PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Seria: PSYCHOLOGIA z. VIII, 2000

Kazimierz KOTLARSKI
Katedra Psychologii, UMK w Toruniu

Nauczanie matematyki a zdolności matematyczne

Wstęp

Psychologów poznających szkolne zdolności matematyczne interesował związek między właściwościami matematyki a zdolnościami sprzyjającymi poznawaniu tej dyscypliny. W rozumieniu potocznym matematyka jest uważana za trudny przedmiot. Trudność polega na tym, że w jego opanowaniu nie wystarczy pracowitość, ale oprócz tego są konieczne specyficzne zdolności, które ułatwiają jego zrozumienie.

Matematyka zajmuje się zależnościami istniejącymi w świecie abstrakcji (Klime, 1975). Jednakże, jak to wykazują sami matematycy, matematyka jest mocno osadzona w praktyce i jej początki wywodzą się z bardzo konkretnych potrzeb życiowych. Działania ludzi, takie jak budownictwo, podział gruntów, czasu, prognozy astronomiczne czy handel, już w zamierzchłych czasach wymuszały stosowanie określonych pomiarów. Pomiary te zapoczątkowały geometrię i arytmetykę. Rodowód matematyki jest więc czysto praktyczny (Sawyer, 1970; 1974). Matematyka poprzez wieki nie przestawała być bardzo precyzyjnym narzędziem wykorzystywanym w różnych dziedzinach praktyki, np. obecnie w optyce, akustyce, astronomii, elektryczności, technice itp. Rozwinęła się ona w dyscyplinę stosującą metody dedukcyjne.

Uprawianie matematyki jako dyscypliny naukowej wymaga pewnych właściwości umysłu wspólnych wszystkim twórcom, natomiast inne właściwości umysłu są tylko specyficzne dla zajmowania się nią. Na pytanie, jakie? — próbowali odpowiedzieć niektórzy matematycy, będący uznanymi twórcami w swojej dziedzinie. Okazało się, że jest łatwiej dokonywać odkryć w matematyce, aniżeli badać, jak tych odkryć się dokonuje. W tym obszarze badań matematycy nie wyszli poza ogólne ustalenia dokonane przez psychologów postaci (por. Poincare, 1970).

Trudno odpowiedzieć na pytanie, co jest wspólnego w myśleniu twórczym matematyka i ucznia pasjonującego się matematyką.

Cechą wspólną twórczych matematyków jest pasja badawcza w zetknięciu się z problemami, których nie można rozwiązać w sposób stereotypowy, które skutecznie opierają się podejściom rutynowym i algorytmicznym. Owa cecha charakteryzuje także uczniów, których ta dyscyplina pochłonęła. Oni pasjonują się zadaniami, które opierają się rozwiązaniu, wymagają oryginalności w podejściu, inicjatywy i zastosowania metod, które trzeba znaleźć tylko w związku z tym zadaniem. Najbardziej typową cechą twórczych matematyków i uczniów pasjonatów matematycznych jest preferowanie rozwiązywania zadań nietypowych, wymagających śmiałości i oryginalności myślenia. Największą zaś satysfakcją, niezależnie od poziomu wtajemniczenia, jest znalezienie rozwiązań możliwie uogólnionych, a zarazem oryginalnych i prostych.

Czy tylko właściwości umysłu i przeżywanie określonych emocji towarzyszących rozwiązywaniu trudnych zadań decydują o zdolnościach matematycznych? Dalsza część artykułu będzie bardziej szczegółową próbą odpowiedzi na te pytania.

Matematyka jako przedmiot nauczania

Można o matematyce — jako o przedmiocie nauczania — powiedzieć, że rzadko kiedy uczniowie mają do niej stosunek obojętny. Matematykę można bardzo polubić albo jej się bać. Częściej pojawia się ta druga sytuacja. Powstaje pytanie, czym matematyka jako przedmiot nauczania różni się od innych przedmiotów i od czego zależy jej łatwiejsze lub trudniejsze uczenie się? W rozważaniach przedstawionych w tym miejscu chcę pominąć zagadnienie związku zdolności matematycznych z poznawaniem i uczeniem się matematyki, a skoncentrować się na innych czynnikach, które zdaniem matematyków i dydaktyków, często łączących te dwie specjalistyczne role w jednej osobie, mają związek z opanowywaniem tego przedmiotu. Są oni zdania, że matematyka w pewnej mierze niezasłużenie zdobyła opinię przedmiotu bardzo trudnego do opanowania. Czasem dzieje się tak w następstwie stosowania niewłaściwych metod nauczania. To właśnie te metody zniechęcają do uczenia się i sprawiają wrażenie, że matematyka jest przedmiotem trudnym i niezrozumiałym.

