PRACE NAUKOWE Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie
Filozofia 2014, z. XI, s. 157–169

http://dx.doi.org/10.16926/fil.2014.11.10

Ryszard MISZCZYŃSKI
Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie

Rola „terminologicznych wyjaśnień" w Stanisława Leśniewskiego formalizacji podstaw matematyki

Streszczenie

W artykule omawiany jest sposób, w jaki S. Leśniewski dokonywał radykalnej formalizacji matematyki. „Terminologiczne wyjaśnienia" były metajęzykowym opisem języka służącego do formalizacji matematyki.

Słowa kluczowe: Stanisław Leśniewski, formalizacja prototetyki, terminologiczne wyjaśnienia.

W prezentowanym tekście chcę wyjaśnić podstawowe terminy związane z tematem zapowiedzianym w tytule. Przede wszystkim chcę się jednak skoncentrować na początkowych krokach konstrukcji precyzyjnego języka, za pomocą którego będzie można mówić o formalnej prezentacji jednej z teorii matematycznych polskiego logika. Sytuacja przypomina nieco próbę Kartezjusza, aby zacząć filozofię od początku. Wybitny nowożytny racjonalista nie zauważył jednak, że trudno zerwać z całym dziedzictwem kulturowym: porzucić język, jego reguły, prawdy itp. Polski uczony był w podobnej sytuacji: chciał zerwać z tradycyjnymi intuicjami matematycznymi i zbudować nieobciążoną nimi nową naukę. Musiał sformalizować matematykę. To wymagało konstrukcji oczyszczonego języka, za pomocą którego będzie można mówić o owym formalizmie. Terminologiczne wyjaśnienia stanowią system pojęć i reguł pozwalających na zbudowanie takiego formalnego języka matematyki. Autor pomysłu zdawał sobie jednak sprawę z niemożliwości pełnego uwolnienia się od tradycji, od braku precyzji wykorzystywanego języka naturalnego. Z tym bagażem, ale kontrolując go, podjął się realizacji deklarowanego zadania. Środkiem do jego wykonania są właśnie tytułowe „terminologiczne wyjaśnienia". Przedstawię jedynie kilka pierwszych kroków przedsięwzięcia, w zasadzie pomijając konstrukcję całego skomplikowanego aparatu opartego na syntaktyce analizowanego języka formalnego. Swe omówienie umieszczę w szerszym kontekście filozoficznych poglądów wybitnego uczonego.

Powszechnie uznaje się Stanisława Leśniewskiego za jedną z najwybitniejszych postaci tzw. szkoły lwowsko-warszawskiej. Czas intensywnej twórczości uczonego, tj. początek XX wieku, stanowił bardzo ważny okres w rozwoju matematyki. Kryzys, jaki pojawił się w jej podstawach po skonstruowaniu przez Russella antynomii w teorii mnogości, wymagał od uczonych zaproponowania jakiegoś remedium, które pozwoliłoby matematykom w dalszym ciągu szczycić się przynależnością do dworu królowej nauk. Odpowiedzi na potrzebę bezpieczeństwa ułożyły się w trzy grupy: logicyzm, formalizm, intuicjonizm. Jak sądzę, filozoficznie najciekawszą była pierwsza. Z logicyzmem związany był odkrywca wspominanej sprzeczności Russell, idee kierunku rozwijał Gotlob Frege w *Grundgesetze der Arithmetik*[1], tj. w pracy, której założenia posłużyły do skonstruowana antynomii, te poglądy głosił Leśniewski i inni uczeni udzielający najważniejszych odpowiedzi na pytanie o sposób usunięcia sprzeczności.

Leśniewski poznał antynomię Russella z książki swego nauczyciela Jana Łukasiewicza *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*[2]. Pracę przeczytał w 1911 roku i – jak sam podkreślił – antynomia na kilkanaście lat przykuła jego uwagę[3]. Łukasiewicz[4] przedstawił rozumowanie Russella, powołując się na jego *The Principles of Mathematics* (1903) oraz na *Nachwort* – do drugiego tomu dzieła Gottloba Fregego, *Grundgesetze der Arithmetik* (1903).

Koncentruję się na antynomii, bo ona stanowiła dla Leśniewskiego podstawowy impuls do podjęcia próby budowy własnego, nowego i bezpiecznego systemu podstaw matematyki[5]. Pierwsza mereologiczna próba rozwiązania była przeprowadzana jeszcze w języku naturalnym[6]. Jednak stopniowo uczony zaczął

---

[1] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschrift abgeleitet*, Bd. 1 und 2, in moderne Formelnotation transkribiert und mit einem ausführlichen Sachregister versehen von T. Müller, B. Schröder und R. Stuhlmann-Laeisz, Mentis: Paderborn 2009 (Bd 1, 1893; Bd 2, 1903; Bd. 1, 2, 1963).

[2] J. Łukasiewicz, *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*, PWN, Warszawa 1987 (I wyd. 1910).

[3] S. Leśniewski, *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny" 1927, nr 30, s. 183.

[4] G. Frege, *Nachwort*, [in:] tegoż, *Grundgesetze der Arithmetik…*, s. 549–563. B. Russell, *The Principles of Mathematics*, George Allen and Unwin LTD, London 1956, s. 101–107 (zob. J. Łukasiewicz, *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1987, s. 119, 122).

[5] Zmagania Leśniewskiego z antynomią Russella omawiałem w artykułach publikowanych wcześniej w tym wydawnictwie: *Stanisława Leśniewskiego pierwsze rozwiązanie antynomii Russella*, „Prace Naukowe Akademii i im. Jana Długosza w Częstochowie. Seria: Filozofia" 2010, z. 7, s. 5–17; *Stanisława Leśniewskiego drugie rozwiązanie antynomii Russella* (2011, z. 8, s. 163–172); *Stanisława Leśniewskiego trzecia analiza antynomii Russella* (2013, z. 10, s. 163–181).

