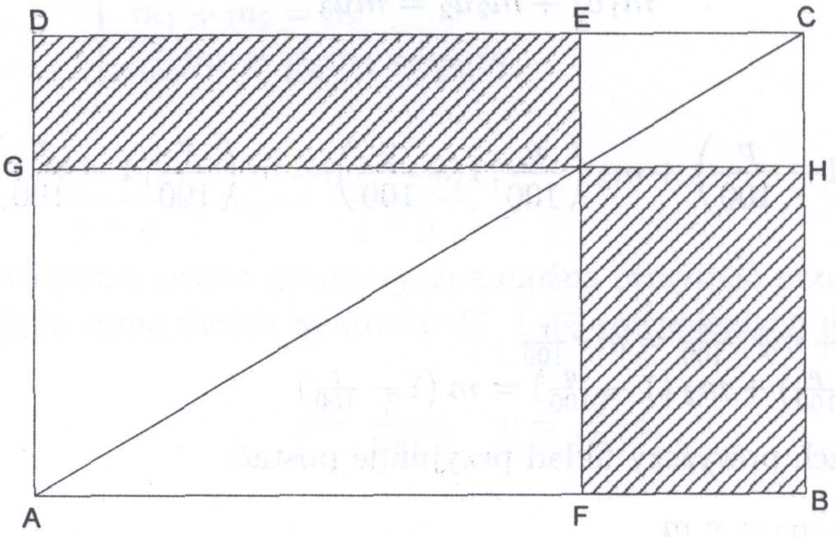
Jeżeli $c = a \cdot b$ i $a > 0$, $b > 0$, to wielkość c można interpretować jako pole prostokąta o długości boków a i b. Wiele zadań tekstowych występujących w szkole ma tę własność, że jedna z występujących tam wielkości jest iloczynem dwu innych wielkości.

Oto przykłady:

wielkość pracy = wydajność · czas trwania pracy,
cena towaru = cena jednostki towaru · liczba jednostek towaru,
długość drogi = wartość prędkości · czas,
wartość parcia = wartość ciśnienia · pole powierzchni

Przy rozwiązaniu zadań omawianego typu na drodze geometrycznej wystarcza znajomość znajomość zamiany danego prostokąta na prostokąt równoważny o danym boku. Korzystamy przy tym z następującego twierdzenia:

Twierdzenie:
Jeżeli przez dowolny punkt P przekątnej AC prostokąta $ABCD$ (rys. 5) poprowadzimy proste EF i GH takie, że $EF \| AD$ i $GH \| AB$, to otrzymane w ten sposób prostokąty $FBHP$ i $GPED$ są równoważne (mają równe pola).



Rys. 5

Twierdzenie powyższe można łatwo udowodnić w oparciu o przystawanie następujących par trójkątów:

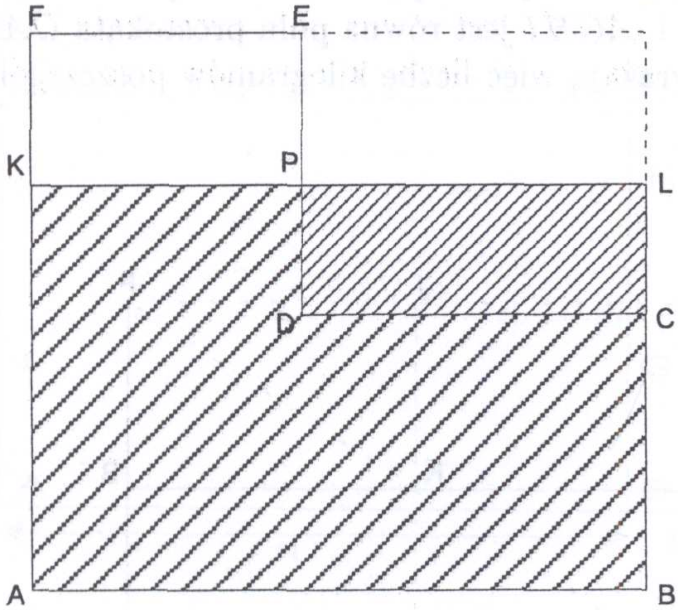
ΔABC i ΔADC;