Powstaje pytanie, czy matematyka jest przedmiotem nauczania różniącym się od innych? W istocie rzeczy myślenie matematycznie nie jest inne niż myślenie w dziedzinach życia nie związanych z matematyką (Sawyer, 1974; Piaget, 1979). Jeżeli uczeń jest słaby w matematyce, a uzyskuje dobre wyniki w innych przedmiotach, to jest to spowodowane — zdaniem Piageta — nie treścią przedmiotu, a stosowaniem nieprawidłowych metod nauczania. Podobnie Polya nie szuka przyczyn trudności w poziomie zdolności uczniów, ale w samych nauczycielach matematyki. Pisze on, że jeżeli nauczyciel nie jest zafascynowany swym przedmiotem, to wątpliwe, by któregokolwiek z uczniów także nim zainteresował. Fascynacji powinna towarzyszyć kompetencja w tym przedmiocie. Sama kompetencja, która nie idzie w parze z zainteresowaniem tym, co się robi, wręcz z fascynacją, może doprowadzić do tego, że jest się złym nauczycielem (Polya, 1975).

Istnieje zgodność poglądów, że z logiką myślenia nie przychodzi się na świat. Kształtuje się ona podczas odpowiednich działań dziecka. Podobnie myślenie matematyczne kształtuje się w wyniku odpowiedniego treningu związanego z działaniem i eksperymentowaniem na przedmiotach. Zatem niepowodzenie w matematyce oznacza nic innego, jak brak w samym mechanizmie rozwoju umysłowego. Według Piageta normalny uczeń może poprawnie rozumować matematycznie, jeżeli się odwoła do codziennej aktywności. Na większości lekcji matematyki uczniowi narzucony jest dryl, który tłumi jego naturalną aktywność (Piaget, 1979). Podobnie wyraża to Sawyer, mówiąc, że ludzie w czasie swych normalnych zajęć używają takiego sposobu rozumowania, jaki jest w matematyce, tylko nie zdają sobie z tego sprawy. Różnice między uczniami dobrymi a słabymi w matematyce polegają na różnych sposobach przystosowania się do metod nauczania. Słabi uczniowie z matematyki, ale dobrzy z innych przedmiotów, prawdopodobnie uczyliby się matematyki lepiej, gdyby stosować inne metody nauczania. Matematycy-dydaktycy zgodnie podkreślają, że muszą być to metody aktywne. Polegają one na tym, że wychowanek nie uczy się materiału, lecz go odkrywa. Polya pisze, że w każdej sytuacji powinna być aktualna reguła: „niech uczniowie odkrywają sami tak dużo, jak jest możliwe w danych warunkach" (Polya, 1975, s. 296). Oczywiście samo rozwiązanie zadania może być pasjonujące, jeżeli nie będzie się uczniowi dawało gotowych zadań, a pomoże je samemu sformułować. Jeżeli zarazem zadanie to będzie miało związek z praktyką bliską uczniowi, wtedy z pewnością wzrośnie jego zaangażowanie w rozwiązanie takiego zadania. Matematyka staje się według Sawyera trudna dopiero wtedy, kiedy traci kontakt z codzienną praktyką.

Myślenie matematyczne kształtuje się w sposób naturalny, dzięki nabywaniu odpowiedniego doświadczenia i praktyki. Jeżeli tego doświadczenia zabraknie, wtedy są także kłopoty z przyswajaniem matematyki. Argumenty na rzecz tego, że tak jest rzeczywiście, można także przywołać z historii kultury. Jak zaobserwowali antropologowie, w niektórych plemionach prymitywnych ludzie potrafią liczyć do 25, a najbieglejsi z nich do 50. Tylko brak doświadczenia powoduje tak dramatyczne ograniczenia w posługiwaniu się liczbami (Lovell, 1961).

Poziom operacji matematycznych uczniów podejmujących naukę w klasie pierwszej szkoły podstawowej jest bardzo zróżnicowany. Przychodzą do szkoły z bardzo różnymi doświadczeniami. Jedni wyrobili sobie pojęcie liczby, potrafią wykonywać na przedmiotach operację dodawania i odwracalną w stosunku do dodawania operację odejmowania, a czasem dalsze działania, jak mnożenie i dzielenie. Operacje te niektórzy uczniowie mają zinternalizowane. Inni natomiast nie mają jeszcze kompletnie wyrobionego pojęcia liczby, nie potrafią przyporządkować zbiorowi nie przekraczającemu dziesięciu elementów odpowiedniej liczby. Umiejętność ta, jak również pojęcie liczby, kształtuje się u nich później. Uczniowie tacy od samego początku mają duże kłopoty z rozumieniem pojęć matematycznych i z internalizacją operacji. Na skutek tego przyswajają materiał z matematyki znacznie wolniej od rówieśników. Nie potrafią go w pełni zrozumieć i uczą się pamięciowo reguł matematycznych.

