ZESZYTY NAUKOWE Instytutu Administracji Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie
Seria: Gubernaculum et Administratio 2006, z. IV

Roman Pluta

Topologia sieci złożonych*

Sieci złożone zawarte są w wielu systemach naturalnych i społecznych. Choć tradycyjnie systemy te były modelowane z użyciem teorii grafów losowych, coraz powszechniej przyznaje się, że topologia i ewolucja rzeczywistych sieci podlega określonej zasadzie organizacyjnej i nie jest losowa. Poniżej przedstawię podstawowe wyniki badawcze w zakresie złożonych sieci uzyskane dzięki statystycznej mechanice sieci złożonych.

Model sieci złożonej opisuje szeroką gamę systemów o wielkiej wadze technologicznej i intelektualnej. Komórkę organiczną ujmuje się jako złożoną sieć pierwiastków chemicznych powiązanych reakcjami chemicznymi. Internet jest złożoną siecią komputerów powiązanych różnymi fizycznymi łączami. Poglądy rozprzestrzeniają się w sieci społecznej – jej węzłami są ludzie połączeni rozmaitymi więziami społecznymi. World Wide Web jest ogromną wirtualną siecią witryn złączonych hiperlinkami.

Okazuje się, że świat jest tak naprawdę siecią. Uznanie wagi tej konstatacji stało się impulsem do przyśpieszenia badań nad mechanizmami, które determinują topologię sieci złożonych. Szczególne rezultaty zostały osiągnięte na tym polu przez fizyków, którzy wcześniej rozwinęli bogaty arsenał skutecznych narzędzi badawczych służących przewidywaniu zachowania systemu jako całości na podstawie interakcji jego elementów składowych. Wiele modeli analizowanych w mechanice statystycznej stało się wręcz idealnym punktem wyjścia dla badań nad sieciami. W efekcie powstał inspirujący projekt badawczy, swego rodzaju „fizyka społeczna".

Teoria grafu losowego

Studia nad sieciami były początkowo tradycyjnym przedmiotem teorii grafów. W kategoriach matematycznych sieć jest reprezentowana przez graf. Graf jest zbiorem par $G = \{P,E\}$, gdzie P jest zbiorem N węzłów i E zbiorem krawędzi, z których każda łączy

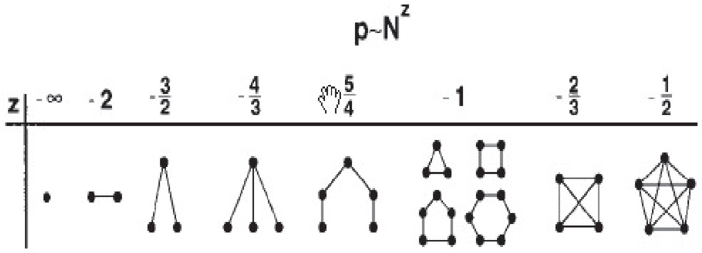
* Poniższy artykuł został przygotowany na podstawie: R. Albert, A.-L. Barabasi, *Statistical mechanics of complex networks*, „Reviews of Modern Physics", Volume 74, Number 1, January 2002.

dwa węzły należące do *P*. Graf jest przedstawiany zwykle jako zbiór punktów i linii odpowiadających węzłom i krawędziom sieci. Dwa punkty są połączone linią, jeśli w sieci odpowiednie węzły są złączone krawędzią.

Szczególnie bogatym źródłem wyników badawczych były studia nad grafami losowymi, w których krawędzie rozmieszczone są przypadkowo. Znaczenie teorii grafów losowych związane jest z faktem, że sieci o złożonej topologii zwykle początkowo wydają się losowe. Model ten przez wiele dziesięcioleci dominował w badaniach nad sieciami.

Konstrukcja grafu losowego często nazywana jest ewolucją. Rozpoczyna się od zbioru *N* izolowanych węzłów i graf jest rozwijany poprzez sukcesywne dodawanie losowo wybranych krawędzi. Grafy otrzymane w kolejnych etapach tego procesu odpowiadają coraz większemu prawdopodobieństwu połączeń. Zwieńczeniem ewolucji jest graf z maksymalną liczbą krawędzi (prawdopodobieństwo połączeń wynosi wtedy 1).

Podstawowym celem teorii grafu losowego jest określenie prawdopodobieństwa *p* połączenia węzłów, przy którym pojawi się dana właściwość grafu (na przykład drzewa, trójkąty czy cykle). Okazuje się, że bardzo wiele ważnych cech grafu powstaje zupełnie nagle – tzn. przy określonym prawdopodobieństwie połączeń albo prawie każdy graf posiada daną cechę, albo prawie żaden. Przejście od braku właściwości do jej posiadania jest zwykle skokowe i dla wielu właściwości zależy od prawdopodobieństwa krytycznego $p_c \sim N^{z}$, gdzie *z* zmienia się od $-\infty$ do 0. Zmieniając *z*, można obserwować ewolucję grafu (patrz rys. 1).



