Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka II, Częstochowa 1996

Podzbiory przybliżone zbiorów przybliżonych

Teresa Biegańska

Wstęp. Pojęcie zbioru przybliżonego zostało wprowadzone przez Z. Pawlaka [4]. W pracy [3] A.Obtułowicz przedstawił reprezentację zbiorów przybliżonych Z.Pawlaka przez pewne zbiory wartościowane algebrą Heytinga będącą 4- elementowym łańcuchem. Pojęcie zbioru wartościowanego algebrą Heytinga wprowadził D.Scott w 1972 roku w ramach badań modeli intuicjonistycznej teorii mnogości. D. Higgs w pracy [2] badał kategorie zbiorów wartościowanych algebrami Heytinga wykazując między innymi, że dla każdej zupełnej algebry Heytinga, kategoria zbiorów wartościowanych tą algebrą jest toposem oraz pokazując pewne przedstawienie krat podobiektów dla tego toposu. Rezultaty badań D. Higgsa i reprezentacja przedstawiona przez A. Obtułowicza były inspiracją do zbadania możliwości utworzenia kraty z podzbiorów przybliżonych zbioru przybliżonego. Niniejsza praca zawiera wyniki tych badań. W części pierwszej zostały omówione pewne pojęcia i wyniki zawarte w pracach [2], [3], [4]. W części drugiej przedstawione zostały własności zbioru wszystkich podzbiorów przybliżonych zbioru przybliżonego, czego końcowym efektem jest stwierdzenie, że zbiór ten tworzy algebrę Heytinga. Ponadto został podany warunek, przy którym algebra podzbiorów przybliżonych jest algebrą Boole'a.

1. Reprezentacja zbiorów przybliżonych przez zbiory wartościowane algebrą Heytinga

1.1. DEFINICJA. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze U. Podzbiór T zbioru U nazywamy *R-otwartym*, jeżeli spełniony jest warunek:

$$\forall_{x,y\in U}\ [x \in T \ \wedge\ xRy \Rightarrow y \in T].$$

Przyjmijmy oznaczenie $[x]_R = \{y \in \mathrm{U} : xRy\}$. Z przyjętej definicji wynika nstępujący lemat:

1.2. LEMAT. Jeżeli R jest relacją równoważności na zbiorze U to:

a) dla każdego $x \in$ U zbiór $[x]_R$ jest *R-otwarty*,
b) jeśli T jest *R-otwarty*, to U - T jest także *R-otwarty*,
c) dla dowolnej rodziny $(T_j : j \in J)$ zbiorów *R-otwartych* suma $\bigcup_{j\in J} T_j$ oraz przecięcie $\bigcap_{j\in J} T_j$ są również *R-otwarte.*

1.3. WNIOSEK. Para (U, τ_R), gdzie τ_R oznacza rodzinę zbiorów *R-otwartych* jest przestrzenią topologiczną.

1.4. DEFINICJA. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze U. Dla dowolnego $X \subseteq$ U zbiory:

$$\underline{A}_R(X) = \{x \in \mathrm{U} : [x]_R \subseteq X\},$$

$$\overline{A}_R(X) = \{x \in \mathrm{U} : [x]_R \cap X \neq \emptyset\},$$

$$Fr_R(X) = \overline{A}_R(X) - \underline{A}_R(X),$$

nazywamy odpowiednio *dolną aproksymacją, górną aproksymacją i ograniczeniem zbioru X w* U.

1.5. Z definicji 1.4. lematu 1.2. i wniosku 1.3. wynika, że jeżeli R jest relacją równoważności na zbiorze U, to dla dowolnego $X \subseteq$ U zbiory $\underline{A}(X)$, $\overline{A}(X)$, $Fr_R(X)$ są R - otwarte. Ponadto $\underline{A}(X)$ i $\overline{A}(X)$ można interpretować odpowiednio jako wnętrze i domknięcie zbioru X w przestrzeni topologicznej (U, τ_R).