[6] S. Leśniewski, *Czy klasa klas, niepodporządkowanych sobie, jest podporządkowana sobie?*, „Przegląd Filozoficzny" 1914, nr 17, s. 73.

używać języka symbolicznego. Jak sam opowiadał, pod wpływem rozmów prowadzonych z Chwistkiem w 1920 roku zdecydował się

> […] na wprowadzenie do swej praktyki naukowej jakiegoś języka „symbolicznego”, opartego o wzory, stworzone przez „logików matematycznych”, zamiast języka potocznego, jakim się do owego czasu z upartą premedytacją posługiwałem, starając się, jak tylu innych, o ujarzmienie tego języka potocznego pod względem „logicznym” i nagięcie go do teoretycznych celów, do których nie został stworzony. Operacja językowa, jakiej w ten sposób na sobie dokonałem (by, jak się potem okazało, już nigdy więcej nie zatęsknić pod tym względem za powrotem do natury), była już zresztą wtedy w znacznym stopniu psychologicznie przygotowana przez kilkuletni okres krytycznej nieufności w stosunku do podstawowych wzorów „logiki matematycznej” […][7].

Zmiana była radykalna. Wyrzekł się wcześniejszych prac pisanych w stylu Twardowskiego, deklarując „[…] bankructwo «filozoficzno»-gramatycznych poczynań pierwszego okresu swojej działalności”[8]. Charakter swego nowego podejścia do matematyki określił w wydanym 2 lata później artykule *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*[9], w którym po raz pierwszy opisał bardzo dokładnie sposób formalizowania jednej ze swych teorii. Artykuł uważany jest za pracę fundamentalną dla wiedzy o realizacji formalistycznych zamiarów Leśniewskiego. Zamieścił w nim następującą deklarację, powszechnie uznawaną za najlepsze określenie jego dojrzałego stanowiska: „[…] nie widzę sprzeczności w powiedzeniu, że jestem zwolennikiem raczej radykalnego «formalizmu» w konstrukcji mojego systemu nawet chociaż jestem upartym «intuicjonistą»”[10]. Stanowisko łączące oba hasła określane jest mianem intuicyjnego formalizmu[11]. Nie jest to w żadnym razie formalizm rozumiany jako redukcja matematyki do czystej gry formuł. Napisy mają sens, komunikują pewne myśli. Precyzyjny język formalny służy do wyrażenia przekonań uczonego. Intuicja dostarcza treści przedstawianym napisom. Jak podkreślał, to istnienie myśli towarzyszących używanym formułom stanowi kryterium odróżniające autentycznych „[…] pracowników nauki, którym nie wystarcza sama rozkosz pisania znaczków i przekształcania wzorków i którzy – w przeciwstawieniu do zwolenników bezsensowności matematyki (zdarzają się przecie i tacy) – pragną

---

[7] Tenże, *O podstawach matematyki.* (*Ciąg dalszy*). *Rozdział X*, „Przegląd Filozoficzny” 1931, nr 34, s. 154.

[8] Tenże, *O podstawach matematyki*, „Przegląd Filozoficzny” 1927, nr 30, s. 182–183.

[9] S. Leśniewski, *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, „Fundamenta Mathematicae” 1929, no. 14, s. 1–81.

[10] Tamże, s. 78.

[11] Alfred Tarski charakteryzował stanowisko swego nauczyciela, powołując się na jego wypowiedzi za pomocą określenia „formalizm intuicjonistyczny” (tenże, *Podstawowe pojęcia metodologii nauk dedukcyjnych*, [w:] tegoż, *Pisma logiczno-filozoficzne*, t. 2: *Metalogika*, wybrał, przełożył, redakcji naukowej dokonał, przypisami opatrzył i wstępem poprzedził J. Zygmunt, Wydawnictwo Naukowe PWN, s. 34). Uważam, że stanowisko Leśniewskiego lepiej charakteryzuje moja nazwa „intuicyjny formalizm”, ponieważ nie sugeruje jakichkolwiek związków ze szkołą Luitzena E.J. Brouwera.

zdać sobie sprawę ze znaczenia wzorów przekształcanych, *respective* uświadomić sobie «o czem» i «co» się za pomocą tych wzorów pragnie stwierdzić"[12]. Między intuicją a formalizmami nie ma sprzeczności, uzupełniają się. Podstawą jest jednak intuicja: źródło treści, które ma być wyrażone za pomocą precyzyjnego języka formalnego.

Powyższa praca, uzupełniona o § 12 w anglojęzycznej wersji *Fundamentals of New System of the Foundations of Mathematics* w *Collected Works*[13], zajmuje 195 stron. Przy czym na 101 stronach autor nie umieścił żadnego potocznie używanego słowa, na innych 25 stronach można znaleźć w przypisach najwyżej 2–3 zdania wyrażone w języku naturalnym. Część pisana jest w oryginalnej, „idiosynkratycznej notacji". Zapewniać miała precyzję, ale wraz ze skrajną formalizacją rozumowań, niestety, stała się ezoteryczna. Zniechęcała większość potencjalnych odbiorców do prób odczytywania jej. Dbałość o ścisłe wyrażenie myśli bardzo mocno utrudniała zakomunikowanie jej. Podkreślany wyżej sceptycyzm wobec tego formalistycznego perfekcjonizmu potwierdza dość charakterystyczna reakcja Quine'a na fragment powyższej pracy (§ 12). Prezentując ją w „The Journal of Symbolic Logic", pisał następująco:

> Około dwie z osiemdziesięciu trzech stron są zajęte przez przypisy, bibliografię i komentarze; pozostałe osiemdziesiąt jeden stron jest oddane nieprzerwanemu symbolizmowi. Z jego trzech aksjomatów, dzięki pięciu regułom, autor wyprowadza pięć twierdzeń, które przetłumaczone na znaną notację wyglądają następująco „p≡q. ⊃ .fp ≡ fq", „p⊃q. ⊃:q⊃r. ⊃.p⊃r", „p⊃.~p⊃q" i „~p⊃p.⊃p". Ostatnie trzy pokazał Łukasiewicz […], aby ustanowić zupełny zbiór aksjomatów dla rachunku zdań[14].