Kiedy poznajemy przedmioty inne niż matematyka, kolejność uczenia się jednych zagadnień nie ma na ogół większego wpływu na rozumienie i przyswajanie innych. Brak znajomości jednej partii materiału w historii nie utrudnia rozumienia innych zagadnień z tego przedmiotu. Natomiast jeżeli nie opanowało się arytmetyki, nie można przyswajać sobie algebry, brak znajomości algebry uniemożliwia zrozumienie rachunku różniczkowego. Matematyka jest jedynym przedmiotem, gdzie brak znajomości poprzedniego materiału utrudnia lub wręcz uniemożliwia poznawanie nowego. Nawet w fizyce brak znajomości jednego prawa, np. prawa Boyle'a-Mariotte'a, nie utrudnia rozumienia innego prawa, np. grawitacji. Poszczególne działy matematyki nie tylko opierają się na znajomości uprzednich, nie tylko poruszają nowe zagadnienia, ale bywają także stenograficznym zapisem poprzedniego działu. Tak jest z algebrą w stosunku do arytmetyki. Arytmetyka operuje w zadaniach tekstowych językiem werbalnym, w który uwikłane są liczby. Trzeba dokonywać na liczbach tych operacji, aby otrzymywać wynik końcowy. Jeżeli chce się wykonać to samo zadanie w języku algebry, trzeba dokonać przetłumaczenia zadania werbalno-liczbowego na język symboli algebry i na tych symbolach dokonywać transformacji zgodnie z regułami algebry. Tylko w ten sposób można rozwiązać zadania. Oczywiście ten drugi język jest bardziej abstrakcyjny i skondensowany aniżeli pierwszy. Poszczególne działy matematyki w stosunku do poprzednich nie tylko poruszają nowe zagadnienia, ale także zmieniają dotychczas stosowany język na bardziej abstrakcyjny i skondensowany aniżeli pierwszy. To jest właściwością matematyki nie spotykaną w nauczaniu innych przedmiotów, czasem odczuwaną przez młodych i dorosłych jako trudność wręcz nie do pokonania.

Jeżeli przyjmiemy teorię Pawłowa o I i II układzie sygnałowym, to w odniesieniu do matematyki wyższej możemy mówić o III układzie sygnałowym.

Dydaktycy zgodnie podkreślają, że jeżeli dzieci od samego początku spotykają się w matematyce z zadaniami nie mającymi nic wspólnego z ich potrzebami życiowymi, nie potrafiącymi zainteresować, to przedmiot ten zostanie uznany za nieciekawy, a zadania za bezużyteczne łamigłówki. Nie zawsze sama praktyka życiowa podsuwa uczniom ciekawe zagadnienia matematyczne. Nauczyciel musi je często sam wskazać, aby wywołać zainteresowanie i zaangażowanie uczniów. Znalezienie takich zadań, jak wykazują praktycy, angażuje całą klasę i nawet słabi uczniowie potrafią lepiej wtedy funkcjonować (Sawyer, 1970; Krygowska, 1977; Chrzan-Feluch, Semadeni, 1992; Puchalska, Semadeni, 1992).

Pojęcie liczby kształtuje się stopniowo, dzięki odpowiednim działaniom. Podczas ich przeprowadzania w wieku około sześciu lat dzieci odkrywają metodę operacyjną. Pozwala ona na uporządkowanie liczb według pewnych reguł, np. zgodnie z regułą wielkości. Działania na liczbach doprowadzają do odkrycia zasady stałości, to znaczy do uformowania się przeświadczenia, że zbiór o ilości n elementów pozostanie nim niezależnie od tego, jak jego elementy przegrupujemy w przestrzeni, czasie itp. Jednocześnie dziecko spostrzega, że każda operacja jest odwracalna, to znaczy, wykonując pewne działania na liczbach, można je skompensować przez operacje odwrotne i przywrócić pierwotny stan rzeczy (Piaget, Inhelder, 1967; Bruner, 1978). Zatem najlepszą sytuacją intelektualną dla dziecka rozpoczynającego naukę jest, gdy posiada ono pojęcie liczby, opanowało metodę operacyjną i rozumie zasadę niezmienności. Jednakże są to warunki niewystarczające do przyswojenia sobie matematyki.

Niektóre przyczyny niepowodzeń w opanowaniu matematyki

Istnieje jeden istotny czynnik związany z uczeniem się matematyki, czasem pomijany w pracach interesujących się intelektualnym aspektem zdolności. Chodzi o czynnik dojrzałości emocjonalnej. Ma on większy niż na ogół wskazywany wpływ na przyswajanie matematyki i kształtowanie się zdolności.

