



Andrzej Roman

*Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie
al. Armii Krajowej 13/15, 42-200 Częstochowa
e-mail: a.roman@ajd.czyst.pl*

STRATY WYWOŁANE PRZEZ PRĄDY WIROWE W ANIZOTROPOWYCH MATERIAŁACH MAGNETYCZNYCH PRZY ODKSZTAŁCONYM PRZEBIEGU INDUKCJI – METODA KOLEJNYCH REAKCJI PRĄDÓW WIROWYCH

Streszczenie. W artykule określono straty wywołane przez prądy wirowe, przy uwzględnieniu zjawiska wypierania prądu przy odkształconym przebiegu indukcji. W modelach anizotropowych materiałów magnetycznych Poliwanowa i Pry'a, Beana określono straty wywołane przez prądy wirowe, zakładając sinusoidalny przebieg strumienia. W praktyce często występują przypadki, że indukcja jest odkształcona. W pracy wykorzystując model Poliwanowa, określono – stosując metodę kolejnych reakcji prądów wirowych – straty wywołane przez prądy wirowe przy odkształconym przebiegu indukcji. Obliczona pierwsza składowa prądów wirowych pozwala określić wpływ zjawiska wypierania prądu na straty wywołane przez prądy wirowe. Odkształcony przebieg indukcji rozłożony został w szereg Fouriera i dla każdej harmonicznej określono przenikalność zespoloną i wartość strat.

Słowa kluczowe: anizotropowe materiały magnetyczne, straty z prądów wirowych, odkształcona indukcja.

DETERMINATION OF THE EDDY CURRENT LOSSES IN ANISOTROPIC MAGNETIC MATERIALS WITH DEFORMED INDUCTION - METHOD OF SUCCESSIVE REACTIONS OF THE EDDY CURRENT

Abstract. The work deals with calculating eddy current losses in anisotropic magnetic materials. When determining power losses in anisotropic materials using the Polivanov, Pry and Bean models, a sinusoidal magnetic flux is assumed. In practice, there occur

cases when the induction is deformed. In this work we calculated losses from eddy currents using the Polivanov model of anisotropic magnetic metal plate and some other assumptions. The influence of the skin effect on eddy current losses was determined using method successive reactions of the eddy current losses. The deformed induction response was expanded into a Taylor series and the complex permeability as well as the losses were calculated separately for each harmonic. The total losses are the sum of the losses for individual harmonics.

Keywords: anisotropic magnetic materials, eddy current losses, deformed induction.

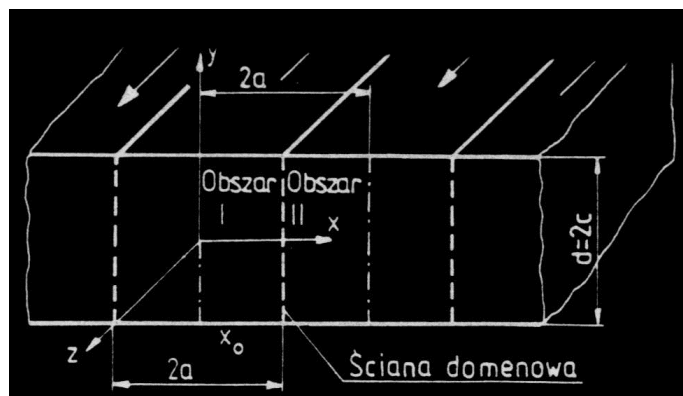
Wstęp

Przy obliczaniu strat wywołanych przez prądy wirowe zakłada się, że przebieg napięcia zasilającego jest sinusoidalny. Często jednak w praktyce zdarza się, że przebiegi prądu i napięcia nie są sinusoidalne. W przypadku, gdy występują odbiorniki nieliniowe, np. urządzenia elektroniczne, energoelektroniczne przebiegi czasowe prądu i napięcia są odkształcone. Powszechność stosowania tych urządzeń powoduje, że problem przebiegów odkształconych stał się zjawiskiem powszechnym. Każdy okresowy przebieg niesinusoidalny można przedstawić zgodnie z analizą Fouriera, w postaci sumy szeregu składowych sinusoid o różnych częstotliwościach.

