Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie

Matematyka III, Częstochowa 1995/96

Propedeutika základních idejí infinitezimálního počtu na základní a střední škole

Petr Eisenmann

Je známo, že základy diferenciálního a integrálního počtu probírané na škole střední i kurs matematické analýzy na škole vysoké činí značné části studentů velké problémy. Způsobeno je to především nedostatečnou myšlenkovou připraveností studentů na toto téma. Tento závěr vyplývá ze srovnání obecného schématu poznávacího procesu se zkušenostmi studentů s idejemi infinitezimálního počtu před jejich precizací ve vyšších ročnících střední školy. Jedna z teorií (viz [2]) člení poznávací proces do pěti etap:

1. Motivace. Student pocit'uje touhu po získání poznatků z dané oblasti.

2. Etapa separovaných modelů. Student nabývá jednotlivých, různorodých zkušeností, mezi kterými zatím nevidí podstatné souvislosti.

3. Etapa univerzálních modelů. Postupným organizováním separovaných modelů ve vědomí studenta dochází k jejich slučování do skupin podle podstatných znaků.

4. Etapa krystalizace. Ve vědomí studenta dojde k přeměně separovaných a univerzálních modelů na novou kvalitu, na abstraktně vyšší stupeň poznání.

5. Etapa strukturalizace. Nový poznatek se začleňuje v kognitivní struktuře studentovy psychiky.

Potíže plynoucí z nerespektování zákonitostí poznávacího procesu se velmi výrazně projevují právě v obtížném chápání základních pojmů infinitezimálního počtu — limita posloupnosti a limita funkce. Jaké jsou obvyklé zkušenosti studenta nižšího ročníku střední školy obecně s limitním procesem?

Limitní proces v sobě zahrnuje dva fenomény: fenomén nekonečna a fenomén „přibližování se" (podle [1]).

Setkání studentů s nekonečnem nejsou ani na základní škole tak ojedinělá, jak by se mohlo na první pohled zdát. Zde se obvykle pracuje s nekonečnými číselnými množinami, neohraničenými geometrickými útvary, hovoří se o tzv. ukončeném a neukončeném dělení, vysvětluje se pojem periody desetinného čísla apod. Tyto dotyky ovšem nejsou zpravidla dostatečně zvýrazněny. Prvním vážnějším střetnutím s nekonečným procesem je *princip matematické indukce*. Setkání studentů s fenoménem „přibližování se" jsou obvykle ještě méně častá (určitou možnost zde poskytuje např. vyšetřování průběhu lineárních lomených funkcí).

I z takto stručně podaného rozboru je patrné, že při prezentaci například definice limity posloupnosti na střední škole je vyučujícím očekávaný „skok" do etapy krystalizace ignorováním předchozích tří etap poznávacího procesu. Ve vědomí studenta není dostatečné množství separovaných a univerzálních modelů. Snaha předat studentům výsledek abstrakce pak může u většiny z nich skončit nezdarem. Výsledkem snahy studentů o zvládnutí požadavků je pak často pro ně jednodušší formální osvojení látky učením se nazpamět'. Takové poznatky se potom ani nemohou začlenit do kognitivní struktury studentovy psychiky.

Zohlednění požadavku postupného vytváření dostatečného množství separovaných a univerzálních modelů limitního procesu ve vědomí studentů je oprávněné i z hlediska fylogeneze — historicky trval proces přechodu od intuitivních představ ke korektním definicím více než dvě tisíciletí.

Na základě dosud řečeného lze tedy konstatovat, že vytváření správných představ o limitním procesu bude vyžadovat systematické působení. Nemělo by jít o nějaké vyučovací celky, ale o dlouhodobé „intertématické" působení ve výuce matematiky (a fyziky) na základní a střední škole. Jeho cílem nemá být získání nějakých konkrétních vědomostí, ale spíše nabytí určité citlivosti na situace, ve kterých se limitní proces objeví a na problémy, při jejichž řešení se uplatní.