Oczywiście, ta ironiczna prezentacja jednego paragrafu z publikacji Leśniewskiego w pewnym stopniu podważa znaczenie pracy naszego autora. Uciążliwa dla czytelnika dbałość o precyzję nie powinna jednak zanegować tej wartości ani prowadzić do lekceważenia narzędzia do osiągnięcia jej – „radykal-

---

[12] S. Leśniewski, *O podstawach matematyki…*, s. 180–181. W zupełnie podobny sposób brak zainteresowania czysto formalną grą symboli wypowiedział w 1937 roku Jan Łukasiewicz: „Nie jestem grafikiem, ani kaligrafem, ornamenty, napisy nic mnie nie obchodzą. Cała różnica, jaka dzieli logistykę od gry szachowej, polega właśnie na tym, że figury szachowe nic nie znaczą, a znaki logiczne mają jakiś sens. O ten sens nam chodzi, o myśli i znaczenia wyrażone przez znaki, nie zaś o same znaki. […] Formalizujemy wywody logiczne i dobrze robimy, tak postępując; ale formalizacja jest tylko środkiem poznania czegoś i zdobycia pewności o czymś, a ważny dla nas jest nie środek poznania, tylko to, co dzięki niemu poznajemy" (tenże, *W obronie logistyki*, [w:] tegoż, *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*, wyboru dokonał i przypisami opatrzył J. Słupecki, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1961, s. 213).

[13] S. Leśniewski, *Fundamentals of New System of the Foundations of Mathematics*, translated by M.P. O'Neil, [in:] idem, *Collected Works*, vol. 2, ed. by S.J. Surma, J.T. Srzednicki, D.I. Barnett, PWN – Polish Scientific Publishers, Kluver Academic Publishers, Dordrecht – Warszawa 1992, p. 410–605.

[14] W.V. Quine, *Stanisław Leśniewski. Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik §12*. Ibid., offprint 1939, p. 61–144, „The Journal of Symbolic Logic" 1940, Jun., Vol. 5, No. 2, p. 84.

nej formalizacji”. Jej znaczenie nie budzi chyba wątpliwości wśród współczesnych twórców oprogramowania do przeprowadzania dowodów matematycznych. Zanim jednak skoncentruję się na metodzie Leśniewskiego, chcę krótko przedstawić system podstaw matematyki, który zamierzał sformalizować.

Cały system składał się z trzech logicznie uporządkowanych teorii: prototetyki, ontologii i mereologii. Pierwsza to uogólnienie rachunku zdań, stanowi teorię absolutną, tzn. nie wymaga żadnych dodatkowych przesłanek. W *Grundzüge* Leśniewski przedstawił kilka wersji prototetyki (teorie б1 – б5). Starał się, aby jedynym terminem pierwotnym była równoważność. Dzięki niej i użyciu kwantyfikatora ogólnego zdefiniowane zostały pozostałe spójniki. Ontologia to specyficzny rachunek nazw, w zasadzie opiera się na analizie słówka „jest”. Mereologię stanowi teoria zbiorów kolektywnych. Warto podkreślić, że każda z tych teorii w pewnym stopniu narusza tradycyjne przyzwyczajenia i dlatego nie poddaje się łatwo wypracowanym wcześniej sposobom formalizacji. Bardzo duży wpływ na sposób jej realizacji ma podkreślana już wcześniej chęć doskonałego wykonania tego zadania. W *Grundzüge* Leśniewski dokładnie omówił sposób formalizowania б5. Jak podkreślał, przeprowadził ją w sposób łatwy do wykorzystania w innych teoriach. Rok po tej publikacji przedstawił artykuł zawierający uzupełnienie aparatu formalizacyjnego prototetyki o dodatkowe instrumenty, niezbędne dla formalizacji ontologii[15]. Wbrew zapowiedziom (m.in. w wyniku przedwczesnej śmierci uczonego) nie udało mu się opublikować materiałów o formalizacji mereologii. Lejewski skomentował ten brak następująco: „Nie wiem, czy Leśniewski próbował przeprowadzić formalizację mereologii, a jeśli tak, to czy istotnie ją przeprowadził, czy też nie; w tym drugim wypadku stanęlibyśmy wobec kolejnego wyzwania”[16]: konieczności przeprowadzenia jej.

Jak podkreślałem, dbałość o precyzję znacznie osłabiała komunikatywność prac Leśniewskiego. Znający go dość często żartowali sobie z jego dążenia do doskonałego wykładu głoszonych idei[17]. Mimo tego i świadomości, że symboliczny język ma w matematyce tylko drugorzędne znaczenie, uczony traktował to zadanie bardzo poważnie. Nie rezygnował z niego i problemowi formalizacji poświęcał bardzo dużo czasu, np. tak działo się podczas zajęć uniwersyteckich.

---

[15] S. Leśniewski, *O podstawach ontologii. Über die Grundlagen der Ontologie*, odbitka ze Sprawozdań z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego XXIII, 1930, Wydział III. Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIII, 1930, Classe III, Warszawa 1930.