1.6. Relacja równoważności R na zbiorze U wyznacza relację równoważności S na zbiorze P(U) wszystkich podzbiorów zbioru U, która dana jest warunkiem:

$$XSY \Leftrightarrow [\underline{A}_R(X) = \underline{A}_R(Y) \wedge \overline{A}_R(X) = \overline{A}_R(Y)]$$

lub równoważnie

$$XSY \Leftrightarrow [\underline{A}_R(X) = \underline{A}_R(Y) \wedge Fr_R(X) = Fr_R(Y)].$$

1.7. DEFINICJA. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze U oraz niech S będzie relacją równoważności na zbiorze P(U) zdefiniowaną w 1.6.. Każdą klasę równoważności względem relacji S, tzn. zbiór

$$[X]_S = \{Y \subseteq \mathrm{U} : XSY\}$$

nazywamy *zbiorem przybliżonym względem relacji R* lub krótko *zbiorem R - przybliżonym.*

1.8. TWIERDZENIE. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze U. Przyporządkowanie $[X]_S \mapsto (\underline{A}_R(X), Fr_R(X))$ jest bijekcją ze zbioru ilorazowego P(U)/S na zbiór C wszystkich uporządkowanych par (I,B) podzbiorów zbioru U, spełniających warunki:

(1) $I \cap B = \emptyset$,

(2) $I oraz B$ są zbiorami R - otwartymi,

(3) $\forall_{x \in B}\ \exists_{y \in B}\ [x \neq y \wedge xRy]$.

Dowód. Z lematu 1.2. wynika, że dla dowolnego podzbioru X zbioru U para $(I, B) = (\underline{A}_R(X), Fr_R(X))$ spełnia warunki (1) - (3). Z 1.6. wynika, że przekształcenie $\tau :\ P(\mathrm{U})/S \mapsto C$ przyporządkowujące zbiorowi przybliżonemu $[X]_S$ parę $(\underline{A}_R(X), Fr_R(X))$ jest dobrze określone oraz jest iniekcją.

Pokażemy , że τ jest również suriekcją. Niech $(I, B) \in C$. Przyjmijmy $X = I \cup M$, gdzie M jest dowolnym zbiorem o właściwościach:

(m_1) $M \subseteq B$,

(m_2) $\forall_{x \in B} \exists_{y \in B}\ [xRy \wedge y \in M]$.

Taki zbiór istnieje na podstawie warunku (3). Zauważamy, że $\underline{A}_R(X) = I$. Istotnie, jeśli $x \in \underline{A}_R(X)$, to $x \in X$ na podstawie (m_2), a jeśli $x \in I$, to $[x]_R \subseteq I \subseteq X$, na podstawie (2). Podobnie sprawdzamy, że $Fr_R(X) = B$. Dowód twierdzenia jest zakończony.

Na podstawie twierdzenia 1.8. zbiór przybliżony możemy traktować jako uporządkowaną czwórkę $Z = (U, R, I, B)$, gdzie R jest relacją równoważności na zbiorze U i para (I, B) spełnia warunki (1), (2), (3).

1.9. DEFINICJA. Niech $\mathcal{A} = (/\mathcal{A}/, \leq, \wedge, \vee, \to, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ będzie zupełną algebrą Heytinga (symbol $/\mathcal{A}/$ oznacza tu zbiór podkładowy algebry). *Zbiór wartościowany algebrą Heytinga* $\mathcal{A}$, lub krótko $\mathcal{A}$ *- zbiór* (por. [2]), jest to uporządkowana para $U = (\mathrm{U}, \sigma)$ taka, że U jest zbiorem i $\sigma :\ \mathrm{U} \times \mathrm{U} \to /\mathcal{A}/$ jest odwzorowaniem spełniającym następujące warunki:

(i) $\forall_{x,y \in U}\ \ \sigma(x, y) = \sigma(y, x)$,

(ii) $\forall_{x,y,z \in U}\ \ \sigma(x, y) \wedge \sigma(y, z) \leq \sigma(x, z)$.

1.10. Intuicyjny sens definicji 1.9. jest następujący: dla danych elementów x, y zbioru U element $\sigma(x,y)$ algebry Heytinga A określa, w jakim stopniu element x jest równy elementowi y. Wobec tego warunek (i) mówi, że element x jest równy elementowi y w takim samym stopniu , w jakim y jest równy elementowi x. Z kolei warunek (ii) możemy wyrazić następująco: jeżeli x jest równy y w stopniu n_1, a y jest równy z w stopniu n_2, to x jest równy z w stopniu co najmniej $min\{n_1, n_2\}$.

