

H. MAŁASIEWICZ, G. STECZKO, J. ŚWIĄTEK*

Instytut Elektrotechniki Politechniki Częstochowskiej

** Instytut Fizyki WSP Częstochowa*

Modelowanie struktur ziarnistych elementów rezystancyjnych

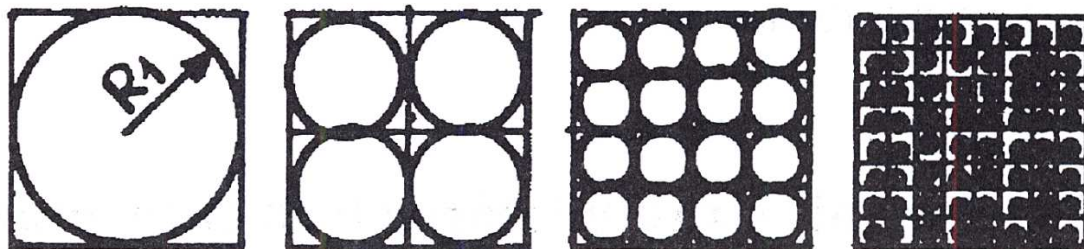
1. Wprowadzenie

Niezawodność układów elektronicznych związana jest bezpośrednio z niezawodnością jego podzespołów — w tym podzespołów rezystancyjnych. Rezystor uważa się za uszkodzony gdy jego rezystancja staje się nieskończenie wielka lub gdy następuje zmiana jego rezystancji poza dopuszczalne wartości. Podstawowym kryterium oceny niezawodności elementu rezystancyjnego będzie stabilność jego oporności. Badań niezawodności rezystorów nie można prowadzić bez rozpatrzenia jego mikrostruktury. W pracy tej, realizowanej w ramach CPBP 02.14 przedstawiono opis modeli struktur ziarnistych i oceniono ich własności elektryczne.

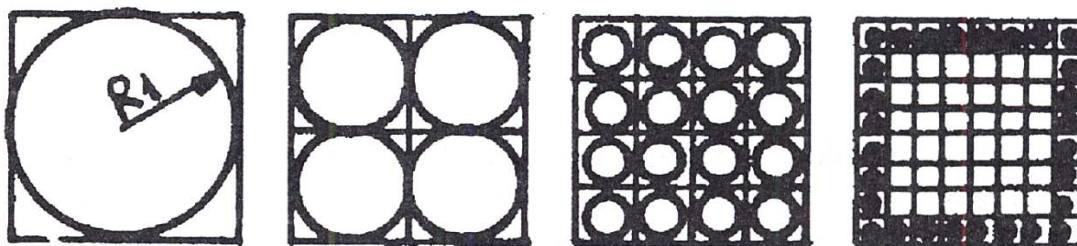
2. Struktury ziarniste rezystorów

Materiały rezystancyjne przeznaczone do wytworzenia rezystorów charakteryzujących się dość dużymi wartościami oporności otrzymuje się zazwyczaj jako kompozycje [1,2,3]. Najprostszą kompozycją będzie system dwufazowy — tj. kompozycja przewodzącej fazy w fazie izolacyjnej. Przyjmując, że kompozycja charakteryzuje się strukturą ziarnistą, opiszemy sposób tworzenia takiej struktury. W jednostkowy kwadrat wpisujemy okrąg o promieniu $R_1 = \frac{1}{2}$ (rys. 1a), następnie cztery okręgi o promieniu $R_2 = \frac{1}{4}$ (rys. 1b), szesnaście okręgów o promieniu $R_3 = \frac{1}{8}$ (rys. 1c) itd. Mówimy, że generujemy strukturę ziarnistą, w której po k -tej generacji otrzymamy $N_{kp} = 2^{2(k-1)}$ ziaren o promieniu $R_k = \frac{1}{2^k}$. Należy zauważyć, że podział ten chara-