Rys. 1. Poziomy prawdopodobieństwa pojawienia się podgrafów w grafie losowym[1]

Otóż początkowo ($z < -3/2$) prawie wszystkie wygenerowane grafy zawierają jedynie odizolowane węzły i krawędzie. Kiedy $z = -3/2$, w grafie pojawiają się drzewa, które wraz z dalszym wzrostem *z* mają coraz wyższy stopień. Dopiero, gdy $z = -1$ pomiędzy węzłami tworzą się cykle. W końcu, począwszy od $z = -2/3$, powstają grafy pełne.

Topologię grafu można mierzyć. W tym celu stosuje się trzy podstawowe miary: rozkład stopni węzłów *P(k)*, długość średniej ścieżki *L*, współczynnik spójności *C*.

W najprostszym przypadku każdy węzeł ma pewną liczbę *k* krawędzi łączących go z *k* innymi węzłami. Liczbę krawędzi węzła nazywa się jego stopniem. Przeciętna ze stopni wszystkich węzłów jest średnim stopniem *[k]* grafu i w przypadku grafu losowego *[k] = pN.* Zwykle węzły mają różne stopnie. Owo zróżnicowanie jest charakteryzowane przez funkcję rozkładu stopni węzłów *P(k)*, która określa prawdopodobieństwo,

[1] G. Bianconi, A.-L. Barabasi, *Competition and multiscaling in evolving networks*, „Europhysics Letters", 54 (4), 15 may 2001, p. 439.

że przypadkowo wybrany węzeł ma dokładnie k krawędzi. Okazało się, że prawdopodobieństwo to w grafie losowym podlega rozkładowi Poissona, $P(k) = e^{-[k]}[k]^k/k!$.

Dystans pomiędzy dwoma węzłami jest definiowany jako liczba krawędzi składających się na najkrótszą ścieżkę łączącą te węzły. Średnia ścieżka L grafu jest przeciętnym dystansem obliczonym z dystansów wszystkich par węzłów. Długość średniej ścieżki L grafu losowego rośnie wraz z jego rozmiarem i jest proporcjonalna do $lnN/ln[k]$.

Załóżmy, że wybrany węzeł ma k krawędzi łączących go z k innymi węzłami. Jeżeli teraz owe sąsiednie węzły byłyby powiązane ze sobą na zasadzie każdy z każdym, to pomiędzy nimi powinno być maksymalnie łącznie $k(k-1)/2$ krawędzi. Iloraz liczby krawędzi faktycznie istniejących między tymi węzłami i maksymalnej liczby krawędzi daje nam wielkość współczynnika spójności cechującego wybrany węzeł. Średnia współczynników spójności wszystkich węzłów jest współczynnikiem spójności C całego grafu. W grafie losowym współczynnik spójności $C = [k]/N) = p$.

Paradygmat nielosowy

Jednakże rosnące znaczenie kompleksowych systemów skłoniło wielu badaczy do ponownego rozważenia losowego paradygmatu modelowania i w konsekwencji zadania sobie prostego pytania: czy rzeczywiste sieci kryjące się w różnego rodzaju systemach są istotnie losowe? Wstępna intuicja podpowiadała bowiem, że systemy te charakteryzują się pewną zasadą organizacyjną, która musi być zakodowana na jakimś poziomie ich topologii. Jeśli jednak topologia takich sieci naprawdę różni się od topologii grafu losowego, należało rozwinąć koncepcje niezbędne dla uchwycenia ich całościowej specyfiki.

W ciągu kilku ostatnich lat dokonano niezwykłego postępu w tym kierunku. Po pierwsze, komputeryzacja przetwarzania informacji doprowadziła do powstania obszernych baz danych dotyczących różnych rzeczywistych sieci. Po drugie, wzrost mocy obliczeniowej komputerów umożliwił realizację badań sieci zawierających miliony węzłów i stawianie pytań wcześniej uznawanych za niemożliwe do pomyślenia. Po trzecie, przekraczanie dotychczasowych barier pomiędzy poszczególnymi dyscyplinami nauki otworzyło badaczom dostęp do różnych baz danych pozwalając odkryć typowe właściwości w różnorodnych sieciach. W takich okolicznościach zrozumienie sieci jako topologii interakcji pomiędzy jej komponentami było tylko kwestią czasu. Wśród wielu koncepcji, które powstały w ciągu tych kilku ostatnich lat, trzy zajmują wyjątkowe miejsce w myśleniu o sieciach złożonych: koncepcja małego świata, koncepcja klastrów i koncepcja sieci bezskalowej.

Koncepcja małego świata opisuje podstawowy fakt, że, pomimo rozległości sieci, pomiędzy jej dwoma dowolnymi węzłami istnieje względnie krótki dystans. Najbardziej znaną manifestacją tej koncepcji jest odkrycie tzw. separacji sześciostopniowej. Zgodnie z nią ścieżka kontaktu społecznego dowolnej pary nieznających się bezpośrednio mieszkańców Stanów Zjednoczonych ma typową długość, wynoszącą około sześciu znajomych. Owa małoświatowość jest charakterystyczna dla wielu złożonych sieci – na przykład dowolni aktorzy w Hollywood mogą nawiązać ze sobą kontakt za pośrednictwem trzech innych aktorów.