1.11. DEFINICJA. Niech $\Re_4 = (/\Re_4/, \leq, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \rightarrow)$ będzie zupełną algebrą Heytinga, gdzie $/\Re_4/ = \{0,1,2,3\}$, $\leq$ jest naturalnym porządkiem, $\mathbf{0} = 0, \mathbf{1} = 3$, $a \wedge b = min\{a,b\}$, $a \vee b = max\{a,b\}$, $a \rightarrow b = \mathbf{1}$, jeśli $a \leq b$ i $a \rightarrow b = b$ w pozostałych przypadkach, dla $a, b \in \{1,2,3\}$. *$R\Re_4$ – zbiorem* nazywamy $\Re_4$ - zbiór $U = (\mathrm{U}, \sigma)$ spełniający następujące warunki:

(R_1) $\forall_{x \in U}\ 1 \leq \sigma(x,x)$,

(R_2) $\forall_{x,y \in U}\ [2 \leq \sigma(x,y) \Rightarrow x = y]$,

(R_3) $\forall_{x,y \in U}\ [\sigma(x,y) = 1 \Rightarrow \sigma(x,x) = \sigma(y,y)]$,

(R_4) $\forall_{x \in U}\ [\sigma(x,x) = 2 \Rightarrow \exists_{y \in U}\ \sigma(x,y) = 1]$.

Zgodnie z interpretacją funkcji σ (por. 1.10.) warunki występujące w powyższej definicji możemy wyrazić następująco:

(R_1) – każdy element x jest sobie równy w stopniu co najmniej 1,

(R_2) – dowolne dwa elementy, których stopień równości jest nie mniejszy niż 2 są sobie równe,

(R_3) – jeżeli x jest równy y w stopniu 1, to x jest sobie równy w takim samym stopniu, w jakim y jest równy sobie,

(R_4) – jeżeli element x jest sobie równy w stopniu 2, to istnieje taki element y, który jest równy elementowi x w stopniu 1.

Niech $x, y \in$ U. Powiemy, że:

x jest całkowicie równy y, jeśli $\sigma(x,y) = 3$,

x jest prawie równy y, jeśli $\sigma(x,y) = 2$, x jest trochę równy y, jeśli $\sigma(x,y)=1$,

x jest całkowicie różny od y, jeśli $\sigma(x,y)=0$.

Poniższe dwa twierdzenia dają reprezentację zbiorów przybliżonych przez $R\Re_4$ - zbiory.

1.12. TWIERDZENIE. Jeżeli $\mathrm{U}=(U,\sigma)$ jest $R\Re_4$ - zbiorem, to czwórka $Z_U=(U,R_U,I_U,B_U)$, gdzie R_U jest relacją $xR_Uy \Leftrightarrow 1\le\sigma(x,y)$, oraz gdzie $I_U=\{x\in \mathrm{U} : \sigma(x,x)=3\}$, $B_U=\{x\in \mathrm{U} : \sigma(x,x)=2\}$, jest zbiorem przybliżonym.

Dowód. Niech $U=(\mathrm{U},\sigma)$ będzie $R\Re_4$ - zbiorem. Wtedy relacja R_U jest relacją równoważności. Zwrotność relacji R_U wynika z warunku (R_1) definicji 1.11., symetryczność i przechodniość odpowiednio z warunków (i), (ii) definicji 1.9.. Wykażemy, że para (I_U,B_U) spełnia warunki (1) - (3), zawarte w twierdzeniu 1.8. Bezpośrednio z określenia zbiorów I_U, B_U wynika, że $I_U\cap B_U=\emptyset$. Dla dowodu, że I_U jest zbiorem R_U - otwartym załóżmy, że $x\in I_U$ i xR_Uy. Wówczas korzystając z określeń zbioru I_U i relacji R_U oraz z warunków (R_3) i (R_2) mamy $\sigma(x,x)=3$ i $[\sigma(x,x)=\sigma(y,y)\ lub\ x=y]$. Stąd wynika, że $y\in I_U$. Podobnie wykorzystując określenia zbioru B_U i relacji R_U oraz warunki (R_3) i (R_2) stwierdzamy, że B_U jest zbiorem R_U - otwartym. Dla dowodu warunku (3) załóżmy, że $x\in B_U$. Wówczas $\sigma(x,x)=2$, a stąd na podstawie warunku (R_4) definicji 1.11. wynika, że istnieje element $y\in \mathrm{U}$ taki, że $\sigma(x,y)=1$. Oznacza to jednocześnie, że y jest elementem zbioru B_U (warunek (R_3)) takim, że xR_Uy. Twierdzenie jest więc udowodnione.