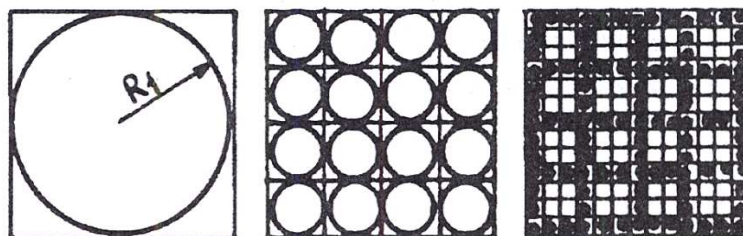
kteryzuje się stałym polem przekroju ziaren po kolejnych generacjach i wynosi $S_k = \frac{\pi}{4}$. Taką strukturę będziemy dalej nazywać strukturą gęsto upakowaną. Dalej zaproponowano rozpatrzenie dwóch modyfikacji takiej struktury — powierzchniową i okienkową. Na rys. 2 przedstawiono sposób tworzenia struktury powierzchniowej, a na rys. 3 — struktury okienkowej.



Rys. 1. Generacja struktury gęsto upakowanej



Rys. 2. Generacja struktury powierzchniowej



Rys. 3. Generacja struktury okienkowej

W modelu okienkowym przyjęto nieparzyste generacje z $k = 1, 3, 5, \dots$ celem zachowania ciągłości struktury ziarnistej. promienie ziaren przy tych podziałach wynoszą również $R_k = \frac{1}{2^k}$.

W k -tej generacji uzyskujemy $N_{kp} = 2^{(k+1)} - 4$ ziaren ($k = 2, 3, 4, \dots$) w strukturze powierzchniowej i $N_{kp} = (k-2)2^{(k+1)} - 4(k-2)^2$ ziaren ($k = 3, 5, 7, \dots$) w strukturze okienkowej. Pole przekroju zajmowane przez ziarna po k -tej generacji wynosi: a) dla struktury powierzchniowej:

$$S_k = N_{kp} \cdot \pi R_k^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2^{(k-1)}} - \frac{1}{2^{2(k-1)}} \right) \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (1)$$

b) dla struktury okienkowej

$$S_k = N_{kp} \cdot \pi R_k^2 = \pi \cdot \left(\frac{k-2}{2^{(k-1)}} - \frac{(k-2)^2}{2^{2(k-1)}} \right) \quad k = 3, 5, 7, \dots \quad (2)$$

gdzie: N_{kp} — ilość ziaren w przekroju struktury k-tej generacji

Podobnie można wyznaczyć objętość zajmowaną przez przewodzące ziarna, gdybyśmy rozpatrywali model w postaci jednostkowego sześcianu:

a) gęsto upakowany

$$V_k = N_{kv} \cdot \frac{4}{3}\pi R_k^3 = \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