Drugą istotną koncepcją jest koncepcja klastrów, czyli kręgów kontaktów, w ramach których każdy członek danego kręgu zna innych jego członków. Ta wewnętrzna tendencja do tworzenia kręgów znajomości jest mierzona za pomocą współczynnika spójności *C*. Jest rzeczą godną uwagi, że w grafie losowym współczynnik spójności jest równy prawdopodobieństwu połączenia, natomiast w rzeczywistych sieciach zwykle współczynnik ten jest wielokrotnie większy.

Trzecią koncepcją jest koncepcja sieci bezskalowej. Jej źródłem jest konstatacja, iż nie wszystkie węzły sieci mają tę samą liczbę krawędzi (stopień). Ponieważ w grafie losowym krawędzie są rozmieszczone przypadkowo, większość jego węzłów ma w przybliżeniu taki sam stopień bliski średniemu stopniowi *[k]* sieci, a rozkład stopni węzłów jest rozkładem Poissona. Natomiast w większości sieci rozkład stopni jest potęgowy: $P(k) \sim k^{-\gamma}$. Rozkład ten jest więc niezależny od skali sieci mierzonej liczbą jej węzłów, jest zatem bezskalowy.

Powyższe ustalenia ożywiły badania bardzo złożonych sieci w celu zrozumienia różnorodnych systemów realnych, począwszy od sieci komunikacyjnych, poprzez sieci współpracy, a skończywszy na metabolicznych.

W sieci www węzłami są dokumenty (strony), a krawędziami hiperlinki łączące te dokumenty. Wielokrotne badania wykazały, że rozkład stopni $P(k)$ jest rozkładem potęgowym z wykładnikiem γ zawartym w przedziale 2,1–2,8. Mimo ogromnej liczby węzłów sieć www objawia właściwości małoświatowe – długość jej średniej ścieżki L wynosi około 19. Natomiast współczynnik spójności C obliczony dla podsieci złożonej z blisko 260 000 węzłów wyniósł 0,11. Porównywalny graf losowy ma ten współczynnik pięćset razy mniejszy, $C = 0{,}0002$.

Internet jest siecią fizycznych połączeń pomiędzy komputerami. Rozkład stopni jego węzłów okazuje się rozkładem potęgowym o wykładniku w przedziale 2,1–2,5. Współczynnik spójności plasuje się w granicach 0,2–0,3. Dla porównania w przypadku grafu losowego o podobnych rozmiarach $C = 0{,}001$. Długość średniej ścieżki na poziomie domen internetowych osiąga 3,8, a na poziomie ruterów około 9, co wskazuje na małoświatową właściwość internetu.

W sieci współpracy aktorów Hollywood węzłami są aktorzy i dwa węzły mają wspólną krawędź, jeśli odpowiedni aktorzy grali razem w jakimś filmie. Długość średniej ścieżki sieci aktorskiej $L = 3{,}6$ i jest porównywalna z długością ścieżki odpowiedniego grafu losowego. Współczynnik $C = 0{,}8$ (w grafie losowym 0,0003). Rozkład stopni węzłów jest tu również potęgowy ($\gamma = 2{,}3$).

Węzłami w sieciach metabolicznych komórek organicznych są substraty, a krawędzie reprezentują reakcje chemiczne, w których owe substraty uczestniczą. Rozkład stopni przebiega wykładniczo (wykładnik pomiędzy 2,0 i 2,4) we wszystkich przebadanych dotąd organizmach. Długość ścieżki jest w tych organizmach zbliżona, wahając się wokół poziomu 3,3.

Analogiczne badania empiryczne przeprowadzono nad innymi sieciami: kontaktów seksualnych, łańcuchów pokarmowych, neuronów, rozmów telefonicznych, cytatów w publikacjach naukowych, współpracy naukowej, współwystępowania słów, stacji energetycznych. Ich wyniki były zgodne z powyższymi ustaleniami – niewielka długość średniej ścieżki, wysoki współczynnik spójności i potęgowy rozkład stopni węzłów.

Odkryte własności topologiczne rzeczywistych sieci potwierdziły wcześniejsze intuicje badawcze i zapoczątkowały wiele badań zmierzających do zrozumienia mechanizmu małoświatowego i bezskalowego.

Sieć małoświatowa

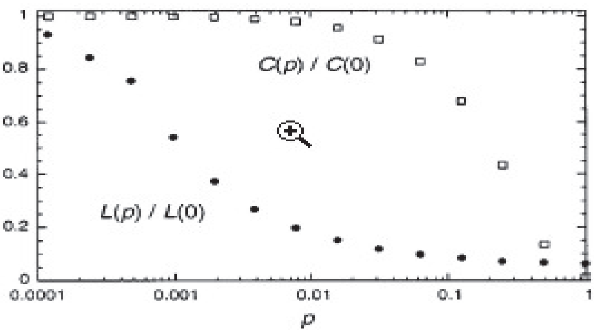
Koncepcja sieci małoświatowej jest owocem modelowania systemów społecznych. W systemach tych ludzie zazwyczaj obcują ze swymi bezpośrednimi sąsiadami z tej samej ulicy, kolegami z pracy czy osobami znajomymi. Jednakże każdy ma gdzieś bardzo daleko kogoś, z kim kontaktuje się dość rzadko w sprawach niezwykłej wagi. Model małoświatowy otrzymuje się zgodnie z następującym algorytmem:

1. punktem wyjścia jest graf regularny, czyli okręg złożony z N węzłów, każdy węzeł jest połączony ze swymi pierwszymi k sąsiadami (po $k/2$ z każdej strony),
2. następnie z określonym prawdopodobieństwem p losowo reorientuje się istniejące krawędzie, wykluczając dublowanie i pętle.