1.13. TWIERDZENIE. Jeżeli $Z=(U,R,I,B)$ jest zbiorem przybliżonym, to para $U_Z=(\mathrm{U},\sigma_Z)$, gdzie $\sigma_Z : \mathrm{U}\times\mathrm{U}\to /\Re_4/$ jest odwzorowaniem określonym następująco:

$$\sigma_Z(x,y) = \begin{cases} 3 & \text{jeśli } x=y\wedge x\in I, \\ 2 & \text{jeśli } x=y\wedge x\in B, \\ 1 & \text{jeśli } [(xRy\wedge x=y) \text{ lub } (x=y\wedge x\in \mathrm{U}-(I\cup B))], \\ 0 & \text{jeśli nieprawdą jest, że } xRy \end{cases}$$

jest $R\Re_4$ - zbiorem.

Dowód. Bezpośrednio z określenia funkcji σ_Z wynika, że $\sigma_Z(x,y) = \sigma_Z(y,x)$ dla dowolnych $x, y \in$ U. Łatwo zauważyć, że funkcja σ_Z spełnia warunek (ii) definicji 1.9. w przypadku, gdy x,y,z są takimi elementami zbioru U, że x = y, lub y = z, lub $\sigma_Z(x,y) = 0$, lub $\sigma_Z(y,z) = 0$. W przypadku gdy $x \neq y$, $y \neq z$, $\sigma_Z(x,y) \neq 0$ i $\sigma_Z(y,z) \neq 0$ musi być $\sigma_Z(x,y) = 1$ i $\sigma_Z(y,z) = 0$ oraz xRy i yRz. Na podstawie przechodniości relacji R mamy wtedy xRz, a to oznacza, że $1 \leq \sigma_Z(x,z)$. Tak więc dla każdych $x, y, z \in$ U jest $\sigma_Z(x,y) \wedge \sigma_Z(y,z) \leq \sigma_Z(x,z)$. Zatem udowodniliśmy, że (U, σ_Z) jest $\Re_4$ - zbiorem.

Udowodnimy, że $\Re_4$ - zbiór (U, σ_Z) jest $R\Re_4$ - zbiorem. Warunki (R1), (R2) dla funkcji σ_Z wynikają wprost z jej określenia. Dla dowodu warunku (R3) załóżmy, że $\sigma_Z(x,y) = 1$. Wówczas $[x \neq y \wedge xRy]$ lub $[x \in \mathrm{U} - (I \cup B)]$, a stąd wobec R - otwartości zbiorów I, B wynika, że $\sigma_Z(x,x) = \sigma_Z(y,y)$. Warunek ($R_4$) wynika z określenia funkcji σ_Z oraz warunku (3) (twierdzenie 1.8.). Kończy to dowód twierdzenia.

Niech $Z = (U, R, I, B)$ będzie zbiorem przybliżonym . Na podstawie 1.11, 1.13., oraz 1.5. element x zbioru U jest całkowicie równy sobie wtedy i tylko wtedy, gdy należy do I; element x jest prawie równy sobie, gdy należy do B; trochę równy sobie, gdy należy do U - $(I \cup B)$. Ponadto jeśli $x \neq y$, to x jest trochę równe y w przypadku, gdy $(x,y) \in R$ oraz x jest całkowicie różne od y w przypadku, gdy $(x,y) \notin R$.

2. Opisy podobiektów $\mathcal{A}$ - zbioru

W pracy [2] określona jest kategoria $\varphi[\mathcal{A}]$ $\mathcal{A}$ - zbiorów. Z uwagi na to zamiast $\mathcal{A}$- zbiór będziemy też mówić krótko obiekt.