Náměty, kterými lze tento proces realizovat, se dají rozdělit do následujících oblastí:

1. Problémy, při jejichž řešení se limitní proces uplatní

Sem patří především různorodé exkurse do historie matematiky: Archimédovy, Cavalieriho, Keplerovy, Fermatovy a další kvadratury a kubatury, Archimédova mechanická metoda kvadratur, Galileovy myšlenkové experimenty při hledání fyzikálních zákonitostí volného pádu inspirované Zénónovými apóriemi, Fermatova metoda hledání extrémů a podobně. Bude pochopitelně prospěšné, ovládnou-li studenti některé z prezentovaných metod aktivně. Tak se také budou moci „na vlastní kůži" přesvědčit o záludnostech a omezeních těchto postupů. Krásné náměty zde nabízí např. příliš velkorysé „krájení" při kubaturách těles pomocí sčítání nekonečně malých. Ukázkou zcela jiného druhu je například Descartesova metoda nalezení tečny k cykloidě založená na nahrazení odvalující se kružnice pravidelným n-úhelníkem, kde $n \to \infty$.

Velice efektivním námětem k propedeutice limitního procesu může být vyšetřování extrémů funkcí jedné reálné proměnné pomocí numerických výpočtů. Metodu postupného zužování intervalu, v němž extrém takové „rozumné" funkce leží, mohou studenti navrhnout sami. Přínosem takového postupu je i možnost zapojení výpočetní techniky v tomto procesu a nezanedbatelná příležitost k propedeutice pojmu derivace funkce. Námětem podobného charakteru je možnost přibližného řešení rovnic. Zmíním zde pouze jednoduché a ideově nenáročné metody půlení intervalu a metodu iterací. Z hlediska „umění zanedbávat" — důležité propedeutické složky limitního procesu — je pozoruhodná i Newtonova substituční metoda *přibližného* řešení *rovnic*.

Posledně uvedené dva náměty vyžadují od studentů provádění relativně rozsáhlých numerických výpočtů. Výslovně zde chci zdůraznit, že čas jimi strávený nepovažuji za ztracený. Jedná se zde totiž o významnou příležitost k získání citu pro již zmíněné zanedbávání. Silné preferování symboliky ve výuce matematiky v posledních dvou desetiletích vedlo ke značnému potlačení numerických výpočtů a tím i ke ztrátě zkušeností v počítání s malými a velkými veličinami a zanedbáváním. V současné době kalkulaček a počítačů je zařazení těchto metod práce do výuky jen usnadněno.

2. Matematické objekty vzniklé limitním procesem

Sem bezesporu patří historicky známé funkce s podivuhodnými vlastnostmi: funkce spojitá na uzavřeném intervalu s nekonečně mnoha body lokálního maxima a minima, kterou dostaneme sestrojením rovnostranného trojúhelníka nad levou polovinou tohoto intervalu a nekonečným opakováním tohoto postupu nad zbývající částí původního intervalu, dále funkce, kterou popsal Bolzano ve své Functionenlehre v par. 65 a která nabývá jakožto spojitá funkce na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nekonečněkrát střídavě hodnot 0 a $1/2$ (viz např. [4]) či přímo slavná Bolzanova funkce, která je spojitá na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a nemá přitom v žádném vnitřním bodě tohoto intervalu vlastní derivaci. V případě posledně jmenované funkce doporučuji použít pro prezentaci na střední škole její metodicky vhodnější variantu popsanou v [6].