Dzieci mające kłopoty z uczeniem się w ogóle, a w szczególności z uczeniem się matematyki, przysłane do zbadania w poradniach psychologiczno-pedagogicznych, mają duże kłopoty z koncentracją uwagi. Nie mogą jej utrzymać dłużej na jednym bodźcu. Każdy inny rozprasza je, nie będąc zbyt długim źródłem stymulacji, ale jednocześnie skutecznie odwraca uwagę od poprzedniego. Badania wskazują, ze powodem rozproszonej uwagi są problemy emocjonalne. Często wynikają one z tego, że dziecko jest odrzucone w domu lub szkole. W związku z tym przeżywa permanentne napięcie nie pozwalające mu odpowiednio skoncentrować się na lekcji lub czymkolwiek innym. Tego typu dekoncentracja na lekcji matematyki skutkuje natychmiast. Niezrozumienie i brak przyswojenia jednej partii materiału nie pozwala na przyswojenie następnej. Zaczyna się ciąg niepowodzeń, z którymi nie potrafi sobie ono poradzić. Nauczyciel także staje się wobec niego bezradny, przypisując niepowodzenia „niższej" inteligencji. Zarówno promowanie, jak i niepromowanie takiego ucznia nie rozwiązuje jego problemów, bo pierwotne przyczyny niepowodzeń tkwią poza nim i od ich rozwiązania należałoby rozpocząć zmianę jego sytuacji szkolnej.

Zróżnicowany poziom dojrzałości intelektualnej do podjęcia nauki matematyki uwidacznia się w toku lekcji. Jedne dzieci są aktywne, rozumieją, o co chodzi, udzielają poprawnych odpowiedzi, prawidłowo rozwiązują zadania. Inne mają spore kłopoty ze zrozumieniem zależności przedstawionych w materiale, źle rozwiązują zadania, zaczynają nie lubić tego przedmiotu. Wytwarza się postawa lękowa wobec matematyki, którą będzie trudno w przyszłości zmienić. Dziecko zaczyna się bać wszystkiego, co jest związane z matematyką. Każdy lęk, zgodnie z prawem Yerkesa-Dodsona, kiedy przekracza optymalny poziom motywacji, wówczas dezorganizuje działanie. Niepowodzenia generują lęk, ten z kolei pogłębia niepowodzenia i dezorganizuje zachowanie. Niepowodzenia w matematyce, lęk i dezorganizacja wiążą się ze sobą w postaci dodatniego sprzężenia zwrotnego — jak przedstawia to Gruszczyk-Kolczyńska (1989). Dzieci zaczynają podejmować działania mające na celu zamiast rozwiązanie problemu — jego uniknięcie: usprawnienie technik odpisywania gotowych zadań od kolegów, ucieczka w chorobę, pozorowane rozwiązywanie zadania itp.

Niektórzy nauczyciele mają tendencję do przedwczesnej i błędnej diagnozy poziomu zdolności uczniów. Etykietują już po paru tygodniach nauki dziecko jako zdolne lub niezdolne. Zachowują się tak, aby każda sytuacja konfirmowała ich opinie. Popełniają wówczas w odniesieniu do części uczniów poważne błędy. Uznają ucznia zdolnego za niezdolnego i może nawet takiemu uczniowi w początkowych latach nauki szkolnej grozić niepromowanie z matematyki. W szkole średniej bywa, że dopiero po zajęciu czołowego miejsca na olimpiadzie matematycznej nauczyciel zmienia opinię o poziomie zdolności. Badania własne autora wykazały istnienie takich faktów (Kotlarski, 1995).

Sukcesy i niepowodzenia w nauce oddziałują nie tylko na sferę intelektualną, wpływając na tempo rozwoju, ale także na osobowość. Sukcesy wpływają na budowę pozytywnego obrazu samego siebie, porażki — negatywnego. O ile porażek będzie znacząco więcej od sukcesów, wtedy w obrazie swoich możliwości i umiejętności intelektualnych dają znać o sobie elementy negatywne. Uczeń utwierdza samego siebie w przekonaniu o niemożliwości zrozumienia matematyki i o swej nieumiejętności rozwiązywania zadań. Również jego koledzy, nauczyciel, rodzice wyrabiają sobie podobny pogląd. Dziecko utwierdza otoczenie, a otoczenie dziecko w mniemaniu, że ono nie potrafi nauczyć się matematyki, w tym rozwiązywania zadań. Do każdego zadania tekstowego dziecko podchodzi z przekonaniem, że go nie rozwiąże. Zachowuje się sztywno i biernie, a porażka jest elementem samo spełniającego się proroctwa. Zanim dziecko dojdzie do etapu bierności, przechodzi przez etap intensywnego przeżywania porażki. Nowe, efektywne metody uczenia się są skuteczne dopiero wtedy, kiedy podejmie się równocześnie działania mające na celu zmianę obrazu samego siebie. Bez tych zmian trudno zachęcić dziecko do aktywności matematycznej (por. Gruszczyk-Kolczyńska, 1989).