[16] Cz. Lejewski, *Wspomnienie o Stanisławie Leśniewskim*, [w:] *Fragmenty filozoficzne ofiarowane Henrykowi Hiżowi w siedemdziesiątą piątą rocznicę urodzin*, red. J. Pelc, H. Zelnik, Zakład Semiotyki Logicznej Uniwersytetu Warszawskiego, Polskie Towarzystwo Semiotyczne, Warszawa 1992, s. 82.

[17] Trudno nie dostrzec Leśniewskiego wśród adresatów ironii zawartej już w tytule artykułu jego nauczyciela *Symbolomania i pragmatofobia* ([w:] K. Twardowski, *Rozprawy i artykuły filozoficzne*, zebrali i wydali uczniowie, Księgarnia S.A. „Książnica-Atlas” T.N.S.W., Lwów 1927, s. 394–406.)

Efektem tych starań było zbudowanie własnego specjalnego aparatu teoretycznego do przeprowadzania formalizacji. Z uwagi na to, że – jak wspominałem – konstruowany system prototetyki ma być absolutny, tj. ma nie wykorzystywać żadnych zewnętrznych względem niego założeń, jego twórca starał się także zrezygnować z używania tradycyjnych pojęć matematycznych niosących intuicje, z których również chciałby zrezygnować[18]. A więc potrzebna była konstrukcja nowego języka, niekorzystająca z dotychczasowych wzorów. To jest dość trudna sytuacja komunikacyjna. Rezygnacja z tradycyjnego medium grozi niezrozumieniem komunikatu, korzystanie narzuca niechcianą siatkę pojęciową. Autor rozwiązał trudność, wykorzystując tzw. wyjaśnienia terminologiczne[19] (*Terminologische Erklärungen* – T.E.). Za ich pomocą skonstruował zespół pojęć pozwalających opisać pożądaną procedurę. Znaczenie początkowych terminów opisał, wskazując ich desygnaty (korzystał z definicji ostensywnych). Stopniowo pojęcia ulegały komplikacji. Wśród T.E. znajdowały się wszystkie niezbędne definicje terminów wykorzystywanych w formalizacji. Jedną z pierwszych (T.E. VII[20]) jest nieco zmodyfikowana definicja zbioru kolektywnego (z atomami), która pozwala traktować wyrażenia matematyczne jako zbiory symboli. W ten sposób są traktowane wszystkie pojawiające się napisy. Ważną rolę odgrywają m.in. określenia: „wyrażenie nawiasowe", „podobieństwo wyrażeń nawiasowych", „należenie do tej samej kategorii semantycznej". Oprócz nich wśród T.E. znajdują się także podstawowe reguły umożliwiające rozbudowę teorii.

Oczywiście, budowa języka do przekazywania nowych treści matematycznych, jeśli nie ma się skończyć „paraliżem komunikacyjnym", musi odwoływać

---

[18] Np. z platonizujących presupozycji języka matematycznego, z terminologii odwołującej się do intuicji tradycyjnej teorii mnogości.

[19] Wśród współczesnych metodologów istnieje uzus dotyczący ograniczenia używania terminu „wyjaśnienie" do sytuacji, w której można dedukować *explanandum* z *explanansa*. Ponieważ termin Leśniewskiego ma wyraźnie inne znaczenie, spotkałem się z sugestią użycia nazwy „objaśnienie". Wadą propozycji jest jednak odejście od oryginalnego terminu używanego przez Leśniewskiego. Wykorzystywane słowo nie jest bowiem tylko wynikiem tłumaczenia niemieckojęzycznych tekstów wybitnego logika. On sam używał polskiego sformułowania „wyjaśnienia terminologiczne" podczas wykładów dla studentów (zob. Cz. Lejewski, *Wspomnienie o…*, s. 82).
Dr Adam Olech zwrócił mi uwagę na to, że w latach 20. wśród filozofów szkoły lwowsko-warszawskiej pojęcie wyjaśniania nie odgrywało jeszcze tak ważnej roli jak współcześnie i m.in. dlatego też nie miało wyraźnie określonego znaczenia. Np. Tadeusz Kotarbiński, wydając w 1929 roku swoje *Elementy*, nie poświęcił „wyjaśnianiu" żadnego miejsca (zob. tenże, *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1986, s. 509). Jednak już w latach 60. K. Ajdukiewicz, pisząc swój ważny podręcznik z logiki (tenże, *Logika pragmatyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1965, s. 395–403), uznał za słuszne podjąć się zdefiniowania go. Powstrzymując się więc od zmiany oryginalnego terminu, muszę jeszcze raz podkreślić jego obcość w stosunku do współczesnego słownika metodologicznego i zwrócić uwagę na pewną rolę języka naturalnego w „wyjaśnieniach" stanowiących wstęp do opisu formalnego.

[20] S. Leśniewski, *Grundzüge…*, s. 63.

się do pewnego wspólnego dla nadawcy i odbiorców zasobu treści, pojęć, w oparciu o które musi powstać nowe medium komunikowania. Fragment *Gru-Grundzüge* poświęcony wprowadzeniu aparatu formalizacyjnego[21] rozpoczyna się od wyliczenia grupy zdroworozsądkowo zrozumiałych sformułowań, które będą stanowiły punkt wyjścia w porozumiewaniu się: m.in. „A jest b” (*A ist ein b*), „ten sam obiekt co A” (*derselbe Gegenstand, wie A*), „równoliczność a i b” (*es gibt ebenso viel Gegenstände a, wie es Gegenstände b gibt*), „słowo” (*Wort*), „wyrażenie” (*Ausdruck*), „nawias” (*Parenthese*), „wyrażenie równokształtne z A” (*mit A gleichgestalteter Ausdruck*), „należenie do A” (*zu A gehőrend*), „poprzedzający A” (*dem A vorangehend*), „następujący po A” (*auf A folgend*), „ostatnie ze słów poprzedzających A” (*letztes der dem A vorangehenden Wörter*), „ostatnie ze słów należących do A” (*letztes der zu A gehörenden Wörter*), „pierwsze ze słów należących do A” (*ersted der zu A gehörenden Wörter*) itd. Obok każdego wyrażenia został umieszczony odpowiadający mu symbol. Autor potraktował listę jako niezakończoną, ponieważ po wyliczeniu pojawił się skrót „etc.”. Niektóre z nich wyjaśnił dokładniej, wskazując odpowiednie przykłady. Będzie ich używał w dalszej części opisu konstrukcji swego języka formalnego, wprowadzając ponumerowane T.E. Jak łatwo się domyślić, odwoływanie się do zespołu niezdefiniowanych terminów języka naturalnego nie gwarantuje użytkownikowi otrzymania ścisłości pożądanej w nauce. Leśniewski jednak wykorzystywał je, oczekując na uzyskanie odpowiedniego zrozumienia przez czytelnika[22].