Mezi náměty této kategorie lze zařadit i křivky s překvapujícími vlastnostmi. Jednou z nich je například známá van der Waerdenova hvězda (viz např. [6]), která nejenže nemá nikde tečnu, ale je i příkladem uzavřené křivky nekonečné délky. Když už je řeč o křivce — krásným příkladem ilustrujícím složitý vývoj tohoto pojmu je například tzv. Sierpińského koberec — objekt, u nějž diskuse o tom, zda je „čárou" nebo „plochou", může být z hlediska propedeutiky limitního procesu velmi cenná. Vznikne totiž tak, že ze čtverce o straně 1, který jsme rozdělili na devět stejných částí, vyjmeme vnitřek středního čtverce. Tento postup budeme nyní aplikovat na každý ze zbývajících osmi čtverců, poté opět na ty zbývající atd. Objekt, který tak dostaneme, je „všude" děravý. Není v něm ani jeden souvislý kousek plochy, i z toho nejmenšího čtverečku byla vyjmuta střední část. Na druhé straně — kdo nakreslí takovou čáru?

Podobné, pochopitelně podrobnější a rozsáhlejší diskuse se studenty (a mezi studenty!), podněcované vyučujícím při prezentaci námětů popisované kategorie zde považuji za stěžejní složku propedeutiky limitního procesu a za cíl prezentace těchto námětů ve výuce. Tyto „infinitezimální" diskuse se přitom nemusí odehrávat pouze v rovině matematických pojmů (spojitá funkce, která nemá nikde derivaci, uzavřená křivka nekonečné délky apod.), fantazii studentů mohou jitřit i příklady jevů z „praxe", reálného života. Netřeba dodávat, co je obvykle studentům bližší.

Příkladem neohraničeného tělesa s konečným objemem (ale nekonečným povrchem) je těleso symetrické kolem své podélné osy, složené z válců o poloměru 2^{-i} a výšce 2^i $(i = 1, 2, 3, \dots)$ naskládaných podstavami na sebe. Objem, resp. obsah pláště n-tého válce je

$$V_n = \pi \cdot 2^{-n}, \ \text{ resp. } S_n = 2\pi \ .$$

Objem V tělesa je tedy roven

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n = \pi,$$

povrch tělesa

$$S > \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi$$

není vlastním reálným číslem. Přitom se přece dá vnitřek tohoto tělesa „obarvit" nalitím π objemových jednotek barvy dovnitř!

3. Ukázky limitního procesu v modelech jevů z ostatních přírodovědných disciplín

Velký prostor dává potenciálně propedeutice limitního procesu fyzika. Nejsnazší a přitom snadno realizovatelné je zde intuitivní vyšetřování limit funkčních závislostí v nevlastním bodě $+\infty$. Příkladem probíraným obvykle již v nižších ročnících střední školy je úloha o gravitačním působení

Slunce na letící kometu. Podle Newtonova gravitačního zákona se Slunce o hmotnosti M a kometa o hmotnosti m navzájem přitahují stejně velkými gravitačními silami opačného směru o velikosti

$$F = \kappa \cdot \frac{M \cdot m}{r^2},$$

kde κ je tzv. gravitační konstanta a r vzdálenost mezi nimi. Cenná zde může být diskuse o tom, jak se bude měnit síla F při stálém vzdalování komety od Slunce. Tvrzení o „stálém zmenšování síly F až k nepatrné hodnotě" a podobné, jistě správné výroky je vhodné podpořit ještě podnětem k jejich společné precizaci: pro libovolně malé kladné reálné číslo ε lze najít takovou vzdálenost r komety od Slunce, že při dalším vzdalování je již síla F menší než číslo ε. Je vhodné i takovou závislost $r(\varepsilon)$ se studenty určit

$$r > \sqrt{\frac{\kappa M m}{\varepsilon}},$$

numericky vyzkoušet a vše doplnit ještě vysvětlením na grafu funkce $F(r)$.