Powyższy proces prowadzi do powstania długozasięgowych krawędzi (krawędzie krótkie istnieją już w punkcie wyjścia), które łączą węzły należące do odseparowanych dotąd fragmentów grafu. Zmieniając prawdopodobieństwo reorientacji, można obserwować przejście od grafu regularnego ($p = 0$) do losowego ($p = 1$).

W przypadku grafu regularnego długość średniej ścieżki wynosi $L = N/2k$, zaś współczynnik spójności $C = 3(k-2)/4(k-1)$. Długość ścieżki zmienia się wraz z rozmiarem sieci, natomiast współczynnik przy dużym k dąży do ¾ i można go uznać za wysoki. W grafie losowym ścieżka L jest proporcjonalna do $lnN/ln[k]$, a współczynnik C wynosi $[k]/N$. W konsekwencji wraz z rosnącym rozmiarem tego grafu średnia ścieżka wydłuża się i współczynnik spójności spada.

Powyższe przypadki graniczne mogą sugerować, że wysoki współczynnik spójności jest zawsze związany z długą średnią ścieżką, a niski współczynnik z krótką ścieżką. Okazuje się jednak, że istnieje pewien obszar prawdopodobieństwa, w którym ścieżka jest krótka i współczynnik jest wysoki (patrz rys. 2).



Rys. 2. Długość średniej ścieżki *L(p)* i współczynnik spójności *C(p)* w modelu małoświatowym[2]

Taka konfiguracja związana jest z szybkim skracaniem ścieżki dla pewnego obszaru małych wartości prawdopodobieństwa przyłączenia (wokół $p = 0,01$), podczas gdy wielkość współczynnika spójności pozostaje w tym obszarze prawie niezmienna.[3] Zmniej-

[2] S.H. Yook, H. Jeong, A.-L. Barabasi, Y. Tu, *Weighted Evolving Networks*, „Physical Review Letters", Volume 86, Number 25, 18 june 2002, pp. 5836–5837.

[3] S.H. Strogatz, *Exploring complex networks*, „Nature", Volume 410, 8 march 2001, p. 273.

szenie długości ścieżki jest skutkiem wzrostu udziału krawędzi przeorientowanych w grafie regularnym, krawędzi będących skrótami pomiędzy węzłami, a więc bezpośrednio łączących węzły dotąd połączone tylko pośrednio. Każdy losowo utworzony skrót (zwany także mostem) łączy wyraźnie dotąd odseparowane części grafu i w efekcie znacząco wpływa na charakterystyczną długość średniej ścieżki. Na rys. 2 widać wyraźnie, że względnie niewielka liczba tych skrótów ($p = 0,01$ oznacza, że tylko 1% krawędzi jest przeorientowany) wystarcza do drastycznego obniżenia długości ścieżki.[4] Badania ujawniły też, że proces skracania średniej ścieżki nie rozpocznie się dopóty, dopóki prawdopodobieństwo łączenia nie zrówna się z prawdopodobieństwem granicznym wynoszącym $2/N[k]$. Ostatecznie sieć małoświatowa cechuje się jednocześnie krótką średnią ścieżką i wysokim współczynnikiem spójności.

Sieć bezskalowa

Dane empiryczne ujawniają, że wiele dużych sieci to sieci bezskalowe. Rozkład ich stopni węzłów jest zgodny z rozkładem potęgowym. Ani model sieci losowej, ani model sieci małoświatowej nie pozwalają na uzyskanie takiego rozkładu. Pojawia się pytanie: jaki mechanizm odpowiada za powstanie bezskalowości? Okazuje się, że odpowiedzialne są jednocześnie dwa mechanizmy.

Po pierwsze, dotychczasowe modele sieci rozpoczynały od stałej liczby N węzłów, które następnie były losowo łączone bez modyfikacji ilości węzłów. Natomiast większość rzeczywistych sieci dotyczy systemów otwartych, które rosną drogą nieustannego dołączania nowych węzłów.

Po drugie, analizowane dotąd modele sieci przyjmowały, że prawdopodobieństwo połączenia węzłów jest niezależne od ich stopnia – nowe krawędzie rozmieszczane są losowo z jednakowym prawdopodobieństwem. Jednak większość realnych sieci charakteryzuje się preferencyjnym przyłączaniem – prawdopodobieństwo połączenia z węzłem jest proporcjonalne do stopnia tego węzła.