Wśród wymienionych przeze mnie sformułowań dwa mają zupełnie inną genezę niż opisana powyżej. Są to: „A jest b” („A ε b”) oraz „należenie do A” („ingr(A)”). Symboliczne przedstawienie pierwszego wyrażenia wykorzystuje znak „ε”, którego znaczenie analizował Leśniewski w swojej ontologii. Kolejne stanowi jedno z podstawowych pojęć mereologii (*ingrediens*). Korzystanie z T.E. zakłada znajomość obu terminów, a więc także podstaw obu teorii, co wskazuje na wtórność procedury formalizacyjnej wobec intuicyjnie pojmowanych elementarnych terminów obu teorii. Pojawiające się w tym miejscu ewentualne pytanie, czy intuicyjna teoria oprócz roli obiektu formalizacji może być wykorzystywana jako narzędzie tej procedury, znalazło już – jak sądzę – swoją pozytywną odpowiedź w dyskusji nad głośnym pomysłem Gödla o arytmetyzacji składni.

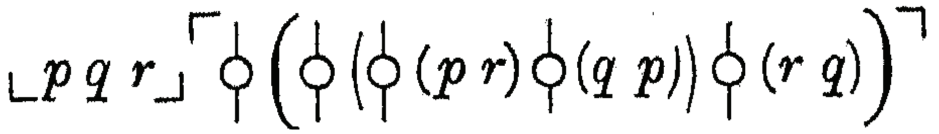
Przekonanie o intersubiektywnej komunikowalności treści pojęć wprowadzanych w T.E. opiera się na podobieństwie doświadczeń fundujących znaczenia wykorzystywanych terminów (korzystanie z definicji ostensywnych), znajomo-

[21] Tamże, §11, s. 59–78.

[22] T.E. Leśniewskiego m.in. polegają na włączeniu pewnych treści języka naturalnego w podstawy procedury formalizacyjnej. Nieco podobny zabieg stosował Frege, wykorzystując tzw. *Erläuterungen* (M. Hallett, *Frege and Hilbert*, [in:] *The Cambridge Companion to Frege*, ed. by M. Potter, T. Ricketts, Cambridge University Press, New York 2010, p. 434). Procedura Fregego różni się od *Erklärungen* Leśniewskiego. Biorąc jednak pod uwagę silny wpływ autora *Grundgesetze* na polskiego uczonego, warto – jak sądzę – zbadać dokładniej związek między obu narzędziami.

ści podstawowych pojęć systemu Leśniewskiego oraz kilku słów potocznie zrozumiałych. Jest to wiedza niesięgająca szczególnie wyspekulowanych warunków, a opierająca się na zdroworozsądkowym doświadczeniu inteligentnego człowieka dysponującego charakterystyczną dla kultury Zachodu orientacją czasoprzestrzenną: umiejętnością odróżniania przedmiotów; wiedzą, czym jest wcześniej, a czym później; umiejętnością nazywania za pomocą liczb przedmiotów ustawionych w linii od lewego do prawego; umiejętnością posługiwania się językiem symbolicznym. Odwołując się do możliwości wykorzystywania wymienionych zdolności, Leśniewski chciał nauczyć czytelnika posługiwania się zbudowanym przez siebie językiem. T.E. miały stanowić jego metajęzykową charakterystykę. W normalnych warunkach (np. podczas zajęć ze studentami), opisując swój formalizm, polski uczony wykorzystywał język naturalny. W *Grundzüge*, ze względu na brak miejsca, skorzystał ze skrótowego zapisu, którym była – jak wyjaśniał – symbolika Peano-Russella. Ze względu na oszczędność miejsca zrezygnował także z przykładów, które zwykle omawiał ze studentami[23].

Propedeutyczne wyjaśnienia stanowią ogólną podstawę opisanej w *Grundzüge* dalszej części wykładu metody formalizacji. Jej systematyczny początek stanowi napis, będący jednym z aksjomatów prototetyki[24].



Od tego momentu, za pomocą ponumerowanych czterdziestu dziewięciu T.E., Leśniewski bardzo precyzyjnie wyjaśniał sposób konstrukcji formalnej teorii. Najważniejszą wśród nich rolę odgrywają dyrektywy znajdujące się na końcu systemu: definiowania (T.E. XLIV), rozkładania kwantyfikatora (T.E. XLV), odrywania (T.E. XLVI), podstawiania (T.E. XLVII, XLVIII), ekstensjonalności (T.E. IL). One, odpowiednio zastosowane, stanowią formalną podstawę umieszczenia kolejnej tezy. Zadaniem pozostałych T.E. jest tylko przygotowanie terminologii umożliwiającej ścisłe wyrażenie tych dyrektyw. Dlatego w krytykowanym przez Quine'a §12 z *Grundzüge*[25] Leśniewski powoływał się tylko na te reguły i nie przywoływał żadnych innych T.E. poprzedzających je.