2.1. DEFINICA. Niech $\mathcal{A}$ będzie zupełną algebrą Heytinga oraz niech U = (U, σ) będzie $\mathcal{A}$ - zbiorem. Opisem podobiektu obiektu U (por.[2]) nazywamy odwzorowanie $\alpha :$ U $\to /\mathcal{A}/$, spełniające warunki:

(o_1) $\forall_{x \in U}\ \alpha(x) \leq \sigma(x,x)$,

(o_1) $\forall_{x,y \in U}\ \alpha(x) \wedge \sigma(x,y) \leq \alpha(y)$.

2.2. TWIERDZENIE. Niech U = (U, σ) będzie $\mathcal{A}$ - zbiorem. Krata wszystkich podobiektów obiektu U w $\varphi[\mathcal{A}]$ jest izomorficzna z kratą $\mathcal{D}(U) = (D(U), \leq)$, gdzie $D(U)$ jest zbiorem wszystkich opisów podobiektów obiektu U oraz $\leq$ jest relacją binarną na zbiorze D(U), określoną następująco:

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \forall_{x\in U}\ \alpha(x) \leq \sigma(x,x).$$

Dowód zawarty jest w pracy [2].

2.3. DEFINICJA. Niech $U = (\mathrm{U},\sigma)$ będzie $R\Re_4$ - zbiorem. R - *opisem* podobiektu obiektu U (por. [3]) nazywamy odwzorowanie $\alpha : \mathrm{U} \to /\Re_4/$, spełniające warunki:

(r_1) $\forall_{x\in U}\ \alpha(x) \leq \sigma(x,x)$,

(r_2) $\forall_{x\in U}\ 1 \leq \alpha(x)$,

(r_3) $\forall_{x,y\in U}\ [\sigma(x,y) = 1 \Rightarrow \alpha(x) = \alpha(y)]$,

(r_4) $\forall_{x\in U}\ [\alpha(x) = 2 \Rightarrow \exists_{y\in U}\ \sigma(x,y) = 1]$.

2.4. Wniosek. Jeżeli $U = (\mathrm{U},\sigma)$ jest $R\Re_4$ - zbiorem, to r - opis podobiektu U jest opisem podobiektu obiektu U. Wynika to z warunków (r_1), (r_2), (r_3) definicji 2.3. oraz warunku (R2) definicji 1.11..

2.5. Z 2.3. i 1.11. wynika, że jeżeli $U = (\mathrm{U},\sigma)$ jest $R\Re_4$ - zbiorem, $\alpha : \mathrm{U} \to /\Re_4/$ jest opisem podobiektu obiektu U oraz para $U' = (\mathrm{U},\sigma_\alpha)$, dla σ_α określonego następująco: $\sigma_\alpha(x,y) = \sigma(x,y) \wedge \alpha(x)$, $x,y \in \mathrm{U}$ jest $R\Re_4$ - zbiorem, to α jest r - opisem podobiektu obiektu U. Podobnie, jeżeli $U = (\mathrm{U},\sigma)$ jest $R\Re_4$ - zbiorem, $\alpha : \mathrm{U} \to /\Re_4/$ jest r - opisem podobiektu obiektu U, to para $U' = (\mathrm{U},\sigma_\alpha)$, gdzie σ_α jest określone powyżej, jest $R\Re_4$ - zbiorem.

2.6. DEFINICJA. Podzbiór przybliżony zbioru przybliżonego $Z = (U,R,I,B)$ jest to dowolny zbiór przybliżony $Z' = (U,R',I',B')$ taki, że $R' = R$, $I' \subseteq I$, $B' \subseteq I \cup B$.

2.7. Niech $Z' = (U,R',I',B')$ będzie podzbiorem przybliżonym zbioru przybliżonego $Z = (U,R,I,B)$. Niech $U' = (\mathrm{U},\sigma_{Z'})$, $U = (\mathrm{U},\sigma_Z)$ będą $R\Re_4$ - zbiorami powstałymi odpowiednio z Z' i Z przez zastosowanie przyporządkowania opisanego w 1.13.. Wtedy dla dowolnych $x,y \in \mathrm{U}$ mamy: $1 \leq \sigma_Z(x,y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \leq \sigma_Z(x,y)$ oraz dla dowolnego $x \in \mathrm{U}$ jest $\sigma_Z(x,x) \leq \sigma_Z(x,x)$. W oparciu o to nietrudno sprawdzić, że odwzorowanie $\alpha : \mathrm{U} \to /\Re_4/$ określone następująco: $\alpha(x) = \sigma_Z(x,x)$, jest r - opisem podobiektu obiektu U.