Te dwie właściwości rzeczywistych sieci, wzrost rozmiarów i preferencyjne przyłączanie stały się inspiracją do zbudowania modelu, który po raz pierwszy umożliwił wygenerowanie modelu sieci o potęgowym rozkładzie stopni węzłów. Algorytm jest następujący:

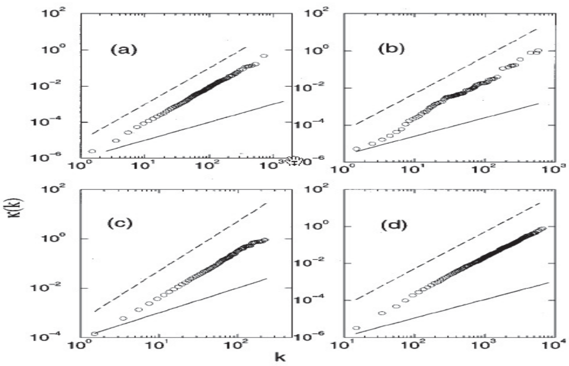
1. Wzrost: proces rozpoczyna się od małej liczby m węzłów i w każdym kroku jest dołączany nowy węzeł, który ma m krawędzi łączących go z m różnymi węzłami już obecnymi w sieci.
2. Preferencyjne przyłączanie: po wyborze węzłów, z którymi łączy się nowy węzeł, przyjmuje się, że prawdopodobieństwo połączenia zależy od stopnia wybranych węzłów.

Symulacje numeryczne wskazują, że taka sieć ewoluuje do stanu o niezmiennej skali z prawdopodobieństwem, iż węzeł ma k krawędzi podlegającym rozkładowi potęgowemu, $P(k)=k^{-3}$. Powyższy model sugeruje, że wzrost rozmiarów i preferencyjne przyłączanie mogą grać ważną rolę w rozwoju sieci.[5]

---

[4] R. Albert, A.-L. Barabasi, op. cit., p. 56.
[5] Ibidem, p. 68.

Pojawia się jednak problem, czy powyższe warunki są konieczne dla powstania rozkładu potęgowego stopni węzłów? Dla uzyskania odpowiedzi na to pytanie przebadano dwa skrajne modele. Model A ucieleśnia tylko wzrostowy charakter sieci z wyeliminowaniem preferencyjnego przyłączania. W modelu tym uzyskano rozkład $P(k) \sim e^{-k/m}$. Wykładniczy charakter tego rozkładu wskazuje, że brak preferencyjnego przyłączania prowadzi do zaniku bezskalowości sieci. Model B usuwa proces wzrostu zachowując preferencyjne przyłączanie. Przeprowadzone na modelu symulacje ujawniły, że rozkład stopni nie jest stacjonarny i zmienia się z początkowego rozkładu potęgowego na rozkład normalny. Rezultaty uzyskane dzięki modelom A i B dowodzą, że wzrost i preferencyjne przyłączanie są jednocześnie konieczne, by pojawił się stacjonarny rozkład potęgowy stopni węzłów obserwowany w realnych sieciach.[6]



Rys. 3. Skumulowane preferencyjne przyłączanie w (a) sieci cytatów, (b) internecie, (c) sieci współpracy naukowej, (d) sieci współpracy aktorskiej. Liniowo preferencyjne przyłączanie jest zaznaczone linią przerywaną, brak przyłączania preferencyjnego linią ciągłą[7]

W celu empirycznego określenia funkcyjnej postaci rozkładu przebadano sieć cytatów, sieć internetową, sieć współpracy naukowej i sieć współpracy aktorskiej. Otrzymane wyniki potwierdzają istnienie w tych sieciach preferencyjnego przyłączania (patrz rys. 3) i w każdym przypadku rozkład stopni węzłów był generalnie rozkładem potęgowym. Podobnie obserwowany wzrost tych sieci dał w rezultacie zwiększenie średniego stopnia sieci oraz potęgowy rozkład stopni.

Sieć ewolucyjna

Wyżej przedstawiony model jest najprostszym, swego rodzaju klasycznym, wyjściowym modelem bezskalowym, który uchwycił mechanizm odpowiedzialny za potęgowy rozkład stopni. W porównaniu do realnych sieci ma on jednak ewidentne ograniczenia: generuje rozkład potęgowy stopni o stałym wykładniku, podczas gdy wykładnik zmie-

[6] Ibidem, p. 77.

[7] D.S. Callaway, M.E.J. Newman, S.H. Strogatz, D.J. Watts, *Network robustness and fragility: Percolation on random graphs*, www:arXiv:cond-mat\0007300 v2 19 oct 2000, p. 3.

rzony dla rzeczywistych sieci zmienia się. Ponadto rozkład stopni niektórych sieci może mieć postać wykładniczą.

Owa niezgodność pomiędzy modelem i rzeczywistością doprowadziła do postawienia wielu podstawowych pytań dotyczących ewolucji sieci: Jak można zmienić zakres wykładnika? Czy istnieje pewna uniwersalność podobna do tej, którą można zaobserwować w krytycznych zjawiskach charakteryzowanych jednym wykładnikiem? Jak różnorodne lokalne procesy zachodzące w realnych sieciach wpływają na ich topologię? Chociaż obecnie poszukuje się odpowiedzi na te pytania, pewne rezultaty już zasługują na prezentację.

Podstawową składową wszystkich modeli mających na celu generowanie sieci bezskalowych jest przyłączanie preferencyjne zakładające, że prawdopodobieństwo uzyskania nowej krawędzi rośnie wraz ze stopniem węzła. Wcześniej analizowany klasyczny model wyjściowy przyjmuje, że preferencyjne prawdopodobieństwo $\Pi(k)$ przyłączenia do węzła jest proporcjonalne do stopnia k węzła, czyli jego postać funkcyjna jest liniowa względem k.

