Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka III, Częstochowa 1995/96

Nadreálná čísla

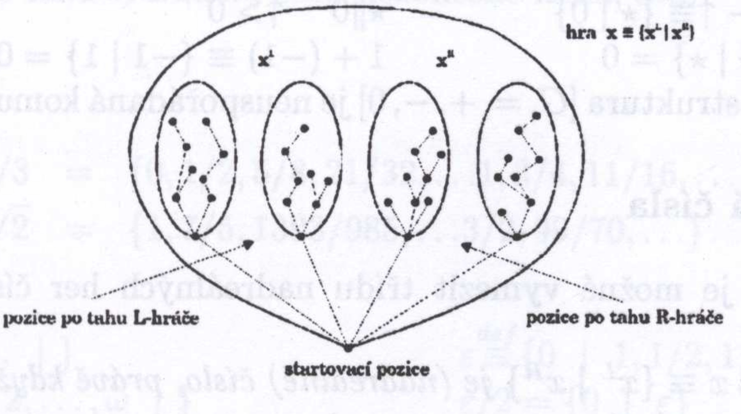
Jiří Cihlář

1. Ideové zdroje teorie nadreálných čísel

- Dedekind konstruuje reálná čísla z racionálních čísel tímto způsobem: Rozkládá racionální čísla do dvou množin A, B (každé číslo z A je menší než libovolné číslo z B) a tento „řez" — uspořádaná dvojice množin $\{A \mid B\}$ — je užit k definici nových čísel. Je to konstrukce směrem dovnitř, číselná množina se zahušťuje.

- Cantor (von Neumann) konstruuje ordinální čísla tak, že každé z nich chápe jako množinu čísel již dříve zkonstruovaných, např. $2 = \{0, 1\}, \omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, atd. Toto je konstrukce směrem ven, číselná třída se rozšiřuje.

- Některé speciální hry mezi dvěma hráči mohou být reprezentovány pomocí logických stromů:



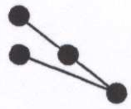
L-hráč může táhnout v každé pozici jenom nalevo, R-hráč pouze napravo. Hráči se pravidelně střídají, jestliže hráč nemá žádný možný další tah, pak prohrál.

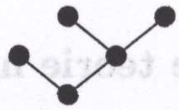
Conway chápe každou hru jako uspořádanou dojici množin již dříve zkonstruovaných her (tzv. levé subhry označujeme x^L, pravé x^R).

2. Hry jako matematické objekty

Konstrukce 1 *Jsou-li L a R dvě množiny her, pak $\{L \mid R\}$ je hra. Všechny hry jsou zkonstruovány tímto způsobem.*

Příklady 1

 $\equiv 0 \equiv \{\mid\}$  $\equiv 1 \equiv \{0 \mid\}$  $\equiv 2 \equiv \{0,1 \mid\}$

 $\equiv \star \equiv \{0 \mid 0\}$  $\equiv -1 \equiv \{\mid 0\}$  $\equiv\ \uparrow\ \equiv \{0 \mid \star\}$

Tato konstrukce spojuje oba výše zmíněné konstrukční přístupy (Dedekindův i Cantorův), třída her se současně „zahušťuje" i „rozšiřuje".

Definice 1 (Opačná hra) $-x \equiv \{-x^R \mid -x^L\}$

Definice 2 (Součet her) $x+y \equiv \{x^L+y, x+y^L \mid x^R+y, x+y^R\}$

Na třídě her G lze definovat i relace $>$, $<$, $\|$, $=$ tak, že mají tyto strategické interpretace:

$x > 0 \iff$ existuje vyhrávající strategie pro L-hráče
$x < 0 \iff$ existuje vyhrávající strategie pro R-hráče
$x \parallel 0 \iff$ existuje vyhrávající strategie pro hráče, který táhne jako první
$x = 0 \iff$ existuje vyhrávající strategie pro hráče, který táhne jako druhý

Příklady 2

$-\star \equiv \star \quad -\uparrow \equiv \{\star \mid 0\}$ $\qquad \star \| 0 \quad \uparrow > 0$

$\star + \star \equiv \{\star \mid \star\} = 0$ $\qquad 1 + (-1) \equiv \{-1 \mid 1\} = 0$

Lze dokázat, že struktura $[G, =, +, -, 0]$ je neuspořádaná komutativní grupa.