Niech teraz $U = (\mathrm{U}, \sigma)$ będzie $R\Re_4$ - zbiorem, α niech będzie r - opisem podobiektu obiektu U. Niech $U' = (\mathrm{U}, \sigma_Z)$ będzie $R\Re_4$ - zbiorem, którego konstrukcja opisana jest w 2.5.. Wtedy zbiór przybliżony $Z' = (U, R_{U'}, I_{U'}, B_{U'})$, powstały z U' przez zastosowanie przyporządkowania opisanego w 1.12., jest podzbiorem przybliżonym zbioru przybliżonego $Z = (U, R_U, I_U, B_U)$. Zatem r - opisy podobiektów obiektu U można rozważać jako funkcje charakterystyczne podzbiorów przybliżonych zbioru U.

Występującą w definicji 2.3. funkcję α możemy zinterpretowć następująco:
dla dowolnego elementu x zbioru U, element $\alpha(x)$ algebry Heytinga $\Re_4$ określa, w jakim stopniu x należy do podzbioru przybliżonego. Warunki (r_1) - (r_4) mówią, że:

- element x należy do podzbioru w stopniu co najwyżej takim, w jakim x jest równy sobie;

-element x należy do podzbioru w stopniu co najmniej 1;

-jeżeli x jest trochę równy y, to stopnie przynależności obu tych elementów do podzbioru przybliżonego są takie same;

-jeżeli x należy do podzbioru przybliżonego w stopniu 2, to istnieje element y, który jest trochę równy x.

2.8. TWIERDZENIE. Jeżeli $U = (\mathrm{U}, \sigma)$ jest $R\Re_4$ - zbiorem, to zbiór $P_r(U)$ wszystkich r - opisów podobiektów obiektu U jest zupełną kratą dystrybutywną względem relacji $\leq, \wedge, \vee$ określonych następująco:

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \forall_{x \in U}\ \alpha(x) \leq \beta(x),$$

$$\forall_{x \in U}\ [(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x)\ ,\ (\alpha \vee \beta(x) = \alpha(x) \vee \beta(x)].$$

Dowód. Niech $U = (\mathrm{U}, \sigma)$ będzie $R\Re_4$ - zbiorem oraz niech $P_r(U)$ będzie zbiorem wszystkich r-opisów podobiektów obiektu U. Widoczne jest, że określona powyżej relacja $\leq$ jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia, zatem określa w zbiorze $P_r(U)$ porządek.

Nietrudno stwierdzić, że $(P_r(U), \leq, \wedge, \vee)$ jest kratą, bowiem dla dowolnych $\alpha, \beta \in P_r(U)$ określone wyżej funkcje $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$ są również elementami zbioru $P_r(U)$.

Z dystrybutowności kraty $\Re_4$ wynika dystrybutywność kraty $(P_r(U), \leq, \wedge, \vee)$.
Ponadto każdy podzbiór niepusty $\tau = \{\alpha_i : i \in I\} \subseteq P_r(U)$ posiada kres górny i kres dolny, mianowicie jeśli oznaczymy:

$$\bigvee\{\alpha_i : i \in I\} = \gamma,$$
$$\bigwedge\{\alpha_i : i \in I\} = \sigma,$$

to $\gamma(x) = \bigvee\{\alpha_i(x) : i \in I\}$, $\sigma(x) = \bigwedge\{\alpha_i : i \in I\}$. Nietrudno zauważyć, że γ i σ są r - opisami. Oznacza to ostatecznie że $(P_r(U), \leq, \wedge, \vee)$ jest dystrybutywną kratą zupełną i kończy dowód twierdzenia.

Zauważamy jeszcze, że odwzorowania $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ określone następująco: $\mathbf{0}(x) = 1$, $\mathbf{1}(x) = \sigma(x, x)$, dla $x \in U$, są r-opisami podobiektów obiektu U. Na mocy warunków $(r_1), (r_2)$, $\mathbf{0}$ jest elementem najmniejszym, a $\mathbf{1}$ elementem największym kraty $(P_r(U), \leq, \wedge, \vee)$.