Jest rzeczą znamienną, że ucznia zdolnego matematycznie kształtuje również mechanizm dodatnich sprzężeń zwrotnych, którego istotnym ogniwem jest sukces. Najpierw odnosi on sukcesy na lekcjach matematyki. Spostrzega, że jest sprawniejszy od innych w rozwiązywaniu zadań. Dochodzi do przekonania, że jest dobry w tej dziedzinie. Podobne spostrzeżenia odbiera otoczenie i również uważa go za dobrego w matematyce i to mu komunikuje. Zaczyna on wierzyć w swoje możliwości. Zgodnie z teorią uczenia się czynność zakończona sukcesem jest odczuwana przez podmiot jako nagroda. Uczeń zaczyna poszukiwać czynności, które kończą się sukcesem. Następuje sprzężenie dodatnie między efektywnością działania, przeżywanymi z tego powodu emocjami pozytywnymi, obrazem samego siebie oraz percepcją podmiotu przez otoczenie. Każdy z tych czterech czynników wzmacnia pozostałe. Jeżeli zdarzą się sporadyczne niepowodzenia, nie są one w stanie zniszczyć mechanizmu sprzężeń zwrotnych, podobnie jak sporadyczne powodzenia nie zmieniają wiele w mechanizmie kreującym ucznia niezdolnego.

Jak wykazują doświadczenia własne autora, takie dodatnie sprzężenia zwrotne jest bardzo trudno rozerwać. Przede wszystkim trudno jest przekonać nauczyciela, który wierzy w brak zdolności dziecka, że należy zastosować zupełnie inne metody nauczania, a w ich ramach dać mu odpowiednie minimum doświadczeń pozytywnych. Chodzi o podważenie negatywnego obrazu samego siebie i wprowadzenie w to miejsce nowych, pozytywnych elementów. Dalej trzeba zmienić percepcję dziecka przez otoczenie. Niekiedy udaje się tego dokonać przez radykalne działania, takie jak zmiana szkoły, nauczycieli czy kolegów. Nie jest z reguły skuteczne, jeżeli źródłem trudności dziecka jest przede wszystkim środowisko domowe.

Zdolności matematyczne

Można postawić sobie pytanie, czy matematyka jako dyscyplina naukowa oraz przedmiot nauczania wymaga zdolności, które różnią się od dotychczas rozpoznanych zdolności? Tu trzeba sobie odpowiedzieć, że zdolności matematyków, jak dotąd, są nierozpoznane. Istnieją przesłanki pozwalające przypuszczać istnienie określonej struktury zdolności, ale empirycznie nie zostały one udowodnione. Jest jedna zasadnicza trudność w prowadzeniu badań. Badanie takie mogłoby być przeprowadzone przez specjalistów będących jednocześnie wybitnymi matematykami i psychologami. Takich specjalistów brakuje.

Jak dotąd wiadomo, istnieją różne typy myślenia matematycznego. Matematyka rozwija się podobnie jak każda inna nauka w sposób lawinowy. Powstają nowe specjalizacje matematyczne. Twórców pasjonuje swoja specjalizacja, do innej specjalizacji mogą odczuwać wręcz awersję. Odkryć można dokonywać w wąskiej specjalizacji, zatem twórcy ograniczają się przede wszystkim do swej specjalizacji. Matematyk interesujący się szerokim zakresem swej wiedzy z tego powodu odkrywcą nie zostanie.

Cechą wspólną twórców jest łatwość przekładu swego problemu zamiennie z języka symboli na język graficzny lub język obrazu. Jedni matematycy preferują rozwiązywanie problemów ze swej dziedziny w sposób geometryczny, nawet problemów algebraicznych. Inni nawet problemy z geometrii przestrzennej rozwiązują w sposób algebraiczny.

Łatwiej aniżeli zdolności matematyków można było poznać zdolności matematyczne uczniów. Znaczącą pracą w tej dziedzinie jest publikacja Werdelina (1958). Autor, stosując analizę czynnikową, wydzielił w zdolnościach matematycznych następujące komponenty: przestrzenny, logiczny, liczbowy i symboliczny. Te z kolei w wyniku dalszej analizy podzielił na prostsze subczynniki.