Funkcyjna forma $\Pi(k)$ może być określona tylko dla sieci, w przypadku której jest znany moment wejścia każdego węzła do sieci. Tego rodzaju dynamiczne dane są dostępne dla sieci współpracy naukowej, cytatów w publikacjach, współpracy aktorskiej oraz domen internetu. Wyniki przeprowadzonych badań potwierdzają istnienie w tych sieciach preferencyjnego przyłączania. Co więcej, okazało się, że w każdym przypadku prawdopodobieństwo przyłączania podlegało rozkładowi potęgowemu $\Pi(k) \sim k^{\alpha}$. W kilku przypadkach (internet, sieć cytatów) wykładnik wynosił 1, czyli rozkład był liniowy względem k. Dla pozostałych sieci wykładnik wahał się wokół 0,8, wykazując tym samym zależność sublinearną. Przeprowadzone obliczenia dla różnych wartości wykładnika pozwoliły wyodrębnić dwie nieliniowe fazy: sublinearną ($\alpha < 1$) i superlinearną ($\alpha > 1$). W obu przypadkach okazało się, że nieliniowe przyłączanie preferencyjne likwiduje bezskalową naturę sieci.[8] Tylko w tym przypadku, kiedy preferencyjne przyłączanie jest liniowe ($\alpha = 1$), topologia sieci okazywała się bezskalową, jej rozkład stopni był potęgowy $P(k) \sim k^{-\gamma}$, przy czym wykładnik γ funkcji rozkładu zmieniał się pomiędzy 2 i ∞.

Inną ogólną cechą preferencyjnego przyłączania w realnych sieciach jest fakt, że $\Pi(0) \neq 0$, tzn. prawdopodobieństwo przyłączenia nowego węzła do węzła pozbawionego krawędzi (izolowanego) nie jest zerowe. Innymi słowy, węzły w sieciach posiadają wstępną atrakcyjność niezależną od liczby krawędzi. Tym samym w rzeczywistych sieciach każdy węzeł ma określoną szansę przyłączenia nawet wtedy, kiedy na starcie nie ma żadnej krawędzi. Nawet całkowicie odizolowany węzeł zostanie kiedyś odkryty. Wykonane obliczenia dla sieci z prawdopodobieństwem przyłączania proporcjonalnym do sumy początkowej atrakcyjności i liczby krawędzi ujawniły, że rozkład stopni zachowuje potęgowy charakter. Zatem początkowa atrakcyjność węzłów nie niszczy bezskalowej natury sieci.

W klasycznym modelu bezskalowym liczba węzłów i krawędzi rośnie liniowo w czasie i w konsekwencji średni stopień sieci jest stały. Zdolność sieci do wzrostu jest potwierdzana przez niedawne pomiary. Na przykład, średni stopień internetu w ciągu 1998 roku wzrósł z 3,4 do 4,0. Wzrost zanotowano również w sieci współpracy nau-

[8] D.J. Watts, S.H. Strogatz, *Collective dynamics of „small-world" networks*, „Nature", Volume 393, 4 june 1998, p. 440.

kowej czy sieci matabolizmu komórkowego. Wzrost średniego stopnia sieci wskazuje, że w wielu rzeczywistych systemach liczba krawędzi zwiększa się szybciej niż liczba węzłów – co jest potwierdzeniem obecności zjawiska zwanego przyśpieszonym wzrostem. Modele symulujące przyśpieszony wzrost pokazały, że zjawisko to nie zmienia bezskalowej natury rozkładu stopni. Modyfikuje jedynie wykładnik tego rozkładu lub prowadzi do pojawienia się odrębnych rozkładów o różnych poziomach wykładników.

Klasyczny model wyjściowy uwzględnia tylko jeden mechanizm wzrostu sieci: dodanie nowych węzłów przyłączanych do węzłów już obecnych w sieci. Jednak w rzeczywistych systemach szereg lokalnych wydarzeń kształtuje ewolucję sieci. Każda lokalna zmiana w topologii sieci może być uzyskana poprzez kombinację czterech elementarnych procesów: dodanie lub usunięcie węzła i dodanie lub usunięcie krawędzi.

Powstało wiele modeli pozwalających na numeryczną symulację skutków tych elementarnych zmian. Generalnie rzecz ujmując, pojawiają się wtedy dwa rozkłady stopni w zależności od tego, czy prawdopodobieństwo reorientacji krawędzi jest powyżej czy poniżej wielkości krytycznej. Tylko w przypadku podkrytycznym rozkład stopni węzłów jest zgodny z rozkładem potęgowym. W przeciwnym razie (ponadkrytycznym) $P(k)$ przyjmuje postać wykładniczą.[9]

W wielu realnych sieciach węzły charakteryzują się skończonym czasem życia (na przykład w sieciach społecznych) lub krawędzie mają skończoną wydajność (rutery internetowe czy węzły sieci elektrycznej). Nierzadko w sieciach istnieją ograniczenia limitujące dodawanie nowych krawędzi. Przykładowo, aktorzy dysponują skończonym okresem aktywności, w którym są w stanie kolekcjonować nowe kontakty. Natomiast sieć elektryczna stawia ograniczenia w liczbie krawędzi przyłączonych do poszczególnego węzła wynikające z powodów ekonomicznych i technicznych. Powstały zatem modele uwzględniające tego rodzaju ograniczenia czasowe, kosztowe lub wydajnościowe. Symulacje numeryczne przeprowadzone w tych modelach wykazały, że dla małych k rozkład stopni nadal podlegał funkcji potęgowej.