2.9. Wniosek. Krata $\mathcal{P}_r(U) = (\mathrm{P}_r(U), \leq, \wedge, \vee)$ jest zupełną algebrą Heytinga, przy czym dla dowolnych $\alpha, \beta \in P_r(U)$ pseudouzupełnieniem (oznaczonym $\alpha \to \beta$) elementu α względem β jest element określony następująco:

$$(\alpha \to \beta)(x) = \begin{cases} \mathbf{1}(x) & \text{jeśli } \alpha(x) \leq \beta(x), \\ \beta(x) & \text{jeśli } \beta(x) \leq \alpha(x) \ \wedge \ \beta(x) \neq \alpha(x). \end{cases}$$

Dowód. Dla dowolnych $\alpha, \beta \in P_r(U)$ największym elementem zbioru $\{\gamma : \alpha \wedge \gamma \leq \beta\}$ jest właśnie $\gamma_{max} = \alpha \to \beta$.
Istotnie $\gamma_{max}(x) = \bigvee\{\gamma(x) : \alpha(x) \wedge \gamma(x) \leq \beta(x)\}$ oraz musi być $\gamma(x) \leq \sigma(x, x)$, więc

$$\gamma_{max}(x) = \begin{cases} \sigma(x, x) & \text{jeśli } \alpha(x) \leq \beta(x), \\ \beta(x) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Na podstawie twierdzeń 2.5., 2.6. operację „$\wedge$" możemy interpretować jako przecięcie podzbiorów przybliżonych $R\Re_4$ - zbioru U, operację $\vee$ jako ich sumę, a $\mathcal{P}_r(U)$ jako algebrę podzbiorów przybliżonych U.

Przy pewnym warunku nałożonym na $R\Re_4$ - zbiór $U = (\mathrm{U}, \sigma)$ algebra $\mathcal{P}_r(U)$ jest algebrą Boole'a.

2.10. Twierdzenie. Niech $U = (\mathrm{U}, \sigma)$ będzie $R\Re_4$ - zbiorem oraz niech $P_r(U)$ będzie zbiorem wszystkich r-opisów U.
Algebra $P_r(U) = (P_r(U), \leq, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ jest algebrą Boole'a wtedy i tylko wtedy, gdy U spełnia warunek:

$$(*)\quad (r_3)\ \forall_{x,y\in U}\ [\sigma(x,x) = \sigma(y,y) = 3 \ \wedge\ \sigma(x,y) = 1 \Rightarrow x = y].$$

Dowód. Załóżmy, że $U = (\mathrm{U}, \sigma)$ jest $R\Re_4$ - zbiorem, spełniającym warunek $(*)$. Niech $P_r(U)$ będzie zbiorem wszystkich r-opisów podobiektu U. Aby wykazać, że krata $\mathcal{P}_r(U)$ jest algebrą Boole'a, wystarczy udowodnić (por.[6]),że $\alpha \vee \neg\alpha = \mathbf{1}$ dla dowolnego $\alpha \in P_r(U)$; symbol $\neg\alpha$ oznacza tu $\alpha \to \mathbf{0}$. Zauważamy, że dla dowolnego $\alpha \in P_r(U)$ mamy:

$$(\neg\alpha)(x) \;=\; \begin{cases} \sigma(x,x) & \text{jeśli } \alpha(x) = 1, \\ 1 & \text{jeśli } \alpha(x) = 2 \text{ } lub \text{ } \alpha(x) = 3 \end{cases}$$

oraz (por. warunek (r_1) w definicji 2.3.)

$$(**)\quad (\alpha \vee \neg\alpha)(x) \;=\; \begin{cases} \sigma(x,x) & \text{jeśli } \alpha(x) = 1 \text{ } lub \text{ } \alpha(x) = 3, \\ 2 & \text{jeśli } \alpha(x) = 2. \end{cases}$$

Gdyby dla pewnego r - opisu α było $\alpha \vee \neg\alpha \neq \mathbf{1}$, to na podstawie $(**)$ istniałby element $x_o \in \mathrm{U}$ taki, że $\alpha(x_o) = 2$ oraz $\sigma(x_o, x_o) = 3$. Wobec tego na mocy (r_4) istniałby taki element $y_o \in \mathrm{U}$,że $\sigma(x_o, y_o) = 1$. Zatem na podstawie warunku (R_3) mielibyśmy równocześnie $\sigma(x_o, y_o) = 1$ oraz $\sigma(x_o, x_o) = \sigma(y_o, y_o) = 3$, czyli $x_o \neq y_o$. Jest to sprzeczne z warunkiem $(*)$.