[23] Jedynym oryginalnym tekstem Leśniewskiego, w którym znajdują się przykłady, jest *O definicjach w tak zwanej teorii dedukcji*, przeł. J.A. Stuchliński, „Filozofia Nauki" 2001, nr 3(35), s. 165–179.

[24] S. Leśniewski, *Grundzüge...*, s. 33. Przedstawiony aksjomat wyraża poprzedzone ogólnym kwantyfikatorem prawo [(p≡r) ≡ (q≡p)] ≡ (r≡q). Jedynym symbolem stałym jest równoważność. W swojej notacji Leśniewski (podobnie jak Łukasiewicz) zawsze umieszczał funktor przed ujętymi w nawiasy jego argumentami. Argumenty nie są oddzielane przecinkami. W tym przypadku przecinki musiałyby być umieszczone przed ostatnim znakiem równoważności (aby oddzielić argumenty pierwszego funktora (stoi na siódmym miejscu)) i przed przedostatnim znakiem (aby oddzielić argumenty drugiego funktora (stoi na dziewiątym miejscu)).

[25] Zob. przypis 10.

Jak łatwo zauważyć, wszystkie znaki aksjomatu A1 są uporządkowane jeden za drugim, zgodnie z europejskim sposobem pisania. Łatwo je scharakteryzować, podając numer miejsca zajmowanego w szeregu. Każdy znak, słowo stanowi jedną całość, jego rola nie ulegnie zmianie za pomocą podkreśleń czy tradycyjnie używanych graficznych dodatków modyfikujących, umieszczonych nad nim lub pod nim. Charakterystyczny kształt mają stojące na pierwszym i piątym miejscu dolne narożniki („⌞…⌟”), stanowiące pierwsze i ostatnie słowo kwantyfikatora. Między nimi znajdują się słowa wiążące zmienne, występujące w zasięgu kwantyfikatora (T.E.XIV[26]). Na szóstym i dwudziestym ósmym miejscu znajdują się górne narożniki („⌜…⌝”) określające ten zasięg. Wyrażenie zbudowane z kwantyfikatora i następującego po nim jego zasięgu nazywał uogólnieniem[27]. Występowanie w kwantyfikatorze[28] określa kształt terminów zmiennych znajdujących w jego zasięgu, to jest jedyny sposób odróżnienia zmiennych od stałych. Warto zauważyć, że Leśniewski nie posługiwał się zmiennymi wolnymi: wszystkie były związane. W podobny sposób została zdefiniowana równoważność (w skrócie: funkcja, której funktor jest równokształtny ze słowem znajdującym się na miejscu jedenastym, a argumenty umieszczone są w wyrażeniu nawiasowym podobnym do znajdującego się na miejscach od dwunastego do piętnastego).

W akapicie powyżej przedstawiłem kilka pierwszych elementarnych kroków, za pomocą których Leśniewski rozpoczął wyraźne definiowanie słów wykorzystywanych w procedurze formalizacyjnej. Wraz z kolejnymi T.E. wprowadzanych jest coraz więcej terminów, które stają się coraz bardziej złożone. Istotną trudnością w przeprowadzaniu procedury formalizacyjnej było włączenie do niej koncepcji kategorii semantycznych. Leśniewski uznał jednak ten dodatek za naturalny i niezbędny składnik organizacji wyrażeń językowych. W efekcie powstała pewna bogata struktura wyrażeń i związana z tym np. konieczność relatywizacji używanych zmiennych[29]. Nie będę omawiał wszystkich T.E. W tym momencie pragnę raczej zwrócić uwagę na charakter tego postępowania w kontekście nominalizmu akceptowanego przez Leśniewskiego oraz związanej z nim negacji istnienia tzw. przedmiotów ogólnych. Według polskiego uczonego[30] sformalizowana teoria to zbiór kolejnych napisów (tj. pewnych materialnych

---

26 S. Leśniewski, *Grundzüge…*, s. 64.

27 W zasięgu kwantyfikatora nie może znajdować się żadne uogólnienie poprzedzone kwantyfikatorem, do którego należałoby słowo równokształtne z jakimś terminem z pierwszego kwantyfikatora.

28 E.C. Luschei, *The Logical Systems of Lesniewski*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1962, p. 185–186.

29 Teorię opracowaną w roku 1922 przez Leśniewskiego na podstawie lektur Husserla spopularyzował Kazimierz Ajdukiewicz, podkreślając ich funkcje syntaktyczne (tenże, *O spójności syntaktycznej* (1935), tłum. F. Zeidler, [w:] tegoż, *Język i poznanie*, t. 1, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1985, s. 222–242).

30 S. Leśniewski, *Fundamentals of New System…*, § 12, p. 492–603.

przedmiotów), które zgodnie z regułami przedstawionymi w T.E. są dodawane do przyjętych na początku aksjomatów (A1, A2, …). Wypisywane wyrażenia nazywane są tezami i oznaczane kolejnym numerem (T1, T2, …). Po każdej z nich w nawiasie określona jest podstawa dodania tezy (dyrektywa i sposób jej wykorzystania). Tezy dodane w oparciu o dyrektywę definiowania opisywane są symbolami D1, D2, …, itd.

Według Leśniewskiego, nie ma (jak chcieliby platonicy) jednej teorii wielokrotnie i różnorodnie przedstawianej. Teorii jest tyle, ile jest zbiorów materialnych obiektów spełniających spisane warunki. Określają one, jak musi wyglądać dana formuła, w jakim miejscu może się pojawić. Wszystkie reguły są tak sformułowane, aby ostatecznie odwoływać się do zewnętrznych, fizykalnych cech owych napisów, a nie do ich treści. Wypisane w formalnym języku T.E., mogą być odczytywane jako skrót np. następującej dyrektywy: gdy spotkasz narysowany na papierze napis zaczynający się od małego okręgu z dołączonymi u góry i dołu dwoma pionowo odcinkami, po którym następuje…, to możesz pod nim napisać kolejne wyrażenie rozpoczynające się od… Z tego powodu Józef Andrzej Stuchliński mówi o ich strukturalno-opisowym charakterze[31].