W sposób znaczący obraz struktury zdolności matematycznych przybliżył nam Krutiecki wraz ze swoim zespołem. Zastosował on wieloetapową procedurę. Polegała ona na tym, że najpierw określił on hipotetycznie, analizując właściwości intelektualne grupy uczniów bardzo zdolnych, jakie komponenty składają się na szkolne zdolności matematyczne. Następnie do znanych nauczycieli matematyki i dydaktyków przesłał swoją listę komponentów, prosząc o uporządkowanie listy według ważności. Następnie wybrał, podobnie jak Werdelin, listę zadań, które wykrywały wśród badanych istnienie określonych komponentów zdolności matematycznych.

Autor przyjął, że szkolne zdolności matematyczne przejawiają się przede wszystkim w rozwiązywaniu zadań. Krutiecki założył dalej, iż etapy rozwiązywania problemów matematycznych są podobne do etapów rozwiązywania problemów niematematycznych. Zatem poszczególne komponenty zdolności matematycznych obserwuje się na poszczególnych etapach rozwiązywania zadań.

Psychologowie analizujący rozwiązywanie problemów przedstawiają różną ilość etapów ich rozwiązania. Co do jednej rzeczy są zgodni, że wśród tych etapów muszą wystąpić następujące:

1. Spostrzeżenie problemu — podmiot, chcąc osiągnąć określony cel, zauważa, że go nie osiągnie, dysponując aktualnymi informacjami,
2. Analiza sytuacji problemowej — uświadomienie sobie, jakie informacje trzeba zdobyć, aby rozwiązanie było możliwe,
3. Generowanie pomysłów rozwiązania, czyli wytworzenie hipotez lub informacji pozwalających na przedstawienie rozwiązania lub rozwiązań,
4. Weryfikacja pomysłów — jest to sprawdzenie, która hipoteza, rozwiązanie czy pomysł, są prawdziwe.

Autor założył, że szkolne zdolności matematyczne wiążą się z rozwiązywaniem zadań matematycznych. Podobnie jak psychologowie przedstawiający rozwiązywanie problemów autor przyjął, że rozwiązywanie problemów matematycznych składa się także z kilku etapów. Pierwszym etapem jest *percepcja informacji matematycznej w sposób sformalizowany*. Odpowiada ona etapowi dostrzegania problemu w zadaniach o charakterze niematematycznym. Zadanie matematyczne składa się według Polyii (1964) z danych, niewiadomej i warunku. Niewiadoma jest zawsze podana wprost, jest to wielkość, którą trzeba znaleźć. Dane są wielkościami liczbowymi lub stosunkami między nimi. Warunek mówi, jak przekształcić dane, aby uzyskać niewiadomą. Dane, szukana i warunek tworzą strukturę zadania, którą Krutiecki nazywa zespołem wzajemnie ze sobą powiązanych wielkości. Ten to zespół musi uczeń odkryć zanim przystąpi do rozwiązywania zadań.

Drugim etapem jest etap *przetwarzania informacji matematycznej*, który odpowiada mniej więcej etapowi drugiemu i trzeciemu rozwiązywania problemów. Przy przetwarzaniu informacji występują zgodnie z badaniami rosyjskiego psychologa następujące komponenty zdolności matematycznych:

1. Logiczne myślenie na materiale symboli matematycznych,
2. Zdolność do uogólnienia tego materiału, czyli umiejętność takiej klasyfikacji rozwiązywanych zadań, aby każde z nich można było — na podstawie jego ogólnego schematu rozwiązania — zaliczyć do jakiejś dużej grupy ogólnej,

3. Rozumowanie strukturami zredukowanymi (pomijanie niektórych etapów rozwiązywania zadania, wykonanie tego etapu „w myśli"),
4. Giętkość myślenia, czyli znalezienie jakościowo innych sposobów rozwiązywania problemu,
5. Rozwiązania ekonomiczne, czyli wytwarzanie rozwiązań najprostszych, jasnych,
6. Zamiana toku myślenia, czyli umiejętność szybkiej zmiany nastawienia z jednego sposobu rozwiązywania na inny, jakościowo odmienny od poprzedniego.

Trzeci etap dotyczy *przechowywania informacji matematycznej*. Jego istota polega na tym, że zdolny matematycznie uczeń zapomina nieistotne szczegóły zadania, a pamięta jego uogólnione wzory, schematy rozwiązywania i przekształcenia.

Opisane powyżej komponenty zgodnie z logiką etapów rozwiązywania zadań tworzą wg Krutieckiego zdolności matematyczne (Krutiecki, 1968; 1976).