W artykule określono, stosując metodę kolejnych reakcji prądów wirowych, wykorzystując model Poliwanowa [1] elektrotechnicznej blachy anizotropowej, straty wywołane prądami wirowymi przy odkształconym przebiegu indukcji. Przy dotychczasowych obliczeniach strat [1, 2, 3, 4] zakładano sinusoidalny przebieg indukcji i natężenia pola. W praktyce natomiast zdarza się, że indukcja jest odkształcona. Wykorzystując model i zależności na przenikalność zespoloną podane przez Poliwanowa, określono dla każdej harmoniczej przenikalność zespoloną i wartość strat. W artykule przyjęto założenia określone przez Poliwanowa, że wartość indukcji nie jest duża i w związku z tym wychylenie ściany nie jest duże. Wykorzystując zależność podaną w artykule [5], całkowitą wartość strat wywołanych przez prądy wirowe określono jako sumę strat mocy wywołanych przez poszczególne harmoniczne.

Założenia

Przenikalność magnetyczną anizotropowej blachy elektrotechnicznej określono przy założeniu, że płaskie ściany Blocha rozdzielają domeny antyrównoległe (rys. 1). Szerokość domeny wynosi $2a$, natomiast grubość blachy $d=2c$. Warunki brzegowe przyjęto takie, jak w modelu Poliwanowa.



Rys.1. Przekrój modelu domenowego anizotropowej blachy elektrotechnicznej [2]

Metoda kolejnych reakcji prądów wirowych

Ze względu na znaczny wpływ zjawiska wypierania prądu na przenikalność zespoloną, zwłaszcza przy wyższych częstotliwościach, rozwiązano równanie przewodnictwa, które opisuje to zjawisko. Obliczenia wykonano dla przedstawionego poprzednio modelu wielodomenowego.

Wpływ zjawiska wypierania prądu można określić wychodząc z zależności:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} H = -\gamma \frac{\partial B}{\partial t} \quad (1)$$

Mając na uwadze, że:

$$B = \mu_0 H + J \quad (2)$$

gdzie: μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni,

J - wektor polaryzacji magnetycznej

i korzystając z tego, że w obrębie domen polaryzacja się nie zmienia, otrzymuje się wyrażenie dla natężenia pola magnetycznego $H = H \mathbf{1}_z$ (gdzie $\mathbf{1}_z$ wektor jednostkowy osi z) w postaci równania przewodnictwa. Rozwiązanie tego równania pozwala na określenie wpływu zjawiska wypierania prądu.

Stosując znaną w literaturze metodę kolejnych reakcji prądów wirowych, pole H można przedstawić w postaci:

$$H = H_0 + H_1 + \dots + H_m + \dots \quad (3)$$

przy czym składowa H_0 spełnia równanie Laplace'a, podczas gdy kolejne składowe spełniają równanie

$$\nabla^2 H_{m+1} = \mu_0 \gamma \frac{\partial H_m}{\partial t} \quad (4)$$

które przy danym H ma postać równania Poissona. Łatwo sprawdzić, że wyznaczone w ten sposób pole H spełnia równanie przewodnictwa. Wektor gęstości prądu dla poszczególnych składowych jest określony równaniem

$$j_m = \text{rot} H_m \mathbf{1}_z \quad (5)$$

a całkowity wektor gęstości prądu j jest równy

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_1 + \dots + \mathbf{j}_m + \dots \quad (6)$$

Całkowity wektor gęstości prądu j powinien spełniać wszystkie warunki brzegowe.

W celu określenia zależności $\bar{\mu} / \mu$ (gdzie $\bar{\mu}$ jest szukaną przenikalnością zespoloną, a μ przenikalnością przy niskiej częstotliwości, określoną jako początkowa, statyczna przenikalność) założono, że ściany domenowe poruszają się równoległe do położenia spoczynkowego i ich przemieszczenie nie jest duże i jest proporcjonalne do średniej wartości natężenia pola magnetycznego.