W klasycznym modelu potęgowym wszystkie węzły zwiększają swój stopień w tym samym tempie. W konsekwencji najstarsze węzły mają najwięcej krawędzi, ponieważ mają najwięcej czasu na ich akumulację. Jest jednak wiele przykładów wskazujących na to, że w realnych sieciach stopień węzłów i tempo wzrostu nie zależy tylko od wieku. Sieci te cechuje pewna konkurencyjność polegająca na tym, że każdy węzeł ma wewnętrzną zdolność zdobycia krawędzi kosztem innych węzłów. Zaproponowano modele, w których prawdopodobieństwo przyłączania krawędzi jest proporcjonalne do stopnia węzła oraz jego sprawności konkurencyjnej. Taka konstrukcja preferencyjnego przyłączania zapewnia, że względnie młody węzeł z nielicznymi krawędziami może je zdobyć w szybkim tempie, jeśli charakteryzuje się dużą sprawnością. Rozkład stopni w modelach sprawnościowych zachowuje uogólniony potęgowy charakter.[10]

Obecnie panuje powszechna zgoda, że węzły silnie powiązane z innymi węzłami mają większą szansę zdobycia nowych krawędzi niż węzły powiązane słabiej. Wyjściowy model bezskalowy uwzględnił ten fakt, wprowadzając *ex definitione* preferencyjne przyłączanie. Jakie jednak są przyczyny powstania preferencyjnego przyłączania? Na to

---

[9] A.-L. Barabasi, R. Albert, H. Jeong, *Mean-field theory for scale-free random networks*, „Physica" A, 272 (1999), pp. 182–185.

[10] M.E.J. Newman, *Clustering and preferential attachment in growing networks*, www:arXiv:cond-mat\0104209 v1 11 Apr 2001, pp. 9–10.

pytanie nie ma ogólnej odpowiedzi. Natomiast umacnia się przekonanie, że mechanizm rodzący preferencyjność jest zależny od szczególnych uwarunkowań danego systemu. Pojawiły się też modele rzucające nieco światła na ten problem. Ich istota sprowadza się do założenia, że chociaż preferencyjne przyłączanie nie jest wprowadzone *explicite*, mechanizmy zastosowane do umiejscowienia węzłów i krawędzi doprowadzają w efekcie do jego pojawienia się. Różnorodność przedstawianych propozycji ukazuje szeroką gamę lokalnych mechanizmów, które mogą wpływać na ewolucję rosnących sieci i generować topologie bezskalowe.

Jedną z takich propozycji jest model kopiowania uwzględniający mechanizm ujawniony w sieci www. Zgodnie z tym mechanizmem nowa strona poświęcona określonemu tematowi kopiuje linki ze stron już istniejących i dotyczących tego samego tematu. W modelu zjawisko kopiowania symuluje się w sposób następujący: wybiera się losowo spośród już istniejących węzłów tzw. węzeł prototypowy, następnie z prawdopodobieństwem p ustala się połączenie krawędzi nowego węzła z już istniejącymi węzłami i z prawdopodobieństwem 1-p dołączenie krawędzi nowego węzła do węzła prototypowego. Proces ten zwiększa prawdopodobieństwo, że węzeł o wysokim stopniu pozyska nowe krawędzie. Zatem mechanizm kopiowania w sposób efektywny prowadzi do liniowo preferencyjnego przyłączania. Zgodnie z oczekiwaniami rozkład stopni węzłów ma potęgową postać z wykładnikiem w przedziale $(2;\infty)$.

Analizie podlegał też model reorientacji krawędzi. Z prawdopodobieństwem 1-r łączy się nowy węzeł z już istniejącym, natomiast z prawdopodobieństwem r zmienia się to przyłączenie na połączenie z węzłem-ancestorem (tj. węzłem, do którego dany węzeł był przyłączony, kiedy pierwszy raz został dodany do sieci). W rezultacie również osiągamy preferencyjne liniowo przyłączanie oraz potęgowy rozkład stopni.

Znaczenie analizy sieciowej

Rezultaty uzyskane w ramach nielosowego paradygmatu pozwoliły na ukształtowanie się nowej gałęzi mechaniki statystycznej, statystycznej mechaniki sieci złożonych. Jej dorobek śledzony jest z najwyższym zainteresowaniem nie tylko przez fizyków, chemików czy informatyków, lecz także przez socjologów, biologów i lekarzy. Coraz częściej też przez historyków, ekonomistów, prawników, psychologów czy pedagogów.