ΔAFP i ΔAGP;

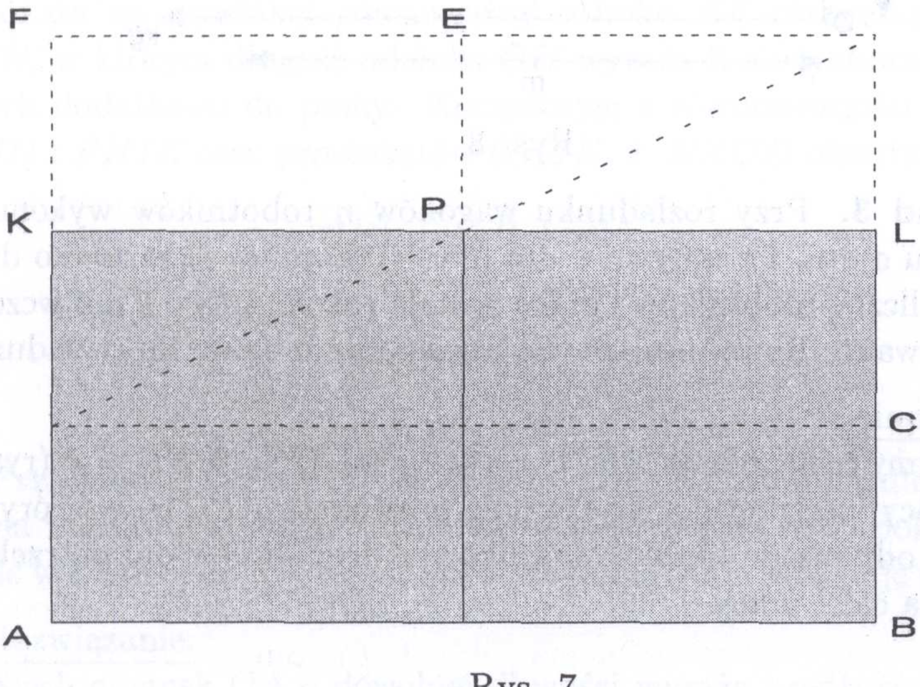
ΔPHC i ΔPEC.

Prostokąt $AFED$ można zamienić na prostokąt równoważny o danym boku AB wykorzystując następującą konstrukcję (rys. 5):
Przez punkt B prowadzimy prostą prostopadłą do boku AB i odkładamy na niej odcinek BC równy odcinkowi AD. Przez punkty A i C prowadzimy prostą AC, która przetnie bok EF w pewnym punkcie P. Punkt P wskazuje nam wysokość FP szukanego prostokąta o boku AB.
Dla otrzymania szukanego prostokąta wystarczy przez punkt P poprowadzić prostą GH, równoległą do boku AB. Prostokąt $ABHG$ jest równoważny danemu prostokątowi $AFED$. Powyższa konstrukcja może być wykorzystana do zamiany wielokąta $ABCDEF$, (rys. 6) na prostokąt równoważny

o boku AB oraz do zamiany prostokąta $ABLK$ (rys. 7) na dwa prostokąty o danych wysokościach AF i BC i sumie podstaw równej AB, których suma pól jest równa polu prostokąta $ABLK$.



