



Andrzej Roman, Maciej Drabik  
*Akademia im. Jana Długosza*  
Al. Armii Krajowej 13/15, 42-200 Częstochowa,  
e-mail: romanandrzej@poczta.fm

## WPLYW ZJAWISKA WYPIERANIA PRĄDU NA STRATY WYWOŁANE PRZEZ PRĄDY WIROWE W ANIZOTROPOWYCH MATERIAŁACH MAGNETYCZNYCH PRZY ODKSZTAŁCONYM PRZEBIEGU INDUKCJI

**Streszczenie.** W pracy określono straty wywołane przez prądy wirowe przy uwzględnieniu zjawiska wypierania prądu przy odkształconym przebiegu indukcji. W modelach anizotropowych materiałów magnetycznych Poliwanowa i Pry'a, Beana określono straty wywołane przez prądy wirowe, zakładając sinusoidalny przebieg strumienia. W praktyce często występują przypadki, że indukcja jest odkształcona. W pracy, wykorzystując model Poliwanowa, określono straty wywołane przez prądy wirowe przy odkształconym przebiegu indukcji. Odkształcony przebieg indukcji rozłożony został w szereg Fouriera i dla każdej harmonicznej określono przenikalność zespoloną i wartość strat.

**Słowa kluczowe:** anizotropowe materiały magnetyczne, straty z prądów wirowych, odkształcona indukcja

### Wstęp

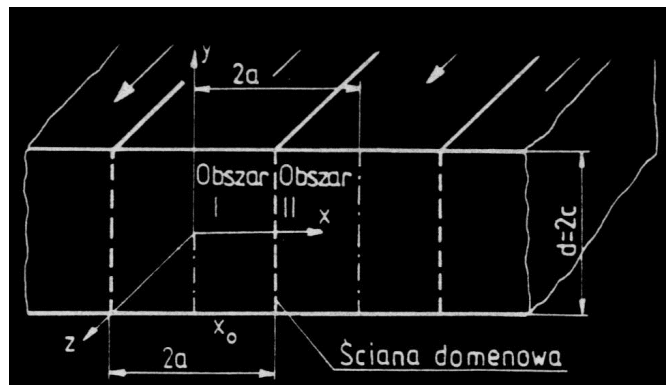
Zakłada się, że przebieg prądu oraz napięcia zasilającego jest sinusoidalny. Często jednak w praktyce zdarza się, że przebiegi prądu i napięcia nie są sinusoidalne. W przypadku, gdy występują odbiorniki nieliniowe, np. urządzenia elektroniczne, energoelektroniczne, przebiegi czasowe prądu i napięcia są odkształcone. Powszechność stosowania tych urządzeń powoduje, że problem przebiegów odkształconych stał się zjawiskiem powszechnym [1, 2]. Każdy okresowy przebieg niesinusoidalny można przedstawić zgodnie z analizą Fouriera w postaci sumy szeregu składowych sinusoid o różnych częstotliwościach.

W pracy określono, wykorzystując model Poliwanowa [3] elektrotechnicznej blachy anizotropowej, straty wywołane przez prądy wirowe przy od-

kształconym przebiegu indukcji. Przy dotychczasowych obliczeniach strat [3, 4, 5, 6] zakładano sinusoidalny przebieg indukcji i natężenia pola. W praktyce natomiast zdarza się, że indukcja jest odkształcona. Wykorzystując model i zależności na przenikalność zespoloną, podane przez Poliwanowa, określono dla każdej harmonicznej przenikalność zespoloną i wartość strat. Przyjęto założenia określone przez Poliwanowa, że wartość indukcji nie jest duża i w związku z tym wychylenie ściany nie jest duże. Wykorzystując zależność podaną w pracy [7], całkowitą wartość strat wywołanych przez prądy wirowe określono jako sumę strat mocy wywołanych przez poszczególne harmoniczne.

## Założenia

Przenikalność magnetyczną anizotropowej blachy elektrotechnicznej określono przy założeniu, że płaskie ściany Blocha rozdzielają domeny antyrównoległe (rys. 1). Szerokość domeny wynosi  $2a$  natomiast grubość blachy  $d = 2c$ .



