Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie

Matematyka III, Częstochowa 1995/96

Řešení problémů v hodinách matematiky

Jan Kopka

Didaktici matematiky dnes po celém světě věnují značnou pozornost řešení problémů v hodinách matematiky. Souvisí to i s dnešním pohledem na matematiku a s jejím postavením ve vzdělávacím systému.

Od starověku až do počátku tohoto století měla matematika ve vzdělávání mimořádné postavení. Např. Plato řekl, že ti, co jsou přirozeně dobří na počítání, jsou přirozeně dobří v jakémkoli jiném studiu. Ti, kteří jsou v počítání slabí, pokud jsou v něm vzděláváni a cvičeni, se pak zlepší a stanou se bystřejší, než byli.

Studium matematiky nejméně od dob Platových je tedy považováno za studium, které zdokonaluje schopnost člověka myslet, uvažovat, ale i řešit problémy světa kolem nás.

Měli bychom zdůraznit, že problémy měly od starověku centrální postavení v hodinách matematiky. Výuce řešení problému však nebyla věnována ani zdaleka taková pozornost, jakou bychom dnes očekávali. A přitom některé zvláštní metody (např. metoda falešného předpokladu) sahají svými kořeny také až do starověku.

V našem století se však postavení matematiky ve vzdělávacím systému pod vlivem mnoha událostí změnilo. Přestalo se např. věřit, že samotné studium matematiky rozvíjí lidské myšlení. A tak se otevřelo pole působnosti pro didaktiky matematiky. Začali řešit otázky co a jak učit žáky ve škole, aby matematika skutečně začala rozvíjet schopnost člověka myslet a řešit problémy reálného světa. Kritici školské matematiky především z řad nematematiků požadovali stále silněji, aby školská matematika skutečně připravovala žáky na život v tomto světě. Vynikající matematici však požadovali, aby „čistá" a aplikovaná matematika byly ve škole v rovnováze. Při přílišném zdůrazňování aplikací by se totiž mohla vytratit logika této disciplíny. Jedním z důsledků kritických snah bylo i to, že se do popředí zájmu dostalo řešení matematických problémů. Mnozí didaktici předpokládají, že učíme-li žáky řešit matematické problémy, učíme je tím řešit i ostatní problémy.

V souvislosti s předkládáním problémů a jejich řešením ve školské matematice se vynořuje celá řada otázek. Uveďme některé z nich:

1. Proč vůbec zařazujeme problémy a jejich řešení do školské matematiky?
   Ač o této problematice již mnohé víme, úplná a kompletní odpověď pravděpodobně známa není.

2. Jaké druhy problémů a jaké způsoby jejich řešení bychom měli do školské matematiky zařazovat?

3. Jakou časovou dotaci věnovat řešení problémů?
   Odpověď na tuto otázku bezprostředně závisí na odpovědi na otázku 2.

4. Jakým způsobem formulovat problémy?
   Této otázce je věnována poměrně malá pozornost, a přitom ze dvou problémů, jejichž matematický základ je stejný, může být jeden formulován jako rutinní problém, zatím co formulace druhého povede v pravém slova smyslu ke zkoumání.

5. Kdo vymýšlí problémy?
   Mají se ve školské matematice řešit pouze problémy, které jsou např. v učebnici, nebo mají nové problémy v závislosti na situaci vytvářet i učitel a žáci?

6. Používají se problémy a jejich řešení ve školské matematice k rozvoji schopností žáků tyto problémy řešit nebo i z jiných důvodů?
   Z praxe víme, že problémy často zařazujeme z mnoha dalších důvodů jako je motivace, objasnění nějaké ideje, procvičení, rekreace atd. V historii to často bylo i proto, abychom zdůvodnili význam matematiky.

Po tomto obecnějším úvodu se zaměříme na hlavní téma, kterým jsou tzv. izolované a neizolované problémy. Začněme dvěma příklady, které uvádí dr. Solvang z univerzity v Oslo.

Problém 1 *Nechť a, b, c jsou reálná čísla pro něž platí*

$$a + b + c = 0 \tag{1}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \tag{2}$$

Jakou hodnotu má výraz

$$a^4 + b^4 + c^4 \;\; ? \tag{3}$$

Možné odpovědi jsou: 3/5, 1/3, 1/4, 1/2, žádná z předchozích.

Tento problém je vzat z norské matematické soutěže, která se samozřejmě nazývá Abelova.