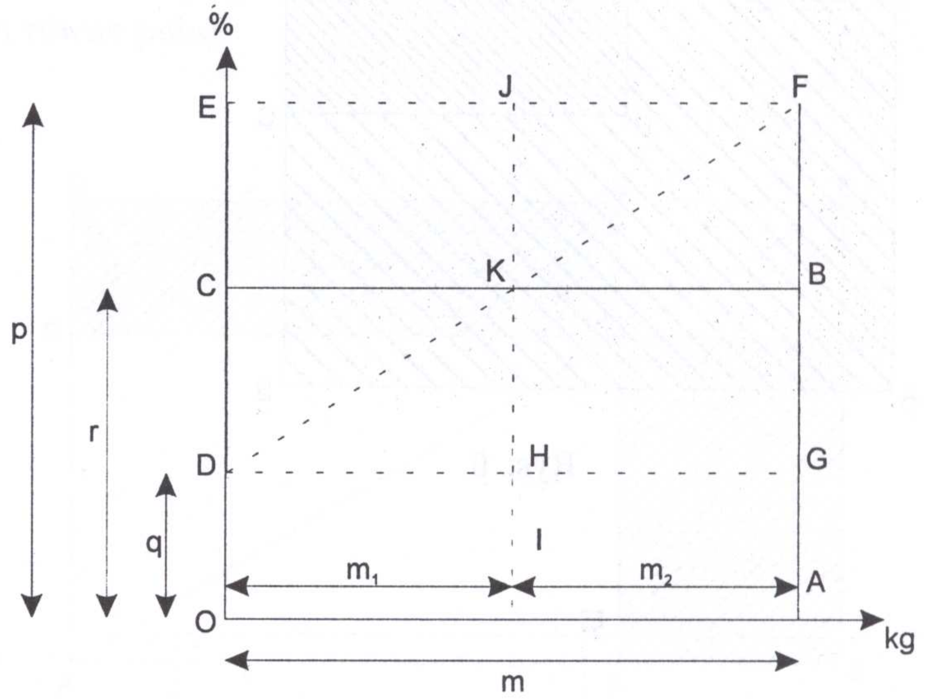
Rys. 6



Rys. 7

Przykład 2. Zadanie podane w przykładzie 1 rozwiążemy metodą figur równoważnych.

Pole prostokąta $OABC$ (rys. 8) wyraża masę czystego złota, zawartego w m kg stopu, otrzymanego w wyniku stopienia dwóch stopów. Prostokąt ten należy zmienić na dwa prostokąty o wysokościach OD i OE, które w sumie są równoważne danemu prostokątowi $OABC$. Przekątna DF prostokąta $DGFE$ dzieli ten prostokąt w ten sposób, że prostokąty $HGBK$ i $CKJE$ są równoważne czyli mają takie same pola. Zatem suma pól prostokątów $OIJE$ i $AGHI$ jest równa polu prostokąta $OABC$. Długość boków OI i IA wyrażają więc liczbę kilogramów poszczególnych stopów przed stopieniem.