Významný dopad může mít takové intuitivní vyšetřování limit funkcí v případech, ve kterých je studentům fyzikální interpretace limity funkce ze zkušenosti či prováděného pokusu zřejmá. Příkladem budiž pohyb hmotného bodu po nakloněné rovině. Čas t, za který projede kulička nakloněnou rovinu nad základnou d svírající s vodorovnou rovinou úhel α, závisí, jak se dá jednoduchou fyzikální úvahou ukázat, na d a α podle vztahu

$$t = 2\sqrt{\frac{d}{g \cdot \sin 2\alpha}}.$$

Diskuse nad jednoduše stanovitelnými limitami

$$\lim_{\alpha \to 0^+} t(\alpha) = \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} t(\alpha) = +\infty$$

zde může být z hlediska propedeutiky limitního procesu cenná. Pojede kulička po téměř vodorovné rovině nekonečně dlouho? A pojede vůbec? Jakou rychlostí pojede kulička ve druhém případě, kdy je rovina téměř svislá? Přitom pro dráhu s uraženou kuličkou v tomto případě platí

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} s(\alpha) = \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{d}{\cos \alpha} = +\infty .$$

Pojede tedy ještě vůbec kulička či už bude padat?

Vhodné náměty se však najdou například i v chemii. Závislost množství naadsorbovaného plynu a připadajícího na jednotku povrchu pevné látky na tlaku plynu p je při stálé teplotě dána vztahem

$$a = \frac{k_1 p}{1 + k_2 p}\,,$$

kde k_1 a k_2 jsou kladné konstanty. Propedeutický význam zde má úvaha o množství naadsorbovaného plynu za velmi vysokého tlaku, kdy je již součin $k_2 p$ mnohem větší než 1. Matematická idealizace $\lim_{p\to\infty} a(p)$ zde má své reálné fyzikální hranice (tlak p) a právě sepětí fyzikálního „jedničku ve jmenovateli lze zanedbat proti číslu $k_2 p$" s obsahem matematického zápisu

$$\lim_{p\to\infty} a(p) = \frac{k_1}{k_2}$$

zde má pro studenty svůj význam.

Podobné „infinitezimální" diskuse mohou navíc u námětů této kategorie kromě propedeutiky limitního procesu výrazně přispět ke správnému vnímání matematických a fyzikálních modelů a matematizace reálných jevů a dějů.

4. Ukázky limitního procesu u matematických pojmů a metod

Vhodnou příležitost k propedeutice limitního procesu poskytují na druhém stupni základní a nižších ročnících střední školy probírané grafy elementárních funkcí, a to ve smyslu intuitivně prováděných úvah o limitách těchto funkcí v nevlastních bodech, resp. o nevlastních limitách. Vyšetřování průběhu (ze začátku i pomocí numerických výpočtů!) takových jednoduchých funkcí, jako jsou například $y = |x|^{-1}$ či $y = (x-3)^{-2}$ je vhodnou propedeutikou limitního procesu.

Dalším vhodným námětem z této kategorie je sčítání číselných řad pomocí názorných geometrických útvarů. Připomeňme například známý Oresmeho důkaz konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

či jeho vtipné rozstříhání jednotkového čtverce při důkazu rovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,.$$

Již v nižších ročnících střední školy se studenti zpravidla setkávají s tzv. parametrickými systémy funkcí. Uvědomují si roli parametrů pro průběh lineárních, kvadratických, později i goniometrických funkcí. Je myslitelné uvažovat u některých funkcí na místě parametru libovolné přirozené nebo převrácené přirozené číslo, respektive posloupnost přirozených čísel $(n)_{n=1}^{\infty}$ či $(n^{-1})_{n=1}^{\infty}$. Můžeme pak vlastně hovořit o posloupnostech funkcí, např.

$$(n \cdot x^2),\ (\frac{1}{n} \cdot x^2),\ (n \cdot \sin x),\ (\frac{1}{n} \cdot \sin x),\ (x^n),\ (\sin^n x),\ (\sin^{2n} x)\,.$$