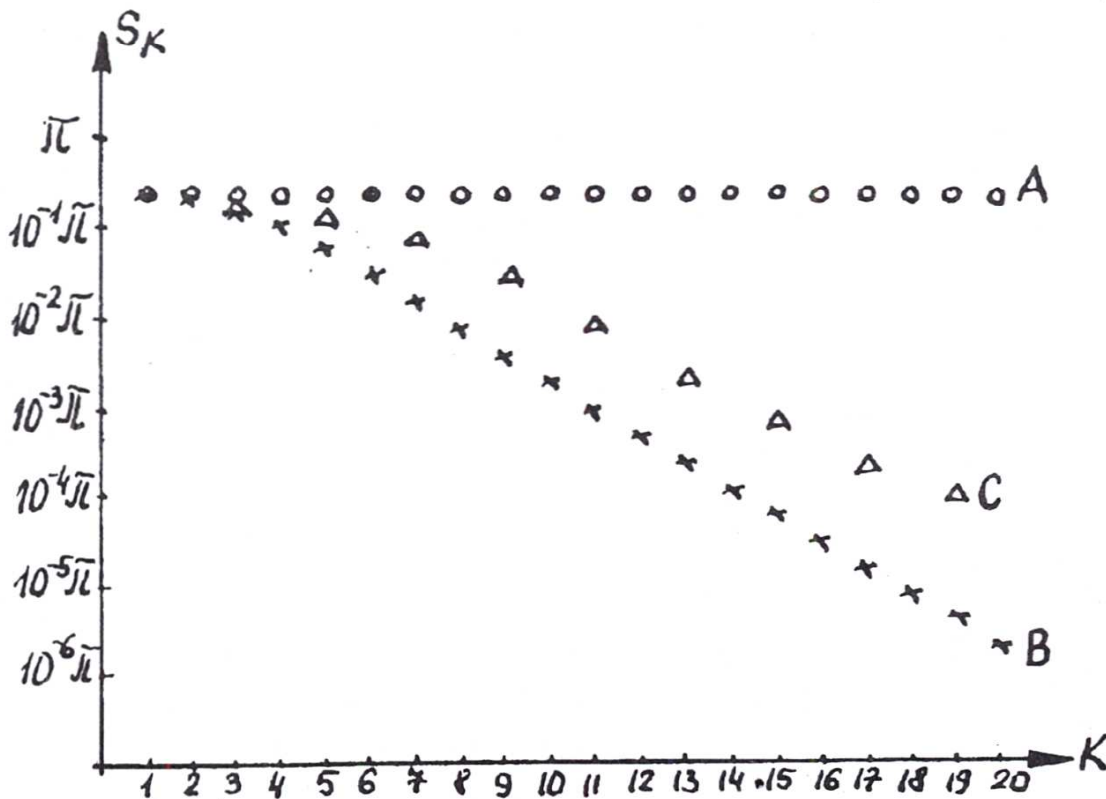
b) powierzchniowy

$$V_k = N_{kv} \cdot \frac{4}{3}\pi R_k^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{2^k - 2}{2^{2k}} \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (4)$$