Krutiecki badał zdolności matematyczne uczniów w średnim wieku szkolnym. Jego zespół badał zarówno dzieci w młodszym wieku szkolnym (Dubrowina, 1966; 1973), jak i w starszym wieku szkolnym (Szapiro, 1977). Na ich podstawie okazało się, że w młodszym wieku szkolnym komponenty te nie występują tak wyraźnie. Dystans między dziećmi zdolnymi a mniej zdolnymi nie jest taki wyraźny. W miarę upływu czasu dystans ten się coraz bardziej pogłębia i staje się coraz większy.

Znany jest powszechnie spór, nie do końca wyjaśniony, na ile inteligencja mierzona testowo jest cechą zależną od czynnika genetycznego, a na ile od środowiskowego. Podobnie sprawa ma się ze zdolnościami matematycznymi. Niektórzy uważają, że zdolności te są darem natury, inni, że są owocem ciężkiej pracy. Przywołajmy w tym miejscu opinie specjalistów na ten temat. Bembow (1984; 1990) twierdzi, że zdolności matematyczne w dużej mierze są darem natury, która — biorąc pod uwagę płeć — okazała się bardziej łaskawa dla mężczyzn. Matematycy będący zarazem dydaktykami, jak Polya i Sawyer, unikają w swoich pracach rozważań na ten temat. Podkreślają przede wszystkim ważność metod uczenia matematyki. Metody te mogą budzić zainteresowanie lub je gasić i od nich zależy, w jakim stopniu uczniowie opanują matematykę. Krutiecki wypowiada się na ten temat explicite i twierdzi, że każdy przeciętny uczeń może opanować matematykę na poziomie podstawowym i średnim. Natomiast wybitnym matematykiem trzeba się urodzić. Jest to bowiem dar natury.

Dydaktycy zwracają uwagę na następujący fakt. Jeszcze na początku stulecia rachunek różniczkowy był wykładany na matematycznych studiach doktoranckich, później był wykładany na studiach matematycznych, a jeszcze później znalazł się w programie starszych klas szkoły średniej. Świadczy to o tym, jak zmiany metod nauczania mogą przyspieszyć opanowanie trudnego materiału matematycznego.

Zakończenie

Krutiecki w swojej pracy nie zaliczył do struktury zdolności matematycznych komponentów funkcjonujących poza systemem poznawczym — mam na myśli przede wszystkim motywację. Co prawda podkreśla on w swojej pracy, że uczeń zdolny matematycznie jest niezwykle silnie motywowany do rozwiązywania zadań. Zadania, szczególnie trudne zadania traktuje on jako wezwanie dla siebie (Krutiecki, 1968, 378 – 384). Trzeba tutaj podkreślić, że emocje wywołane zainteresowaniem zadaniami, a szczególnie przeżycie sukcesu przy rozwiązaniu jest niezwykle ważnym elementem towarzyszącym zdolnościom. Bez komponentu emocjonalnego nie ma szans na rozwijanie się zdolności matematycznych.

Dydaktycy, będący jednocześnie matematykami, twórcami, unikają dyskusji, czy zdolności te są wrodzone. Podkreślają natomiast, że w nauczaniu matematyki duże znaczenie mają metody, które budzą ciekawość ucznia i pozwalają przeżyć mu sukces, wynikający z tego, że sam potrafi odkryć określone zależności i rozwiązać zadanie. Bardziej uogólniając przedstawiony w niniejszej pracy temat, można powiedzieć, że na sukces w matematyce składają się trzy nieodłączne elementy. Jednym z nich jest posiadanie określonych właściwości umysłu przedstawionych jako współistniejące komponenty zdolności matematycznych. Wykazują to badania prowadzone metodą analizy czynnikowej. Drugim elementem jest motywacją, dzięki której uczeń uzyskuje dużą satysfakcję z rozwiązywania zadań. Tej informacji dostarczają nam wywiady z uczniami zdolnymi oraz obserwacja ich pracy. Trzecim elementem zewnętrznym w stosunku do dwu poprzednich są metody nauczania, które pobudzają zainteresowanie, wyzwalają motywację do zajmowania się matematyką. Udowodniły to eksperymenty dydaktyków. Jak wykazują badania tylko te trzy elementy występujące łącznie prowadzą do rozwoju zdolności matematycznych.

Matematyka jako nauka stawia umysłowi uczonego bardzo ściśle określone wymagania opisane na początku pracy. Nie znamy dokładnie, tylko ogólnikowo, właściwości umysłu, które pomagają tym wymaganiom sprostać. Matematyka jako przedmiot nauczania również stawia umysłowi ucznia bardzo konkretne wymagania. Porównując te wymagania z komponentami zdolności matematycznych, można powiedzieć, że istnieje tu pewna odpowiedniość. Aby odnieść sukces w matematyce i z powodzeniem rozwiązywać zadania, trzeba posiadać określone komponenty tworzące te zdolności. Pozostaje nadal pytaniem, na które dają różne odpowiedzi dydaktycy, jak te komponenty tworzyć i rozwijać przez nauczanie tego przedmiotu. Tu trzeba stwierdzić i to jest także ważne, że bardziej wiemy, co należy robić, aby nie blokować rozwoju zdolności matematycznych.