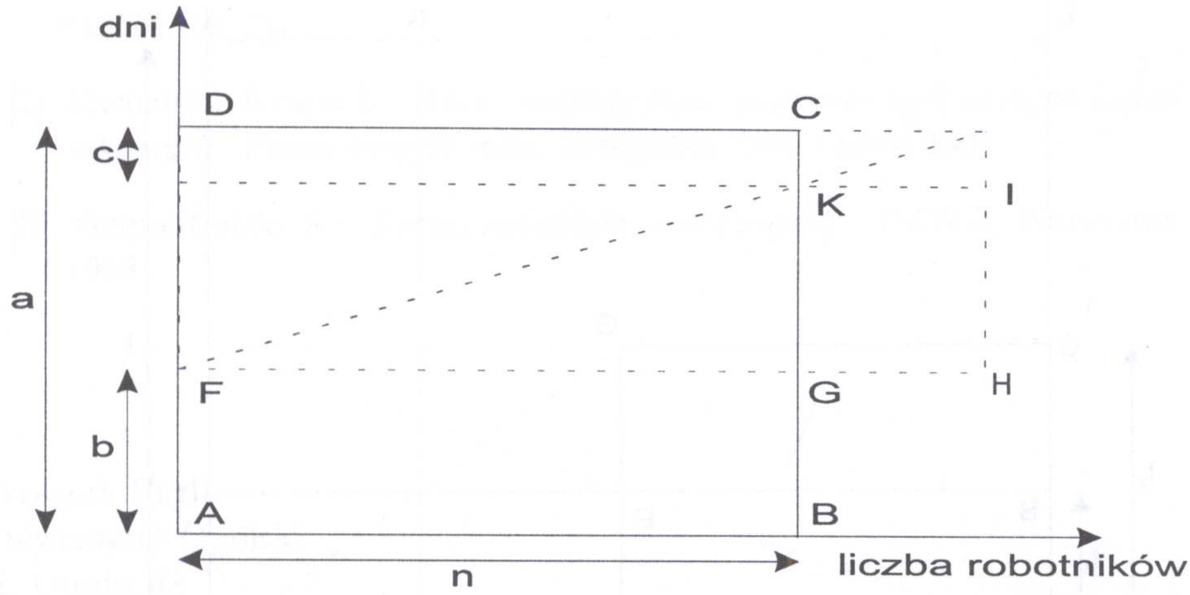


Rys. 8

Przykład 3. Przy rozładunku wagonów n robotników wykonuje tę pracę w ciągu a dni. Po upływie b dni ($b < a$) do pracy skierowano dodatkowo pewną liczbę robotników i praca została zakończona o c dni wcześniej niż przewidywano. Ilu robotników skierowano dodatkowo do rozładunku ?

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia: $AB = n$, $AD = a$, $AF = b$ $ED = c$ (rys. 9). Wielkość pracy interpretujemy jako pole prostokąta $ABCD$, w którym jeden z boków odpowiada liczbie robotników, a drugi liczbie dni potrzebnych do wykonania całej pracy.



Rys. 9

Ponieważ po upływie b dni ($b = AF$) liczba robotników wzrosła i praca została wykonania o c dni przed terminem, zatem po upływie b dni należało wykonanć pracę wyrażoną przez pole prostokąta $FHCD$. Po zamianie tego prostokąta na prostokąt równoważny o boku EF otrzymamy prostokąt $FKIE$, w którym długość odcinka GH wyraża liczbę robotników, skierowanych dodatkowo do pracy. Korzystając z równoważności prostokątów $FGCD$ i $FHIE$ oraz prostokątów $GHIK$ i $EKCD$ otrzymujemy:

$$|GH| \cdot [a - (b + c)] = n \cdot c,$$

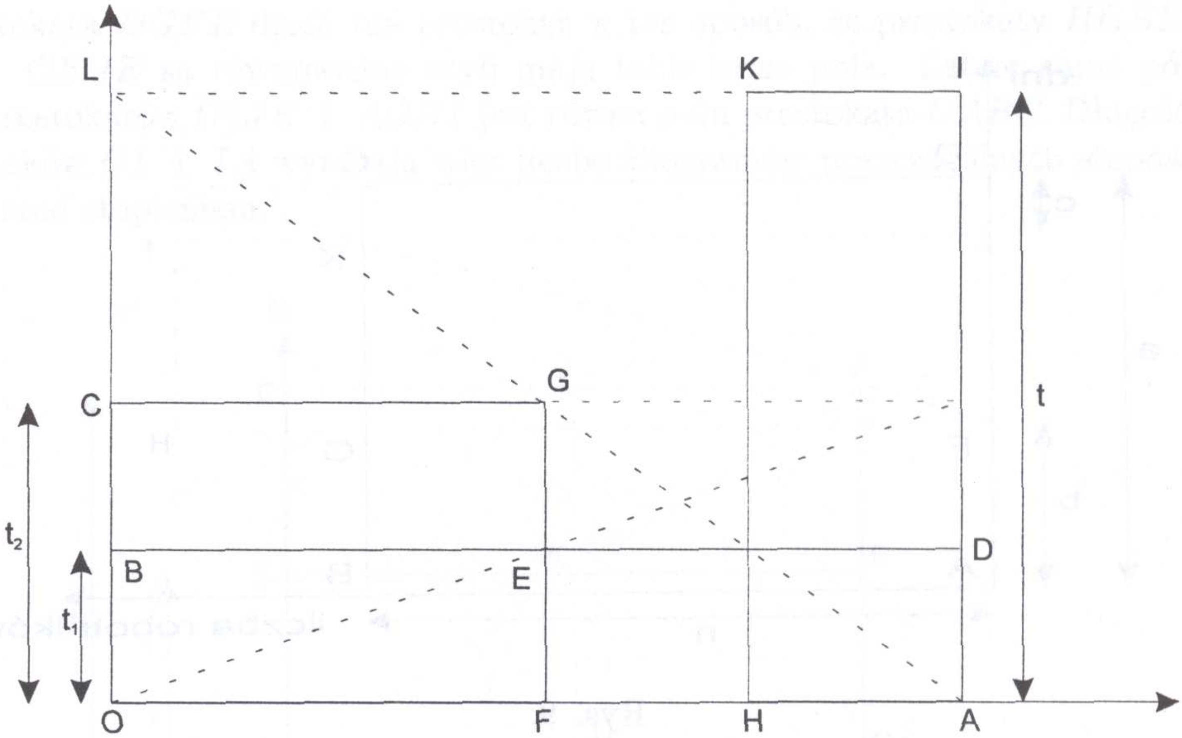
stąd:

$$|GH| = \frac{n \cdot c}{a - (b + c)}.$$

Przykład 4. Statek płynący z prądem rzeki pokonuje odległość między dwoma miastami w ciągu t_1 dni, zaś płynąc w górę rzeki pokonuje tę odległość w ciągu t_2 dni ($t_2 > t_1$). W jakim czasie woda pokonuje tę odległość ?

Rozwiązanie:

Niech odcinek OA o dowolnej długości wyraża prędkość równą sumie prędkości własnej statku i prędkości prądu rzeki. Niech ponadto $OB = t_1, OC = t_2$ (rys. 10).



Rys. 10

Pole prostokąta $OADB$ wyraża odległość między miastami. Zamieniając ten prostokąt na prostokąt równoważny o boku OC otrzymamy prostokąt $OFGC$, w którym bok OF wyraża prędkość równą różnicy prędkości własnej statku i prędkości prądu rzeki. Odcinek FA wyraża więc podwojoną prędkość prądu rzeki. Dzieląc ten odcinek punktem H na równe części i zamieniając prostokąt $OADB$ na prostokąt równoważny o boku HA otrzymamy prostokąt $HAIK$, w którym bok AI ($AI = OL$) wyraża szukany czas t. Korzystając z równoważności prostokątów $OADB$, $OFGC$ i $HAIK$ otrzymamy:

$$t \cdot HA = t_1 \cdot OA, \; t_1 \cdot OA = t_2 \cdot (OA - 2HA).$$

Obliczając z drugiego równania stosunek $\frac{OA}{HA}$ otrzymujemy:

$$\frac{OA}{HA} = \frac{2t_2}{t_2 - t_1}, \quad \text{zatem} \quad t = t_1 \cdot \frac{OA}{HA} = \frac{2t_1 t_2}{t_2 - t_1}.$$

Bibliografia

[1] Bryll G.: *O geometryzacji zadań matematycznych.* Matematyka 1 (1965), 59–77.

[2] Michalska–Krupa E.: *Różne metody rozwiązywania tych samych zadań szkolnych.* Praca magisterska. Biblioteka UO. Opole 1994.

[3] Neapolitański S.: *Zarys dydaktyki matematyki.* PZWS, Warszawa 1958.

Grzegorz Bryll
Uniwersytet Opolski
ul. Oleska 48
45-052 Opole

Karolina Wojtal
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
al. Armii Krajowej 13/15
42-200 Częstochowa