Załóżmy teraz, że $U = (\mathrm{U}, \sigma)$ jest $R\Re_4$ - zbiorem nie spełniającym warunku $(*)$. Wtedy istnieją elementy $x_o, y_o \in \mathrm{U}$ takie, że: $\sigma(x_o, x_o) = \sigma(y_o, y_o) = 3$, $\sigma(x_o, y_o) = 1$ oraz $x_o \neq y_o$. Rozpatrzmy odwzorowanie $\alpha : \mathrm{U} \to /\Re_4/$ określone wzorem:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 2 & \text{jeśli } x \in [x_o]_{R_U}, \\ 1 & \text{jeśli } x \notin [x_o]_{R_U}, \end{cases}$$

gdzie R_U jest relacją określoną w 1.12.. Z warunku (R_2) i (R_3) wynika, że α spełnia warunek (r_1). Warunek (r_2) jest oczywisty. Warunek (r_3) jest również spełniony: gdyby bowiem dla $x, y \in U$ było $\sigma(x, y) = 1$ i $\alpha(x) = 1$ oraz $\alpha(y) = 2$, to na podstawie określenia funkcji α musiałoby być $y \in [x_o]_{R_U}$, a co za tym idzie xR_Uy i yR_Ux_o. Stąd wynika, że również $x \in [x_o]_{R_U}$, wbrew założeniu, że $\alpha(x) = 1$. Podobnie stwierdzamy, że spełniony jest warunek (r_4): jeśli $\alpha(x) = 2$, to musi być $x \in [x_o]_{R_U}$. Stąd jeśli $x = x_o$, to można przyjąć $y = y_o$, natomiast jeśli $x \neq x_o$, to można przyjąć $y = x_o$. Zatem odwzorowanie α jest r - opisem podobiektu obiektu U. Ponadto mamy $(\alpha \vee \neg\alpha)(x_o) = 2 \neq \sigma(x_o, x_o)$, czyli $(\alpha \vee \neg\alpha) \neq 1$. Wobec tego $\mathcal{P}_r(U)$ nie jest algebrą Boole'a.

Warunek $(*)$ występujący w powyższym twierdzeniu mówi, że relacja R_U (por. 1.12.) obcięta do wnętrza I_U (tzn. $R_U \cap (I_U \times I_U)$) jest relacją identyczności.

Bibliografia

[1] M.Eytan: *Fuzzy Sets: A Topos-logical Point of View,* Fuzzy Sets and Systems 5 (1981), pp. 47-67.

[2] D.Higgs: *Injectivity in the topos of complete Heyting algebra valued sets,* Canad. J. Math.36 (1984), pp.550-568.

[3] A.Obtułowicz: *Rough sets and Heyting algebra valued sets,* Bull. Pol. Acad. Math.,35(9-10) (531-683) 1987, pp.667-673.

[4] Z. Pawlak: *Rough sets,* Internat. J. Inform. Comput. Sci. 11 (5) (1982) , pp.341-356.

[5] Z. Pawlak: *Rough sets and fuzzy sets,* Fuzzy Sets and Systems 17 (1985), pp. 99-102.

[6] H. Rasiowa and R. Sikorski: *The Mathematics of metamathematics,* Warszawa (1970), PWN, Tom 41.

Podzbiory przybliżone zbiorów przybliżonych

Teresa Biegańska

Streszczenie

Wśród kategorii zbiorów wartościowanych algebrami Heytinga na uwagę zasługuje kategoria $\Re L_4$ - Set zbiorów wartościowanych czteroelementowym łańcuchem $L_4 = \{0,1,2,3\}$ i spełniających pewne dodatkowe warunki. Zbiory te są $\Re L_4$ - zbiorami i stanowią reprezentację (podaną przez A. Obtułowicza) zbiorów przybliżonych (zdefiniowanych przez Z. Pawlaka). Wtej pracy udowodniony został fakt, iż kategoria $\Re L_4$ - Set nie jest izomorficznie domkniętą podkategorią kategorii L_4 - Set wszystkich zbiorów wartościowanych algebrą L_4.