3. Nadreálná čísla

V třídě her G je možné vymezit třídu nadreálných her čísel **No** touto definicí:

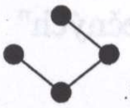
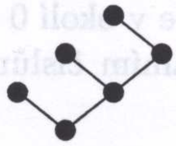
Definice 3 *Hra $x \equiv \{x^L \mid x^R\}$ je (nadreálné) číslo, právě když každá subhra x^L a x^R je číslo a platí:*

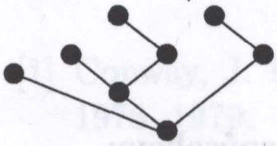
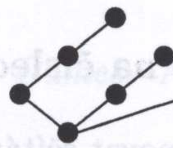
$$(\forall x)(\forall y) \quad x^L < x^R .$$

Je pak možné dokázat, že pro každé číslo $x \equiv \{x^L \mid x^R\}$ platí, že

$$(\forall x)(\forall y) \quad x^L < x < x^R .$$

Příklady 3

 $\equiv 1/2 \equiv \{0 \mid 1\}$  $\equiv 1/4 \equiv \{0 \mid 1/2\}$

 $\equiv 3/4 \equiv \{0, 1/2 \mid 1\}$  $\equiv -3/4 \equiv \{-2 \mid -1, 0\}$

Na třídě nadreálných čísel **No** je možné definovat násobení čísel a invertování čísla těmito definicemi:

Definice 4 (Součin čísel)

$$\begin{aligned} x \cdot y \equiv \{&x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid \\ &\mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\} \end{aligned}$$

Definice 5 (Inverzní číslo) *Pro kladné číslo* x :

$$y \equiv \frac{1}{x} \equiv \left\{ 0, \frac{1 + (x^L - x) y^R}{x^L}, \frac{1 + (x^R - x) y^L}{x^R} \right| \left| \frac{1 + (x^L - x) y^L}{x^L}, \frac{1 + (x^R - x) y^R}{x^R} \right\}$$

Je možn'e pak dokázat, že struktura $[\mathbf{No}, =, <, +, -, \cdot, 1/, 0, 1]$ je lineárně uspořádané komutativní těleso, je možné definovat odmocninu z kladných čísel a jiné další funkce. Toto těleso obsahuje všechna čísla reálná, všechna čísla ordinální, čísla nekonečně malá, atd.

Příklady 4

$$\begin{aligned} 2/3 &= \{0, 1/2, 5/8, 21/32, \ldots 1, 3/4, 11/16, \ldots\} \\ \sqrt{2} &= \{1, 7/5, 1393/985, \ldots 3/2, 99/70, \ldots\} \end{aligned}$$

$\omega \overset{def}{\equiv} \{0, 1, 2, \ldots \mid \}$

$\omega + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega \mid \}$

$\omega - 1 = \{0, 1, 2, \ldots \mid \omega\}$

$\omega - 2 = \{0, 1, 2, \ldots \mid \omega, \omega - 1\}$

$\omega + 1/2 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega \mid \omega + 1\}$

$\omega - 1/2 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega - 1 \mid \omega\}$