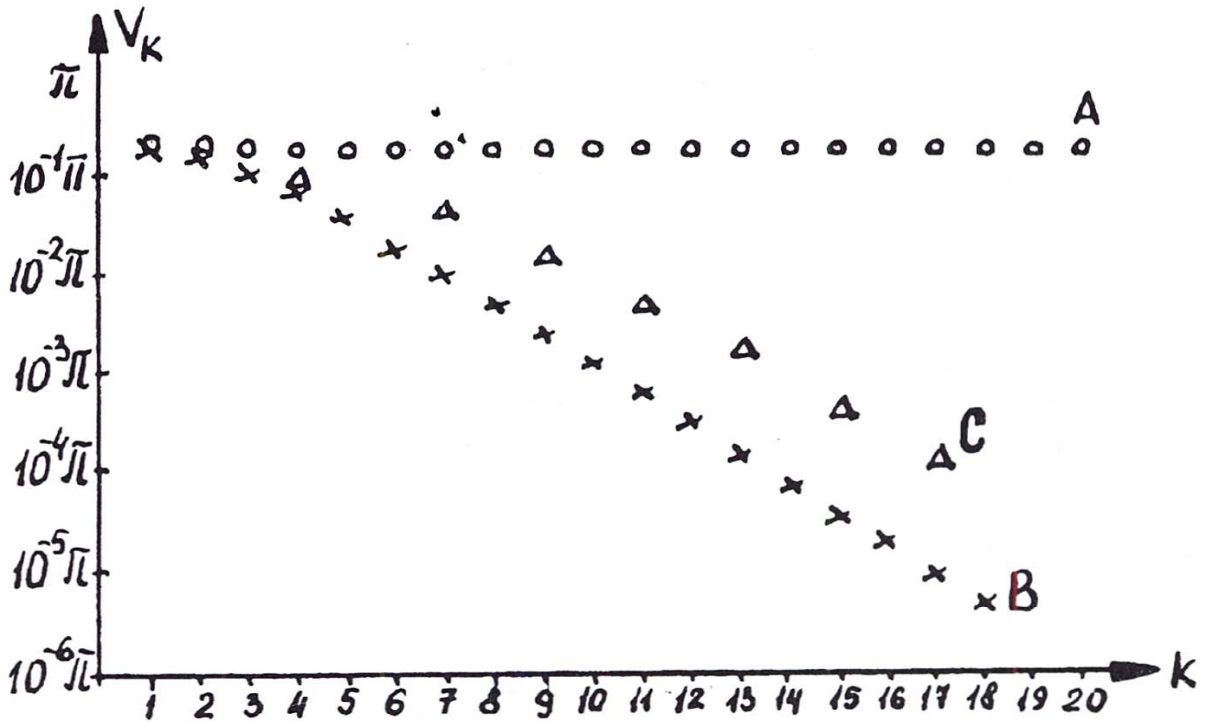
c) okienkowy

$$V_k = N_{kv} \cdot \frac{4}{3}\pi R_k^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{2^k (k-2) - 2(k-2)^2}{2^{2k}} \quad k = 3, 5, 7, \dots \quad (5)$$

Przebiegi $S_k = f(k)$ oraz $V_k = f(k)$ przedstawiono na rys. 4 i rys. 5.



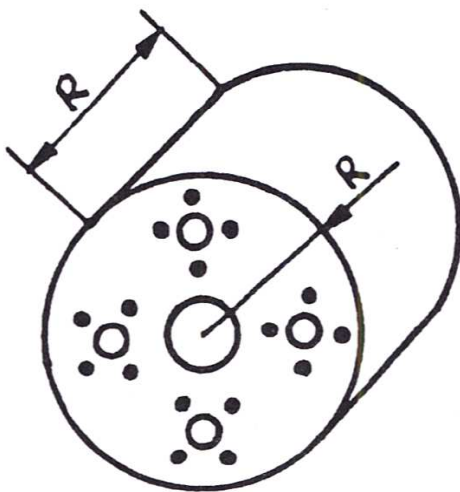
Rys. 4. Przebieg $S_k = f(k)$. Struktura ziarnista: A — gęsto upakowana; B powierzchniowa; C — okienkowa



Rys. 5. Przebieg $V_k = f(k)$ dla trzech struktur ziarnistych

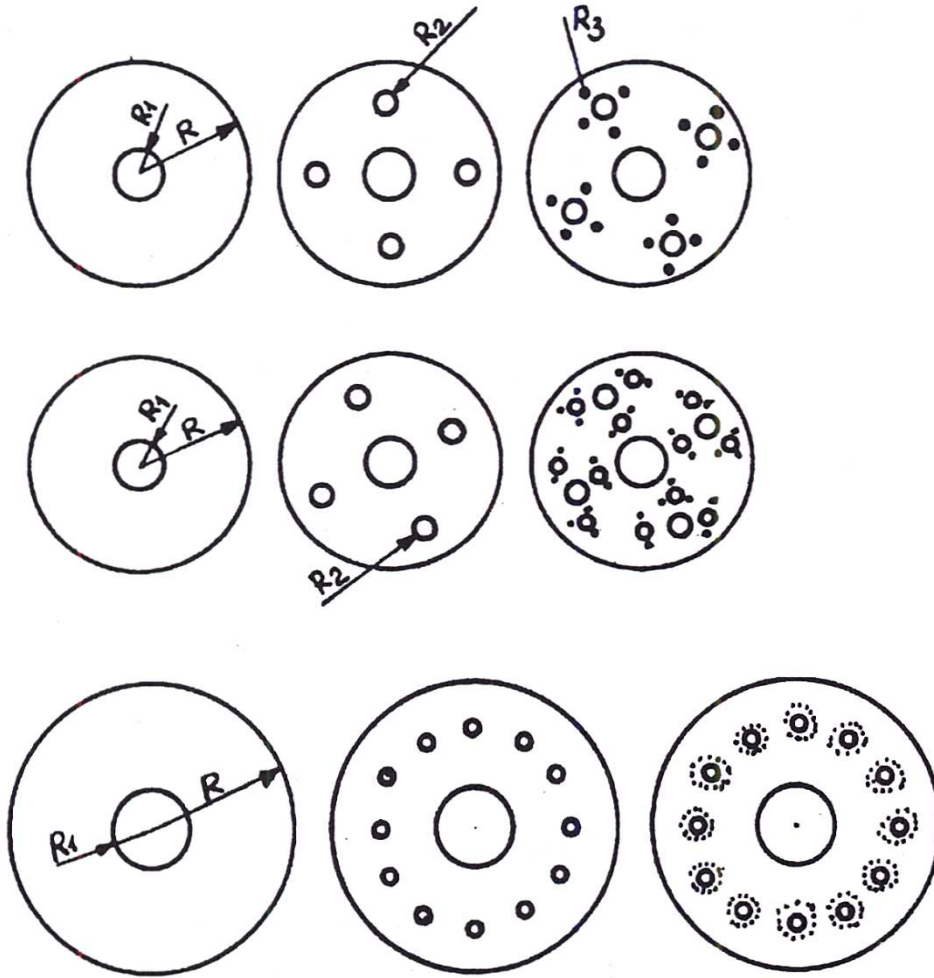
3. Opis matematyczny modelu struktury ziarnistej i jego zastępcza przewodność elektryczna