Rys. 1. Przekrój modelu domenowego anizotropowej blachy elektrotechnicznej [4]

## Metoda rozwiązania równania przewodnictwa

Ze względu na znaczny wpływ zjawiska wypierania prądu na przenikalność zespoloną, zwłaszcza przy wyższych częstotliwościach, rozwiązano równanie przewodnictwa, które opisuje to zjawisko. Obliczenia wykonano dla przedstawionego poprzednio modelu wielodomenowego. W celu określenia zależności  $\bar{\mu} / \mu$  (gdzie  $\bar{\mu}$  jest szukaną przenikalnością zespoloną, a  $\mu$  przenikalnością przy niskiej częstotliwości, określoną jako początkowa, statyczna przenikalność) założono, że ściany domenowe poruszają się równoległe do po-

łożenia spoczynkowego, ich przemieszczenie nie jest duże i jest proporcjonalne do średniej wartości natężenia pola magnetycznego.

Natężenie pola magnetycznego wzdłuż ściany rozgraniczającej domeny zmienia się w miarę oddalania się od powierzchni blachy. Średnie natężenie pola można wyznaczyć, odejmując od wartości pola zewnętrznego całkę składowej  $y$  wektora gęstości prądu (całkowanej od  $y$  do  $c$ ):

$$H_{sr} = \frac{1}{c} \int_0^c \left[ H_0 + \int_y^c \gamma(E_x)_{x=a} dy \right] dy \quad (1)$$

stąd

$$H_{sr} = H_0 - \frac{\gamma}{c} \int_0^c \left[ \int_y^c \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x=a} dy \right] dy \quad (2)$$

Przenikalność zespolona określona jest wzorem:

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{H_{sr}}{H_0} \quad (3)$$

Natężenie pola (a ściślej jego składowa wzdłuż osi  $z$ ) w rozpatrywanym modelu spełnia równanie przewodnictwa:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \mu \mu_0 \gamma \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (4)$$

Uwzględniając, że  $H = H_z \exp(j\omega t)$ , otrzymano:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = j\omega \mu \mu_0 \gamma H_z \quad (5)$$

Zakładając  $H_z$  w postaci:

$$H_z = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} f_n(x) \cos \lambda_n y \quad (6)$$

i podstawiając je do równania (5), otrzymuje się:

$$f_n''(x) - (\lambda_n^2 + j\omega \mu \mu_0 \gamma) f_n(x) = 0 \quad (7)$$

Rozwiązanie można przedstawić jako:

$$f_n(x) = A_n \cosh \alpha_n x \quad (8)$$

gdzie:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{2c} \quad (9)$$

$$\alpha_n = \sqrt{\lambda_n^2 + j\omega\mu\mu_0\gamma} \quad (10)$$

Ostatecznie rozwiązanie równania (5) ma postać:

$$H_z = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \cosh \alpha_n x \cos \lambda_n y \quad (11)$$

Uwzględniając warunek

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{x=a} = \mu_0 B_s \frac{\partial x}{\partial t} \quad (12)$$

określono współczynnik  $A_n$ :

$$A_n = j \frac{8\omega a B_s \gamma \sin \frac{n\pi}{2}}{n\pi\alpha_n \sinh \alpha_n x} \quad (13)$$

Podstawiając obliczoną zależność  $H_z$  do wzoru (3), otrzymano:

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{1}{1 + j\omega a c \mu_0 \mu \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{32c \operatorname{tgh} \frac{a}{2c} \sqrt{n^2 \pi^2 + j4c^2 \omega \mu \mu_0 \gamma}}{n^2 \pi^2 \sqrt{n^2 \pi^2 + j4c^2 \omega \mu \mu_0 \gamma}}} \quad (14)$$

Wprowadzając do wzoru zależności na  $\theta$  i  $\delta$ , otrzymano:

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{1}{1 + j\theta^2 \delta \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{16c \operatorname{tgh} \delta \sqrt{n^2 \pi^2 + j\theta^2}}{n^2 \pi^2 \sqrt{n^2 \pi^2 + j\theta^2}}} = \mu_1 - j\mu_2 \quad (15)$$

### Określenie przenikalności przy odkształconym przebiegu indukcji

Aby określić przenikalność przy odkształconym przebiegu indukcji, zakłada się, że indukcja B określona jest wzorem

$$B = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} B_{k0} e^{j\alpha t} \quad (16)$$

$$B_{k0} = |B_{k0}| e^{j\varphi_k} \quad (17)$$

gdzie: k – numer kolejnej harmonicznej.

Dla każdej harmonicznej określa się wartość przenikalności zespolonej. Postępując podobnie jak w punkcie 3, określono wartości przenikalności zespolonej dla następujących harmonicznych:

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{1}{1 + j\theta^2 \delta \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{16kctgh\delta \sqrt{n^2\pi^2 + j\theta^2}}{n^2\pi^2 \sqrt{n^2\pi^2 + j\theta^2}}} = \mu_1 - j\mu_2 \quad (18)$$

### Straty z prądów wirowych przy odkształconym przebiegu indukcji

Straty wywołane przez prądy wirowe k-tej harmonicznej określone są zależnością:

$$P_{kw} = \frac{1}{\gamma} \int_V |\mathbf{j}_k|^2 dV \quad (19)$$

gdzie:  $\mathbf{j}$  jest wektorem gęstości prądu,  $\gamma$  jest konduktywnością, a V obszarem całkowania.