Je významné pro studenty, znázorní-li si chování takových posloupností pomocí grafů několika prvních členů v jednom osovém kříži. U některých z nich lze z obrázku vypozorovat jistou tendenci přiblížit se limitně na určité podmnožině definičního oboru k nějaké funkci. Studenti mohou vycítit, že, korektně řečeno, posloupnost uvedená jako druhá a čtvrtá konvergují bodově na R k nulové funkci. S pomocí učitele se mohou dopracovat i k podobnému závěru u posloupnosti (x^n), resp. $(\sin^{2n} x)$, která bodově konverguje na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, resp. na R, k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 0, 1) \\ 1 & \text{pro } x = 1 \end{cases}\,,$$

resp. k funkci

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ \text{kde } k \in Z \\ 0 & \text{pro všechna ostatní } x \in R \end{cases}\,.$$

Všechny úvahy je vhodné se studenty dělat pouze na intuitivní bázi (K jaké funkci se funkce z dané posloupnosti stále více blíží?). Nadané studenty je možné seznámit s definicí bodové konvergence posloupnosti funkcí f_n na množině M k funkci f, zkráceně zapsáno

$$f_n(x) \to f(x) \iff \forall x \in M;\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

Tuto definici je možné prezentovat nadaným studentům jak korektně, a to v případě, že již znají pojem limity posloupnosti, tak na intuitivní bázi vysvětlením podstaty definice na obrázku (pro každé x z množiny M se funkční hodnoty $f_n(x)$ blíží k číslu $f(x)$), jestliže pojem limity posloupnosti ještě neznají. Svůj význam pro myšlení studentů mají pochopitelně i ty příklady funkčních posloupností, které nejsou konvergentní. Cenný je zde i propedeutický přínos tohoto tématu pro později zavedený pojem spojitosti funkce.

Na závěr uvedu a velice stručně okomentuji poslední tři oblasti námětů pro propedeutiku limitního procesu, které již nebudu podrobněji rozebírat. Jedná se o příklady a úlohy sloužící k propedeutice reálných čísel, příklady nekonečných množin a nekonečných procesů, ve kterých se projeví pouze fenomén nekonečna a konečně skupina námětů, které bych souhrnně označil slovem paradoxy. V *prvním* případě se např. jedná o celou historii čísla π, problematiku periodicity desetinných čísel, posloupností čísel racionálních, pátý Archimédův axióm či následovníka nějakého racionálního čísla, tedy uspořádání reálných čísel (viz např. [7]). Do skupiny *druhé* patří ukázky nekonečných číselných množin, neohraničených geometrických útvarů, nekonečných množin řešení rovnic a nerovnic a problematika mohutnosti množin obecně, otázka počtu všech prvočísel či pythagorejských čísel, princip matematické indukce a podobně. Tato skupina námětů je bezpochyby nejobsáhlejší z hlediska propedeutiky limitního procesu na základní škole. Krásným příkladem budiž Archimédovy „písečné" úvahy o vyjadřování velkých čísel pomocí čísel k-tého řádu (viz např. [5]). *Třetí* zmíněnou skupinu — „paradoxy" — lze kromě tradičních Zenónových apórií naplnit i mnohými příklady objektů s podivuhodnými vlastnostmi z oblasti námětů uvedené v tomto příspěvku pod číslem 2, ale i například různými Galileovskými fyzikálně — matematickými úvahami o pohybu těles či známým Aristotelovým dvojkolem (viz např. [3]).

Literatura

1. Bero, P.: *Nosné pojmy diferenciálneho počtu z hľadiska vyučovania*, kandidátská práce, Bratislava, MFF UK, 1987
2. Hejný, M., Hejný V.: *Prečo je matematika taká ťažká?*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 2, 1978
3. Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2,* SPN, Bratislava, 1989
4. Jarník, V.: *Bolzano a základy matematické analýzy,* JČSMF, 1981
5. Kagan, V. F.: *Archimedes,* Orbis Praha, 1953
6. Vilenkin, N. J.: *Rasskazi o množestvach,* Nauka, Moskva 1965
7. Zeitz, G.: *Zur Entwicklung und Überprüfung des „infiniten Denkens"* (1), Mathematik in der Schule, 11, 1990