W pracy rozpatrzono wielostykowy model przestrzenny struktury ziarnistej rezystora składającego się z ziaren o coraz mniejszej średnicy z zachowaniem podobieństwa do struktur przedstawionych w poprzednim rozdziale. Model ograniczony jest powierzchnią walcową o promieniu podstawy R i wysokości R (rys. 6).



Rys. 6. Model walcowy rezystora

Generacji kolejnych ziaren dokonujemy przez powielenie struktury wyjściowej o coraz mniejszym przekroju ziaren. W podobny sposób tworzą fraktalne modele złącz metal – metal w pracach S. Jankowskiego i H. Gierasimowicza [4,5]. Generowane ziarna tworzą fazę rezystancyjną, pozostały obszar objętości walca zajmuje faza dielektryczna. Sposób tworzenia struktury modelu przedstawiono na rys. 7. Należy zaznaczyć, że przy pierwszej generacji tworzymy ziarno o promieniu $R_1 = \frac{R}{p}$, gdzie p będziemy nazywać współczynnikiem podziału. We wszystkich przypadkach ziarna mają po k -tej ge-



Rys. 7. Generowanie struktur modelu:
 a) gęsto upakowanej (model A);
 b) powierzchniowej (model B);
 c) okienkowej (model C).

neracji promień $R_k = \frac{R}{2^{(k-1)p}}$. Kolejne generacje tworzą przewodzące łańcuchy ziaren na długości R , których rezystancję wyznaczymy z następujących zależności:

$$\rho_{lk} = n_k \cdot r_k \quad (6)$$

gdzie: n_k — ilość ziaren na długości R ;
 r_k — rezystancja kontaktu między ziarnami.

Gdy występuje kilka łańcuchów ziaren z jednakową średnicą, to

$$\rho_{vk} = \frac{n_k \cdot r_k}{N_{kp}} \quad (7)$$

gdzie: N_{kp} — ilość ziaren przypadających na powierzchnię przekroju.

Wypadkową przewodność modelu po k -tej generacji wyznaczymy z wyrażenia:

$$G_c = \frac{1}{\rho_c} = \frac{1}{\rho_{v1}} + \frac{1}{\rho_{v2}} + \dots + \frac{1}{\rho_{vk}} \quad (8)$$

Wartości G_c dla poszczególnych struktur przedstawiają się następująco:

a) struktura gęsto upakowana

$$G_c = \frac{2}{pr_{k_1}} + \frac{4}{pr_{k_3}} + \frac{8}{pr_{k_5}} + \dots + \frac{2^k}{pr_{k_k}} \quad (9)$$