Uwzględniając zależność:

$$|\mathbf{j}_k|^2 = \mathbf{j}_k \circ \mathbf{j}_k^* = \gamma^2 \operatorname{grad} \Phi_k \circ \operatorname{grad} \Phi_k^* \quad (20)$$

oraz wykorzystując wzór (18):

$$B_{kss} B_{kss}^* = \frac{\bar{\mu}_k \circ \bar{\mu}_k^*}{\mu^2} |B_{k0}|^2 \quad (21)$$

można określić straty wywołane przez prądy wirowe przez każdą harmoniczną. Wykorzystując wzór na straty (19) oraz wykonując całkowanie po obszarze V, określono straty wywołane przez poszczególne harmoniczne:

$$P_{kw} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{64a^2 \omega^2 \gamma k^2}{n^2 \pi^2} \circ |B_{k0}|^2 \left\{ \operatorname{ctgh} \alpha_n a \left[ \frac{\lambda_n^2 + \alpha_n^2}{\alpha_n \lambda_n^2} \right] + \operatorname{ctgh} \alpha_n^* a \left[ \frac{\lambda_n^2 - \alpha_n^{2*}}{\alpha_n^* \lambda_n^2} \right] \right\} \quad (22)$$

W pracy [7] wykazano, że straty całkowite są sumą strat wywołanych przez poszczególne harmoniczne. Wykorzystując tę zależność, określono straty całkowite prądów wirowych.

## Wnioski

W pracy określono wpływ zjawiska wypierania prądu na straty wywołane przez prądy wirowe przy założeniu odkształconej indukcji, wykorzystując model Poliwanowa i obliczoną wartość przenikalności zespolonej (rozwiązanie równania przewodnictwa).

Straty można określić dla dowolnej harmonicznej dla arbitralnie przyjętych wartości indukcji. Metodę można wykorzystać dla określonego przebiegu odkształconego i określić wartość strat pochodzących od prądów wirowych.

## Literatura

- [1] Prauzner T., Ptak P.: Badanie czujników detekcji zagrożeń w systemach alarmowych, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 10/2013, s. 274–276.
- [2] Prauzner T.: Zakłócenia elektromagnetyczne w elektronicznych systemach alarmowych, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 12b/2012, s. 205–208.
- [3] Poliwanow K.M.: Dynamiczne charakterystyki ferromagnetików. *Izwestia Akademii Nauk 1952, Fizika XVI*, nr 4, s. 449–464.
- [4] Pry R.H., Bean C.P.: Calculation of the energy loss in magnetic sheet materials using a domain model. *Journal of Applied Physics* 1958, vol. 29, s. 532–533.

- [5] Alberts L., Bishop J.E.L., Lee E.W.: The behavior of ferromagnetic sheets in alternating electric and magnetic sheet, Proc. Roy. Soc. A 1963, 276, s. 112–124.
- [6] Roman A.: Pole elektromagnetyczne w materiałach magnetycznie miękkich o uporządkowanej strukturze domenowej, Wyd. Politechniki Częstochowskiej, seria: Monografie 36, 1996.
- [7] Gąsiorski A.: Straty mocy w dwóch długich walcowych przewodnikach umieszczonych w harmonicznym odkształconym poprzecznym polu magnetycznym, Rozprawy Elektrotechniczne, 1988, Warszawa 1989, t. XXXIV, z.1, s. 59–75.

Andrzej Roman, Maciej Drabik  
*Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie*

## **THE INFLUENCE OF THE SKIN EFFECT ON EDDY CURRENTS LOSSES IN ANISOTROPIC MAGNETIC MATERIALS WITH DEFORMED INDUCTION**

### **Abstract**

The work deals with calculating eddy current losses in anisotropic magnetic materials. When determining power losses in anisotropic materials using the Polivanov, Pry and Bean models, a sinusoidal magnetic flux is assumed. In practice, there occur cases when the induction is deformed. In this work we calculated losses from eddy currents using the Polivanov model of anisotropic magnetic metal plate and some other assumptions. The deformed induction response was expanded into a Taylor series and the complex permeability as well as the losses were calculated separately for each harmonic. The total losses are the sum of the losses for individual harmonics.

**Keywords:** anisotropic magnetic materials, eddy current losses, deformed induction.