Bibliografia

Benbow C.P., Benbow R.M. (1984), *Biological correlates of high mathematical Reasoning ability*, „Progres in Brain Research", 61, 469 – 490.

Benbow C.P. (1990), *Sex differences in mathematical*, in: W. Wieczerkowski, T. Prado (eds), Hochbegabte Möthien: Bonn, Verlag Karl Henrich Bock.

Bruner J.S. (1978), *Rozwój umysłowy*, [w:] J.S. Bruner, *Poza dostarczone informacje*, Warszawa: PWN

Chrzan-Feluch B., Semadeni Z. (1992), *Cechy wielkościowe*, [w:] *Nauczanie początkowe matematyki*, Z. Semadeni (red.), t. 2, Warszawa: WSiP.

Dubrowina J.W. (1966), *Indywidualnyje razliczija w sposobnosti k obobszczeniju u dietiej Mładszego szkolnogo wozrasta*, „Voprosy Psichołogii", 5, 123 – 137.

Dubrowina J.W. (1973), *K woprosu o spiecyficznosti sposobnostiej młodszego szkolnika*, [w:] W.A. Krutiecki (red.), *Voprosy psichołogii sposobnostiej*, Moskwa: Izd. Piedagogika.

Gruszczyk-Kolczyńska E. (1989), *Dlaczego dzieci nie potrafią się uczyć matematyki*, Warszawa: IWZZ.

Kline M. (1975), *Podstawy matematyki*, [w:] „Problemy", nr 54, 45 – 57.

Kotlarski K (1995), *Kariery edukacyjne uczniów zdolnych i mniej zdolnych matematycznie*, Toruń: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Toruńskiego.

Krutiecki W.A. (1968), *Psichołogia matiematiczieskich sposobnostiej szkolnikow*, Moskwa: Proswieszczenije.

Krutetskii V.A. (1976), *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, Chicago: The University of Chicago Press.

Krygowska Z. (1977), *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 3, Warszawa: WSiP.

Lovell K. (1961), *The growth of mathematical and scientific concepts on children*, London: University of London Press.

Piaget J., Inhelder B. (1967), *Operacje umysłowe i ich rozwój*, [w:] P. Fraisse, *Inteligencja*, Warszawa: PWN.

Piaget J. (1979), *Nauczanie matematyki a rozwój dziecka*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria II, Wiadomości Matematyczne, XXII.

Poincare H. (1970), *Mathematical creation*, in: *Creativity*, P.E.Vernon (ed.), London: Penguin Books.

Polya G. (1975), *Odkrycie matematyczne*, Warszawa: WN-T.

Puchalska E., Semadeni Z. (1992), *Wieloaspektowość pojęcia liczby naturalnej*, [w:] *Nauczanie początkowe matematyki*, Z.Semadeni (red.), t. 2, Warszawa: WSiP.

Sawyer W.W. (1970), *Ściezki wiodące do matematyki*, Warszawa: PWN.

Sawyer W.W. (1974), *Matematyka nauką przyjemną*, Warszawa: WP.

Szapiro S.J. (1973), *Psichołogiczieskij analiz struktury matiematiczeskich sposobnostiej w starszem szkolnom wozrastie*, [w:] W.A. Krutiecki (red.), *Voprosy psichołogii Sposobnostiej*, Moskwa: Izd. Piedagogika.

Werdelin J. (1958), *The mathematical ability. Experimental and factorial studies*, Copenhagen: CWK., Glerup Einar Marisgaar, Lund.

Kazimierz KOTLARSKI

Learning of mathematics and mathematical ability

Summary

In the first part of the article is an analysis of the properties of mathematics as a teaching subject. Mathematics as a teaching subject has its specifity that differs it from other sciences. First of all mathematics is more abstract, logic and coherent. Moreover it is imposible as well as dealing with other topics, to know next section, being not acquaited with previous section, which is the basic to understand the next one. On account of it there exist peculiar reason of the fail in teaching mathematics, which are discussed in the next part of the article.

The third part of the work presents the structure of mathematical ability discovered on the base of factorial analysis. The analysis of this structure shows, that there exist a specific convergence between mathematics as subiect of teaching and intellectual properties of a pupil's mind mathematically gifted.

The last part it is a conclusion that includes the assertion that mathematical abilities are created not only by existence of specifical components of mind but also by occurence of adequate motivation and applaing of active method of teaching of mathematics.