Z nominalistycznych przekonań Leśniewskiego wynika także wyraźne odróżnianie liter występujących wewnątrz kwantyfikatora i wiązanych przez nie zmiennych znajdujących się w jego zasięgu: nie są tymi samymi obiektami, ale różnymi, uznanymi za równokształtne. Na powyższym przykładzie chcę zwrócić uwagę na pewne kłopoty, z którymi musiałby sobie radzić Leśniewski, wykorzystując tradycyjny język matematyczny i przyzwyczajenia jego użytkowników. Np. musiał jakoś wyeliminować korzystanie z powszechnego platonizującego nastawienia odbiorców, które mogło istotnie zmienić komunikat.

Konsekwencją akcentowanego wyżej stanowiska utożsamiającego teorię z jej praktyczną realizacją jest naturalna dla nominalizmu relatywizacja charakterystyk opisywanych obiektów języka do określonego etapu rozwoju teorii. Z tego powodu bardzo często w określeniu terminu wprowadzanego przez jakąś T.E. pojawia się sformułowanie o konieczności ujmowania go w kontekście pewnych innych obiektów, najczęściej w relacji do tych, które poprzedzają ostatnią tezę systemu, np. „A jest wyrażeniem, które obowiązuje jako definicja w danym systemie bezpośrednio po tezie B". A więc na tym etapie rozwoju teorii można przypisywać jej lub pewnym należącym do niej obiektom określoną własność. Wcześniej lub potem sytuacja mogłaby wyglądać inaczej.

Podkreślanemu dynamizmowi teorii odpowiada specyficzny, wykorzystywany przez Leśniewskiego, język. Alfred Tarski zwracał uwagę na ewolucyjny charakter tego języka: nigdy nie jest w pełni ukończony. Dlatego nie można go tradycyjnie scharakteryzować, wyliczając wszystkie słowa, z których jest zbudowany (zmienne, funkcje…). Nie można więc patrzeć na niego jako na coś

[31] Zob. np. J.A. Stuchliński, *Definicja zdania*…, s. 59.

„[…] «gotowego», lecz jako coś «narastającego»: nie są przewidziane z góry wszelkie znaki i formy językowe, które mogą się pojawić w tezach systemu, natomiast opracowane są dokładnie reguły, które umożliwiają – w miarę rozbudowy systemu – kolejne wzbogacanie jego języka w nowe wyrazy i formy […]”[32].

Na etapie wypisywania aksjomatów język składa się tylko z tych słów, które do nich należą. Są więc już wyróżnione pewne znaki, którym przypisane są określone zadania (np. narożniki charakteryzujące wyrażenia kwantyfikatorowe są wyróżnione pewne nawiasy itd.). Dodawanie kolejnych elementów jest wynikiem inwencji rozwijającego teorię. On będzie dodawał kolejne elementy, podporządkowując się jednak zasadom, które określają konieczne relacje między nimi i w stosunku do wcześniej istniejących elementów.

Radykalny formalizm, jaki zadeklarował Leśniewski, polega właśnie na skrupulatnym wyliczeniu wszystkich reguł, jakie mogą być wykorzystywane jako podstawa do dodania kolejnego wiersza (tezy) w budowanej teorii. Fizykalistyczna treść języka używanego w T.E., tj. charakterystyki skoncentrowane na kształcie pewnych napisów i przestrzennych relacjach między nimi (Tarski nazywał to morfologią języka), w rzeczywistości dotyczy nie samej matematyki, ale jej formalizacji. Uczony stał bowiem nie tyle przed problemem samego zapisania intuicyjnych rozumowań, a raczej precyzyjnego opisania wszystkich dopuszczalnych sposobów umieszczenia kolejnego wpisu. Istnieje bowiem oczywista różnica między logicznym powiązaniem pewnych sądów, analizowaniem relacji między ich treściami a badaniem związków, jakie zachodzą między pewnymi napisami. T.E. przedstawiają tylko precyzyjne prawa umieszczania owych napisów. Są podstawą niezawodnego algorytmu pozwalającego sprawdzić poprawność występowania po sobie określonych znaków graficznych. Rozstrzygnięcie, czy te prawa są rzeczywiście przestrzegane, jest czysto mechanicznym zajęciem, które nie wymaga żadnego rozumienia analizowanych napisów[33]. W tym wyczerpuje się deklarowany przez Leśniewskiego radykalny formalizm.

Radykalność, o której mówi Leśniewski, polega na pełnej eliminacji wpływu niesformalizowanych czynników na dowolne operacje wykonywane w ramach przedstawianego matematycznego rozumowania. Jakby wbrew deklarowanemu oparciu się na intuicji uczony sprowadza wszystkie matematyczno-logiczne operacje do pewnej liczby świadomych działań opisanych w T.E. Z tego punktu widzenia jest to intuicyjność precyzyjnie przemyślana, zwerbalizowana i – ostatecznie – wyeliminowana. Wykluczone bowiem zostały wszystkie przypadki,

[32] A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* (1933), [w:] tegoż, *Pisma logiczno-filozoficzne*, t. 1: *Prawda*, wybrał, przełożył, redakcji naukowej dokonał, wstępem i przypisami opatrzył J. Zygmunt, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995, s. 86–87.