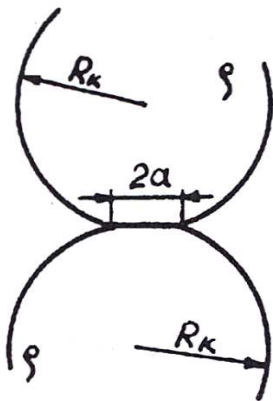
b) struktura powierzchniowa

$$G_c = \frac{2}{pr_{k_1}} + \frac{4}{pr_{k_2}} + \frac{6}{pr_{k_3}} + \dots + \frac{8}{pr_{k_k}} - \frac{4}{2^{(k-2)}pr_{k_k}} \quad (10)$$

c) struktura okienkowa

$$G_c = \frac{2}{pr_{k_1}} + \frac{2^4 - 4}{2pr_{k_3}} + \frac{2^8 - \frac{(2^4 - 1) \cdot 4}{9}}{2^3 pr_{k_5}} + \dots +$$

$$+ \frac{2^{2(k-1)} - \frac{[2^{(k-1)} - 1]^2 \cdot 4}{9}}{2^{(k-1)} pr_{k_k}} \quad k = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (11)$$



gdzie: r_{k_k} — rezystancja kontaktu ziaren o promieniu R_k .

W pracy [2] wyznaczono rezystancję kontaktu ziaren zakładając, że ziarna ulegają deformacji na granicy styku (rys. 8).

Przyjmując, że ziarna posiadają jednakową rezystancję ρ , oraz, że $R_k \gg a$, gdzie a — promień kontaktu, rezystancję kontaktu wyznaczymy następująco:

$$r_k = -\frac{\rho}{2a} \quad (12)$$

Rys. 8. Kontakt dwóch ziaren z deformacją

Promień kontaktu wyrażono w postaci [2]:

$$a = \left(\frac{3}{4} \pi \frac{P}{E} R_k^3 \right)^{1/3} = R_k \left(\frac{3}{4} \pi \frac{P}{E} \right)^{1/3} \approx 1,32 \left(\frac{P}{E} \right)^{1/3} \cdot R_k \quad (13)$$

gdzie: P — siła nacisku;

E — moduł sprężystości.

Ostatecznie wyrażenie na rezystancję kontaktu ziaren o promieniu R_k ma postać:

$$r_k = \frac{\rho}{2,64 \left(\frac{P}{E} \right)^{1/3} \cdot R_k} = \frac{A \cdot \rho}{R_k} \quad (14)$$

gdzie: $A = \frac{1}{2,64 \left(\frac{P}{E}\right)^{1/3}}$

Wstawiając wyrażenie (14) do (9), (10), (11) otrzymamy zależność na przewodność całkowitą modeli:

a) o strukturze gęsto upakowanej

$$G_c = \frac{2k \cdot R}{p^2 \cdot A \cdot \rho} \quad (15)$$

b) o strukturze powierzchniowej

$$G_c = \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{(k-3)} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{(2k-3)} \right] \cdot \frac{R}{p^2 A \rho} \quad k = 3, 4, 5, \dots \quad (16)$$