$\omega/2 = \{0, 1, 2, \ldots \mid \omega, \omega - 1, \omega - 2, \ldots\}$

$\omega/4 = \{0, 1, 2, \ldots \mid \omega/2, \omega/2 - 1, \ldots\}$

$\sqrt{\omega} = \{0, 1, 2, \ldots \mid \omega, \omega/2, \omega/4, \ldots\}$

$\varepsilon \overset{def}{\equiv} \{0 \mid 1, 1/2, 1/4, \ldots\}$

$\varepsilon/2 = \{0 \mid \varepsilon\}$

$\varepsilon/4 = \{0 \mid \varepsilon, \varepsilon/2\}$

$\varepsilon^2 = \{0 \mid \varepsilon, \varepsilon/2, \varepsilon/4, \ldots\}$

$2 \cdot \varepsilon = \mid 1, 1/2, 1/4, \ldots\}$

$3 \cdot \varepsilon = \{2\varepsilon \mid 1, 1/2, 1/4, \ldots\}$

$\sqrt{\varepsilon} = \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots \mid \mid 1, 1/2, 1/4, \ldots\}$

$1/\varepsilon = \omega$

atd.

Je velmi zajímavé, jak bohatá je struktura nadreálných čísel, jak mnoho „infinitezimálních" čísel je v okolí 0 (a tedy i v okolí libovolného čísla), jak se oproti běžným ordinálním číslům obohatila struktura „nekonečných" čísel, atd.

4. Ordinální operace na číslech

Na třídě čísel **No** lze definovat sčítání a násobení i jiným způsobem:

Definice 6 (Ordinální součet)

$$x \oplus y \equiv \{x^L, x \oplus y^L \mid x^R, x \oplus y^R\}$$

Definice 7 (Ordinální součin)

$$x \odot y \equiv \{x \odot y^L \oplus x^L, x \odot y^R \oplus x^R \mid x \odot y^L \oplus x^R, x \odot y^R \oplus x^L\}$$

Je dokazatelné, že tyto operace mají tytéž vlastnosti jako obvyklé ordinální operace (neutrální vlastnosti prvků 0 a 1, asociativnost obou operací, distributivitu pouze zleva, nekomutativnost obou operací, atd.).

Pokud parcializujeme tyto operace na třídu ordinálních čísel **On**, která je vymezena v rámci **No** definicí:

Definice 8 *Číslo x je ordinálním číslem, právě když $x \equiv \{x^L \mid\}$ a subhry x^L jsou všechna ordinální čísla menší než x,*
získáme obvyklou uspořádanou strukturu ordinálních čísel $[\mathbf{On}, \equiv, <, \oplus, \odot, 0, 1]$.

Ordinální operace na třídě **No** pak dávají obecnější zajímavé výsledky:

$1 \oplus (-1) = 1/2$	$1 \oplus (-2) = 1/4$	$1 \oplus (-3) = 1/8$	$1 \oplus (-\omega) = \varepsilon$
$1/2 \oplus 1 = 3/4$	$1/2 \oplus 2 = 7/8$	$1/2 \oplus 3 = 15/16$	$1/2 \oplus \omega = 1 - \varepsilon$
$\varepsilon \oplus 1 = 2 \cdot \varepsilon$	$\varepsilon \oplus 2 = 3 \cdot \varepsilon$	$\varepsilon \oplus 3 = 4 \cdot \varepsilon$	$\varepsilon \oplus \omega = \sqrt{\varepsilon}$
$\omega \odot 1/2 = \omega - 1$	$\omega \odot 1/4 = \omega - 2$	$\omega \odot 1/8 = \omega - 3$	$\omega \odot \varepsilon = \omega/2$
$1/2 \odot 1 = 1/2$	$1/2 \odot 2 = 5/8$	$1/2 \odot 3 = 21/32$	$1/2 \odot \omega = 2/3$
$1/4 \odot 1 = 1/4$	$1/4 \odot 2 = 9/32$	$1/4 \odot 3 = 73/256$	$1/4 \odot \omega = 2/7$

Literatura

[1] Conway, J. H.: *On Numbers and Games.* Academic Press, London, 1976, 1979.

[2] Cihlář J.,–Vopravil V.: *Hry a čísla.* Pedagogická fakulta, Ústí nad Labem, 1983.