Natężenie pola magnetycznego wzdłuż ściany rozgraniczającej domeny zmienia się w miarę oddalania się od powierzchni blachy. Średnie natężenie pola można wyznaczyć, odejmując od wartości pola zewnętrznego całkę składowej y wektora gęstości prądu (całkowanej od y do c):

$$H_{sr} = \frac{1}{c} \int_0^c \left[H_0 + \int_y^c \gamma (E_x)_{x=a} dy \right] dy, \quad (7)$$

stąd

$$H_{sr} = H_0 - \frac{\gamma}{c} \int_0^c \left[\int_y^c \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x=a} dy \right] dy. \quad (8)$$

Obliczoną z tej zależności wartość natężenia pola H_0 podstawiono do równania (4), otrzymując

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} = \mu \mu_0 \gamma \frac{\partial H_0}{\partial t}. \quad (9)$$

Posługując się metodą rozdzielania zmiennych, określono natężenie pola H_1 , które spełnia równanie (9). Całkowite natężenie pola uwzględniając pierwszą składową reakcji prądów wirowych określone jest wzorem:

$$H_0 + H_1 = \sum_{n=1,3..}^{\infty} [A_n \cosh \lambda_n x + B_n \sinh \lambda_n x] \cos \lambda_n y \quad (10)$$

gdzie:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{2c}, \quad A_n = M_n + K_n - j \frac{\theta^2 M_n}{4n^2 \pi^2}, \quad B_n = j \frac{\theta^2 M_n}{2n\pi d}, \quad (11)$$

$$M_n = \frac{4jad\omega\mu_0 B_{sr} (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2 \pi^2 \sinh \lambda_n a}, \quad K_n = -j \frac{\theta^2 M_n}{4n^2 \pi^2} \left(1 + \frac{2n\pi a}{d} \operatorname{ctgh} \lambda_n a \right)$$

Wprowadzając do wzoru zależności na θ i δ

$$\theta^2 = 4c^2 \omega \mu_0 \gamma \quad \delta = \frac{a}{2c}$$

obliczona przenikalność zespolona określona jest wzorem:

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{1}{1 + j\theta^2 \delta \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{16}{n^3 \pi^3} \left[\operatorname{ctgh} \lambda_n a - j \frac{\theta^2}{2n^2 \pi^2} \left(\frac{n\pi \delta}{\sinh^2 \lambda_n a} + \operatorname{ctgh} \lambda_n a \right) \right]} \quad (12)$$

$$= \mu_1 - j\mu_2.$$

Określenie przenikalności przy odkształconym przebiegu indukcji

Aby określić przenikalność przy odkształconym przebiegu indukcji, zakłada się, że indukcja B określona jest wzorem

$$B = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} B_{k0} e^{j\alpha}, \quad (13)$$

$$B_{k0} = |B_{k0}| e^{j\varphi_k}.$$

gdzie: k – numer kolejnej harmonicznej.

Dla każdej harmonicznej określa się wartość przenikalności zespolonej.

Postępując podobnie jak w punkcie 3, określono wartości przenikalności zespolonej dla następujących harmonicznych:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mu}}{\mu} &= \frac{1}{1 + j\theta^2 \delta \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{16k}{n^3 \pi^3} \left[\operatorname{ctgh} \lambda_n a - j \frac{\theta^2}{2n^2 \pi^2} \left(\frac{n\pi\delta}{\sinh^2 \lambda_n a} + \operatorname{ctgh} \lambda_n a \right) \right]} \\ &= \mu_1 - j\mu_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Straty z prądów wirowych przy odkształconym przebiegu indukcji

Straty wywołane przez prądy wirowe k-tej harmonicznej określone są zależnością:

$$P_{kw} = \frac{1}{\gamma} \int_V |\mathbf{j}_k|^2 dV, \quad (15)$$

gdzie \mathbf{j} jest wektorem gęstości prądu, γ jest konduktywnością, a V obszarem całkowania.