Zainteresowanie tak różnych dyscyplin naukowych analizą sieciową jest związane z coraz powszechniejszą koniecznością prowadzenia badań procesów masowych ujawniających obecnie swe znaczenie już nie tylko w systemach naturalnych czy technicznych, lecz także ekonomicznych, prawnych czy poznawczych. Oczywiście nauki społeczne od dawna badały sieci społeczne, ale dotąd studia te były ograniczone do niewielkich systemów ujmowanych statycznie. Natomiast analiza sieciowa pozwala badać sieci wielkorozmiarowe i ustalać specyfikę ich topologii i ewolucji.[11] Dzięki wykorzystaniu narzędzi informatyki, statystyki matematycznej i wizualizacji grafów jednoczesnej analizie może podlegać interakcja wielkiej liczby elementów o najróżnorodniejszych charakterystykach.

[11] A.-L. Barabasi, H. Jeong, Z. Nebeda, E. Ravasz, A. Schubert, T. Vicsek, *Evolution of the social network of scientific collaborations*, „Physica" A, 311(2002), p. 591.

Ta możliwość badawcza ma szczególne znaczenie dla nauk społecznych, szczególnie dla zrozumienia relacji pomiędzy poszczególnymi sferami systemu społecznego, w tym ***interakcji sfery ekonomicznej ze sferą prawną, polityczną, edukacyjną czy obyczajową oraz genezy instytucji***. Podejście sieciowe pomaga bowiem wyrwać się z pułapki metodologicznej skrywającej się w kontrowersji pomiędzy indywidualizmem a strukturalizmem.

Sieć ujawnia konstytutywną rolę relacji czynnej, interakcji aktorów. Człowiek uwikłany w sieć jest aktorem, zawsze uczestniczy w wielu pętlach samoregulującej się aktywności. Aktorzy są zawsze aktywni i zawsze są powiązani. Samoistne wydarzenia w jednej pętli oddziałują na inne pętle. Oddziałują korzystnie lub negatywnie, tworząc jednocześnie szanse i ograniczenia. Trajektoria ewolucji jednej sieci jest kształtowana przez strukturę sieci otaczających, w których ta sieć jest zanurzona, zakorzeniona. Presja jakiejś sieci może popychać inne sieci ku tej, a nie innej trajektorii.

Ekonomiści, prawnicy czy socjolodzy często są skłonni badać, jak funkcjonowanie określonej instytucji zazębia się z inną. Analiza sieciowa natomiast pozwala im skupić się na technicznych, ekonomicznych, prawnych, politycznych, edukacyjnych aspektach sytuacji. Umożliwia ujawnienie, że z pozoru błahy czynnik, interferując we wcześniejszym stadium procesu, zmienia jego przebieg. Ułatwia ukazanie faktu, że rozwój jest w istocie ścieżkozależny, czyli instytucje powstają i zmieniają się dzięki mobilizacji zasobów w sieci społecznej wytyczanej przez tło ograniczeń danych w wyniku poprzedzającego rozwoju historycznego.[12] Sama mobilizacja polega na wykorzystaniu przez aktorów szansy powiązania zasobów dotąd krążących w odrębnych fragmentach (klastrach) sieci.

Istotne zwroty w toku wydarzeń wiążą się z „byciem w odpowiednim miejscu w odpowiednim czasie". Skąd biorą się te „odpowiednie miejsca"? Na czym polega „odpowiedniość czasu"? Aby znaleźć odpowiedź na takie pytania, trzeba przejść od specyfikacji rodzajów społecznych relacji oddziałujących na relacje ekonomiczne do specyfikacji typów sieci współstanowienia (ko-konstytucji) trajektorii rozwoju. Nienowa przecież koncepcja, że relacje ekonomiczne są zanurzone w relacjach społecznych (politycznych, prawnych, obyczajowych, ideowych), rozwija się w analizie sieciowej w złożoną koncepcję ko-konstytucji, zgodnie z którą:

1) różne typy społecznych więzi mają znaczenie dla różnych typów relacji ekonomicznych;
2) różne typy społecznych relacji współoddziaływają w różny sposób na więzi ekonomiczne;
3) w określonej instancji należy ujmować więzi ekonomiczne jako o podstawę dla powstających powiązań społecznych;
4) więzi społeczne powodują powstanie możliwości i ograniczeń działalności ekonomicznej;
5) więzi społeczne odbijają tożsamość aktorów, która stanowi ramy adaptacji ich uprzedniego doświadczenia do nowej sytuacji.

Problem nie polega więc na tym, czy sieć jest ważna? Problem polega na określeniu, jaki rodzaj sieci jest związany z jakim efektem rozwoju.[13] Narzędzia analizy sieciowej,

---

[12] M. Granovetter, R. Swedberg, *The Sociology of Economic Life*, Boulder, CO: Westview Press, 2001, p. 23.
[13] E.J. Castilla, H. Hwang, E. Granovetter, M. Granoveter, *Social Networks in Silicon Valley*, www.stanford.edu/group/esrg/siliconvalley/docs/siliconvalleyedge.pdf, p. 246.

pozwalając na efektywne opracowywanie rozległych baz danych, umożliwiają ujawnianie w procesach społecznych swoistości konfiguracji podmiotów z różnych sektorów (edukacyjnego, przemysłowego, finansowego, politycznego, prawniczego itd.). Swoistości polegającej na określonej topologii sieci interakcji tych podmiotów, która powoduje szczególne krążenie ludzi, zasobów, transakcji, reguł, konwencji czy przekonań w społeczeństwie, krążenie będące jednocześnie ich ustawicznym formowaniem.