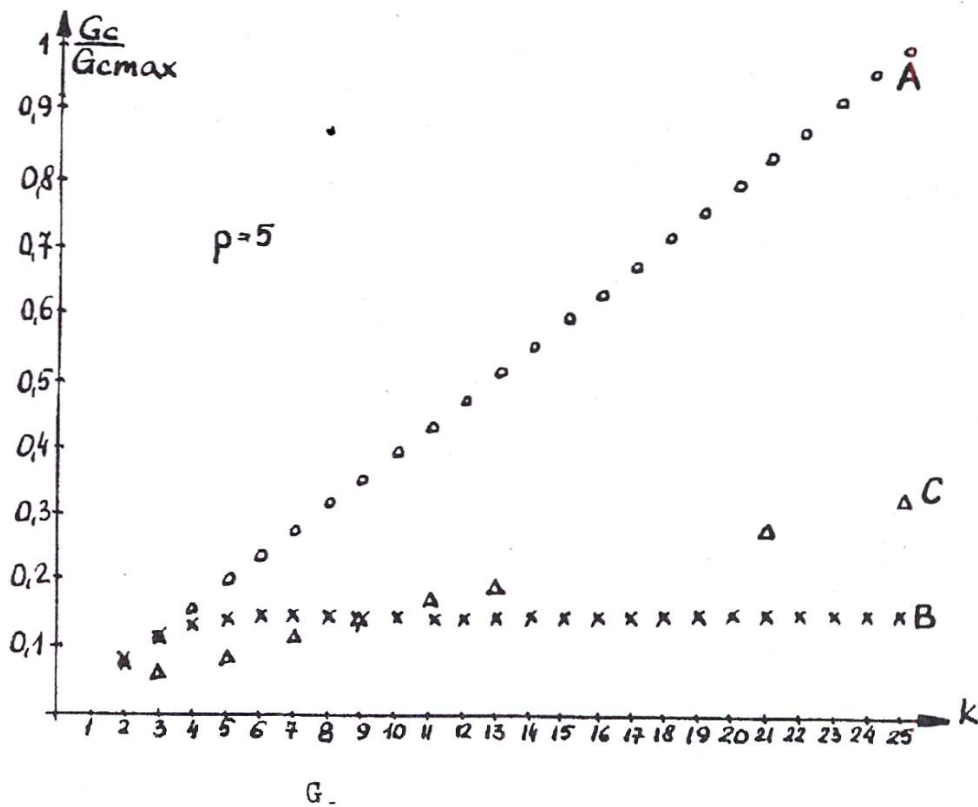
c) o strukturze okienkowej

$$G_c \cong \left[\frac{67 + 15k}{27} - \left(\frac{1}{2}\right)^{(k-5)} + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{(2k-1)} \right] \cdot \frac{R}{p^2 A \rho} \quad k = 5, 7, 9, \dots \quad (17)$$

Możemy stwierdzić, że przewodność wypadkowa nie zależy od promienia ziarna i rośnie wraz z liczbą k generacji struktur (za wyjątkiem struktury powierzchniowej, dla której wartość przewodności ustala się po kilku k). Należy zauważyć, że ilość generacji k jest ograniczona maksymalną powierzchnią przekroju modelowego rezystora, która wynosi πR^2 . Obliczono, że $k_{\max} = p^2$ dla struktury gęsto upakowanej oraz $k_{\max} = 3,7(p^2 - 1)$ dla struktury okienkowej. W modelu powierzchniowym przy dowolnym k nie dojdzie do wypełnienia powierzchni przekroju rezystora ziarnami przewodzącymi. Przebiegi $\frac{G_c}{G_{c \max}} = f(k)$ dla współczynnika podziału $p = 5$ przedstawiono na rys. 9. $G_{c \max}$ jest maksymalną przewodnością struktury gęsto upakowanej dla $k_{\max} = p^2$ i wynosi ona $G_{c \max} = -\frac{2}{A\rho}$

4. Podsumowanie

Modelowanie rezystorów za pomocą struktur ziarnistych winno stanowić bazę dla określenia jego niezawodności w różnych warunkach roboczych. W pracy przedstawiono trzy rodziny takich struktur o różnych polach przekroju ziarna i różnym upakowaniu objętościowym. Wyznaczone wyrażenia na przewodność modelowych rezystorów i wykreślono zależności G w funkcji stopnia powielenia struktury dla określonego współczynnika podziału. Potwierzono niezależność rezystancji modelowanej strukturami ziarnistymi od średnicy ziarna.



Rys. 9. Przebieg $\frac{G_c}{G_{cmax}} = f(k)$ dla trzech struktur ziarnistych

Literatura

- [1] J. Kotecki. Rezystory, WKŁ 1970.
- [2] B. Galperin. Nieprzewodzący rezystory. Energia 1968.
- [3] Elektroceramika. t. 1. PWN. Warszawa-Poznań. 1981. Wyd. PAN.
- [4] S. Jankowski. Materiały na IX K.K.T.O. i U.E. str. 233. 1986.
- [5] H. Gierasimowicz, S. Jankowski. Materiały na X K.K.T.O. i U.E. str. 395. 1987.