Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie

Matematyka III, Częstochowa 1995/96

Jisté násobení e–variet ortodoxních pologrup je asociativní

Martin Kuřil

1. Polopřímý součin regulárních pologrup

Nechť S je pologrupa. Nechť a, b jsou prvky z S. Prvek b je inverze k a, jestliže $aba = a$, $bab = b$. Budeme označovat $V(a)$ množinu všech inverzí k a v S.

Jestliže pro každý prvek $a \in S$ existuje nějaké $x \in S$ takové, že $axa = a$, pak S je regulární. Ekvivalentně: S je regulární tehdy a jen tehdy, když množina $V(a)$ je neprázdná pro každé $a \in S$.

Nechť $E(S)$ označuje množinu všech idempotentů z S, tj. množinu všech prvků a z S splňujících

$$a \cdot a = a.$$

Pologrupa S se nazývá ortodoxní pologrupa, jestliže je regulární a $E(S)$ je podpologrupa v S, a S je inverzní pologrupa, jestliže $\operatorname{card}(V(a)) = 1$ pro každé $a \in S$. Jediná inverze k a je označována jako a'. Platí:

$$(a')' = a, \ (ab)' = b'a'$$

pro všechna $a, b \in S$. Je dobře známo, že S je inverzní pologrupa tehdy a jen tehdy, když je regulární a každé dva idempotenty z S komutují.

Množina všech endomorfismů pologrupy S je označována jako End$S$. Množina End$S$ s kompozicí zobrazení tvoří pologrupu.

Nechť T je inverzní pologrupa, nechť φ je homomorfismus pologrupy T do pologrupy End$S$. Položme

$$S \times_\varphi T = \{(s,t) \in S \times T \mid \varphi(tt')(s) = s\}$$

a pro $(s,t), (u,v) \in S \times_\varphi T$ definujme

$$(s,t) \cdot (u,v) = (\varphi(tvv't')(s) \cdot \varphi(t)(u), t \cdot v) .$$

Tato definice je přímou modifikací definice polopřímého součinu pologrupy s regulární involucí a lokálně inverzní pologrupy s regulární involucí, kterou podává Polák v [4], pro případ pologrup bez explicitně dané unární operace.

LEMMA 1 *([3], 2.1) $S \times_\varphi T$ s výše definovaným násobením je pologrupa.*

LEMMA 2 *([3], 2.2) Jestliže S je regulární, pak $S \times_\varphi T$ je také regulární.*

2 Násobení e–variet regulárních pologrup

Pro každou třídu V regulárních pologrup budeme označovat $H(V)$, $S_r(V)$ a $P(V)$ třídu všech homomorfních obrazů, regulárních podpologrup a přímých součinů pologrup z V.

Třída V regulárních pologrup splňující

$$H(V) \subset V,\ S_r(V) \subset V \text{ a } P(V) \subset V$$

se nazývá e–varieta. Pojem e–varieta zavedl Hall v [1]. Současně a nezávisle Kad'ourek a Szendrei v [2] uvažovali e–variety ortodoxních pologrup, které nazývali bivariety ortodoxních pologrup.

Soubor všech e–variet regulárních pologrup tvoří úplný svaz vzhledem k inkluzi. Pro studium struktury tohoto svazu je účelné zkoumat operátory na něm. Jeden takový operátor jsem zavedl v [3] a zde připomenu jeho definici.

Nechť U je e–varieta regulárních pologrup a V je e–varieta inverzních pologrup. Nyní definujeme násobení $\square$ následujícím způsobem:

$$U \square V$$

je nejmenší e–varieta regulárních pologrup obsahující všechny pologrupy

$$S \times_\varphi T,$$

kde S je z U, T je z V, φ je homomorfismus T do End$S$.

Korektnost definice je založena na lemmatu 2.

3 Formulace nového výsledku

Jednoduchým novým výsledkem je toto tvrzení:

Lemma 3 *Jestliže S je inverzní, pak $S \times_\varphi T$ je také inverzní.*

Vzniká přirozená otázka, zda násobení e–variet regulárních pologrup definované v části 2 je asociativní. Odpověď je za jistých předpokladů pozitivní a je obsahem následujícího nového výsledku (z lemmatu 3 ihned vyplývá, že levá strana níže uvedené rovnosti má smysl).

Věta 1 *Nechť U je e–varieta ortodoxních pologrup a V, W jsou e–variety inverzních pologrup. Pak*

$$U \square (V \square W) = (U \square V) \square W.$$

References

1. T. E. Hall, *Identities for existence varieties of regular semigroups,* Bull. Austral. Math. Soc. 40 (1989), 59–77

2. J. Kad'ourek and M. B. Szendrei, *A new approach in the theory of orthodox semigroups,* Semigroup Forum 40 (1990), 257–296

3. M. Kuřil, *A multiplication of e–varieties of orthodox semigroups,* submitted to Archivum Mathematicum

4. L. Polák, *A multiplication on the lattice of varieties of ∗–regular semigroups,* to appear in Proceedings of Luino International Conference on Semigroups