[33] Zwrócenie uwagi na mechaniczny charakter owego sprawdzenia nie oznacza wcale łatwości wykonania go. Używanie ogólnych kwantyfikatorów może wymagać przyjrzenia się bardzo wielu przypadkom (zob. P. Simons, *Reasoning on Tight Budget: Leśniewski's Nominalistic Metalogic*, „Erkenntnis” 2002, no. 56, p. 107).

które nazywał ironicznie „[…] metodą przeprowadzania matematycznych dedukcji na «intuicjonistycznej» podstawie różnych logicznych sekretów […]”[34].

Sprowadzenie matematycznych rozważań do mechanicznej działalności sprawdzenia, czy pewne przedmioty niesymbolizujące żadnej treści są ustawione zgodnie z przyjętymi regułami, oczywiście, nie wyklucza możliwości rozumienia ich przez tego, kto je zestawił. Leśniewski wielokrotnie podkreślał konieczność posiadania znaczenia przez wykorzystywane zespoły znaków graficznych. Ono jest w rzeczywistości zasadniczą wartością, która uzasadnia wprowadzenie owego formalizmu. Skonstruowane w T.E. dyrektywy są tak zbudowane, aby transformacje układów znaków nie prowadziły poza odpowiadające im intuicyjne treści. Stąd wyjaśnienia autora: „[…] nie podejmuję się trudu systematycznego i częstego, bardzo skrupulatnego sprawdzania dyrektyw mego systemu bez przypisania jego tezom pewnego szczególnego i kompletnie określonego sensu, na mocy którego jego aksjomaty, definicje i ostateczne dyrektywy […] mają dla mnie nieusuwalną intuicyjną wartość”[35].

Otrzymana dzięki formalizacji „eliminacja intuicji” daje Leśniewskiemu możliwość precyzyjnego wypowiedzenia intuicyjnych treści sformalizowanego rozumowania. Przecież „zawieszony” na czas mechanicznej formalizacji związek formuł i ich treści nie eliminuje tych ostatnich, a odwrotnie: pozwala na zbudowanie precyzyjnej formy wniosku, którą można wypełnić pierwotnie ustalonymi treściami.

W prezentowanym tekście, mówiąc o T.E., koncentrowałem się przede wszystkim na świadomie realizowanym przez Leśniewskiego pomyśle budowy zupełnie nowego języka, dzięki któremu będzie można opisać system symboliczny stanowiący efekt formalizacji teorii matematycznej. Leśniewski przedstawił ów metajęzyk również w postaci sztucznego języka symbolicznego od początku posiadającego wyraźną, wskazaną już interpretację. W *Grundzüge* stanowić miał ją formalny język prototetyki. Chcę podkreślić olbrzymią dbałość Leśniewskiego o eliminację niechcianych treści. Miał świadomość ograniczonych możliwości realizacji tego zadania. Najpierw w oparciu o definicje ostensywne skonstruował system niezbędnych metajęzykowych kategorii, których treść ograniczała się do fizykalnych charakterystyk napisów, do ich morfologii. W oparciu o nie budował w T.E. późniejsze definicje i dyrektywy. Ostatecznie zawsze odwoływał się do różnych syntaktycznych charakterystyk. Aby maksymalnie zminimalizować nawet nieświadomy wpływ tradycyjnej nauki, wyliczył w zasadzie wszystkie „podejrzane”, a jednak używane pojęcia i umiejętności matematyczne. W moim omówieniu w zasadzie nie podejmowałem tematu dyrektyw prezentowanych w T.E., warto może jednak wspomnieć, że dość powszechnie uważa się przedstawiony przez Leśniewskiego zestaw warunków definiowania za najbogatszy wśród wielu innych projektów formalizacyjnych.

[34] S. Leśniewski, *Grundzüge*…, s. 78. Jak sądzę, słowem lepiej oddającym podstawę owych „logicznych sekretów” jest „intuicyjnej” (por. przypis 10).

[35] Tamże.

T.E. stanowią w zasadzie zakończoną konstrukcję metajęzykową. Jej punktem wyjścia był opis pewnego materialnego przedmiotu: wypisanego(-ych) aksjomatu(-ów) złożonego(-ych) ze skończonej ilości znaków drukarskich. Te materialne obiekty stanowią również punkt wyjścia dla zupełnie innej konstrukcji: teorii wzbogacanej o kolejne tezy. W ich skład będą wchodziły beztreściowe znaki równokształtne z występującymi w aksjomacie(-ach) lub z innymi dodanymi do nich zgodnie z dyrektywami przedstawionymi w T.E. Używam słowa „będą”, ponieważ teoria i jej język nigdy nie są skończone. W zasadzie zawsze mogą być rozbudowywane i mogą przyjmować bardzo różne postacie.

Leśniewski podczas zajęć ze studentami przedstawiał T.E. w języku naturalnym. Ułatwiało to wykorzystywanie perswazyjnej roli „wyjaśnień” Fregego. W *Grundzüge* T.E. zostały przedstawione za pomocą symbolizmu Peano-Russella. Jest on – jak twierdził autor omawianego tekstu – tylko skrótowym zapisem języka naturalnego. Jednak już ten symbolizm utrudniał „przemycanie” niepożądanych tradycyjnych treści i jednocześnie eliminował perswazyjne funkcje owych „wyjaśnień”. Sam autor także nie dbał szczególnie o ten aspekt procesu komunikowania. W efekcie „wyjaśnienia” zawarte w T.E. stały się specyficzną sygnaturą procedury formalizacyjnej Leśniewskiego.

The Role of “Terminological Explanations” in Stanisław Leśniewski’s Formalization of the Foundations of Mathematics

Summary

The article deals with the way in which S. Leśniewski performed the radical formalization of mathematics. “Terminological explanations” were a metalanguage description of the language used to fromalize mathematics.

Keywords: Stanisław Leśniewski, formalization of protothetics, terminological explanation.