Uwzględniając zależność:

$$|\mathbf{j}_k|^2 = \mathbf{j}_k \circ \mathbf{j}_k^* = \gamma^2 \operatorname{grad} \Phi_k \circ \operatorname{grad} \Phi_k^* \quad (16)$$

oraz wykorzystując wzór (14):

$$B_{kss} B_{kss}^* = \frac{\bar{\mu}_k \circ \bar{\mu}_k^*}{\mu^2} |B_{k0}|^2. \quad (17)$$

można określić straty wywołane przez prądy wirowe przez każdą harmoniczną. Wykorzystując wzór na straty (15) oraz wykonując całkowanie po obszarze V , określono straty wywołane przez poszczególne harmoniczne k :

$$P_{kw} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{32a^2 \omega^2 \gamma k^2}{n^4 \pi^4 \sinh^2 \lambda_n a} \circ |B_{k0}|^2 \frac{\bar{\mu}_k \bar{\mu}_k^*}{\mu^2} \{F_n \sinh 4\lambda_n a - G_n \cosh 4\lambda_n a - L_n\}. \quad (18)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{n\pi}{2} \left(1 + \frac{\theta^4}{4n^4\pi^4} \right) \left(1 + \frac{2n\pi a}{d} \operatorname{ctgh} \lambda_n a \right)^2 + \frac{\theta^4 \delta^2}{2n\pi} + \frac{\theta^4}{8n^3\pi^3} \\
 G_n &= \frac{n\pi}{2} \left(\frac{\theta^4 \delta}{2n^2\pi^2} \right) \left(1 + \frac{2n\pi a}{d} \operatorname{ctgh} \lambda_n a \right) + \frac{\theta^4 \delta}{4n^2\pi^2} \\
 L_n &= \frac{\theta^4 \delta}{2n^2\pi^2} \left(1 + \frac{2n\pi a}{d} \operatorname{ctgh} \lambda_n a \right) + \frac{\theta^4 \delta^2}{4n^2\pi^2}
 \end{aligned} \tag{19}$$

W artykule [5] wykazano, że straty całkowite są sumą strat wywołanych przez poszczególne harmoniczne. Wykorzystując tę zależność, określono straty całkowite prądów wirowych.

Wnioski

W artykule określono wpływ zjawiska wypierania prądu na straty wywołane przez prądy wirowe przy założeniu odkształconej indukcji, wykorzystując model Poliwanowa i obliczoną wartość przenikalności zespolonej (przy uwzględnieniu pierwszej składowej reakcji prądów wirowych). W przypadku, gdy przyrost strat przekracza 10% strat liczonych bez uwzględnienia zjawiska wypierania prądu, należy uwzględnić drugą reakcję prądów wirowych, której wpływ będzie wówczas zauważalny.

Straty można określić dla dowolnej harmonicznej dla arbitralnie przyjętych wartości indukcji. Metodę można wykorzystać dla określonego przebiegu odkształconego i określić wartość strat pochodzących od prądów wirowych.

Literatura

- [1] Poliwanow K. M., Dinamiczeskie charakteristiki ferromagnetikow. Izwiestia Akademii Nauk 1952, Fizika XVI, nr 4, s. 449–464.
- [2] Pry R. H., Bean C. P., Calculation of the energy loss in magnetic sheet materials using a domain model. Journal of Applied Physics 1958, vol. 29, s. 532–533, DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1723212>
- [3] Alberts L., Bishop J. E. L., Lee E. W., The behavior of ferromagnetic sheets in alternating electric and magnetic sheet. Proc. Roy. Soc. A 1963, 276, s. 112–124.

- [4] Roman A., Pole elektromagnetyczne w materiałach magnetycznie miękkich o uporządkowanej strukturze domenowej. Wyd. Politechniki Częstochowskiej, seria Monografie 36, 1996.
- [5] Gąsiorowski A., Straty mocy w dwóch długich walcowych przewodnikach umieszczonych w harmonicznym odkształconym poprzecznym polu magnetycznym. Rozprawy Elektrotechniczne, 1988, Warszawa 1989, t. XXXIV, z.1, s. 59–75.