Řešení: Výraz (3) můžeme získat z podmínky (2) umocněním obou jejich stran

$$1 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \tag{4}$$

Výraz v závorce můžeme dostat pomocí podmínky (1)

$$0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

Odtud použitím podmínky (2) obdržíme

$$ab + ac + bc = -1/2 \tag{5}$$

Dalším umocněním obou stran výrazu (5) obdržíme

$$1/4 = (ab + ac + bc)^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c)$$

Odtud použitím podmínky (1) získáme:

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 1/4$$

Po dosazení tohoto výsledku do (4) dostaneme:

$$a^4 + b^4 + c^4 = 1 - 2 \cdot 1/4 = 1/2$$

Problém 1 je izolovaným problémem v norské i české školské matematice, protože se v učebnicích těchto zemí nevyskytují žádné problémy, které by se k němu vztahovaly. Proto nám příliš neposlouží při rozvíjení schopnosti žáků řešit matematické problémy (je pro svoji izolovanost také příliš těžký). Protože se však při jeho řešení vyskytuje celá řada úprav algebraických výrazů, mohl by rámec tohoto problému dobře posloužit při procvičování těchto úprav. V tom případě však bude třeba, aby učitel nesl hlavní tíhu určení strategie řešení a žáci budou zaměřeni především na provádění vlastních úprav.

Problém 2 *Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ není reálné číslo.*

Řešení: Tento důkazový problém obvykle řešíme sporem, tzn. předpokládáme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo. Tím předpokládáme, že $\sqrt{2}$ lze vyjádřit ve tvaru zlomku p/q, kde p, q jsou přirozená čísla. Navíc můžeme p, q zvolit tak, že jsou nesoudělná. Tzn.

$$\sqrt{2} = p/q \quad \text{kde } p, q \text{ jsou nesoudělná přirozená čísla.} \tag{6}$$

Pomocí teorie dělitelnosti v přirozených číslech nakonec obdržíme důsledek, že obě čísla p i q jsou dělitelná číslem 2, což znamená, že jsou soudělná. To je však spor s předpokladem.

Problém 2 je opět izolovaným problémem školské matematiky, protože se v ní neřeší žádné problémy zabývající se iracionalitou čísel. Předložené řešení problému 2 proto pravděpodobně nikterak nepomůže rozvinout schopnost žáků řešit matematické problémy. Může nám však dobře posloužit jako motivační problém při konstrukci tělesa reálných čísel či při diskusi o těchto číslech.

Při zadávání problému a jejich řešení ve školské matematice musíme mít vždy dostatečný matematický základ. Pokud v dané oblasti známe málo, je málo pravděpodobné, že něco vymyslíme. Pokud neznáme nic, pak nevymyslíme nic. V tomto smyslu — vztah problém a příslušná matematická teorie — proto nemůže být žádný problém absolutně izolovaný.

Zabývejme se izolovaností ve vztahu k jiným problémům. Řekněme, že daný problém je pro určitého žáka *izolovaný,* když tento žák nezná žádné podobné problémy, které by mu mohly pomoci při jeho řešení. Podobnost problémů se může projevit v jejich formulaci, určitě se však projevuje při řešení. Z předchozího vyplývá, že otázka izolovanosti či neizolovanosti problémů vystupuje do popředí v souvislosti s problematikou rozvoje schopnosti studentů řešit problémy. Izolovanost či neizolovanost problému také podstatně ovlivňuje jeho obtížnost.

Ve školské matematice bychom se měli vyvarovat většího počtu izolovaných problémů, alespoň pro průměrné žáky. U vynikajících žáků je tomu samozřejmě jinak.

Izolovaných problémů se můžeme ve školské matematice zbavit např. tím, že vytvoříme skupiny vnitřně příbuzných problémů. Nyní ukážeme jednu konkrétní metodu, pomocí které takovéto skupiny problémů vytváříme. Nazýváme ji *metodou generovaných problémů.*

Učitel zadá studentům problém a pomáhá jim při jeho řešení. Když je problém vyřešen a jeho řešení je dostatečně objasněno, vyzývá učitel studenty, aby vytvářeli podobné problémy. Tyto problémy se tvoří z původního problému pomocí obměňování, analogie, zobecňování atd. Původní problém tak slouží jako generátor.

Vzhledem k aktivitě studentů můžeme celý postup rozdělit do dvou etap. První etapu lze nazvat řízenou (aktivní je především učitel), druhou etapu nazýváme volnou (aktivní má být především žák).

První nové problémy obvykle umožňují použít při svém řešení metodu řešení generátoru či metodu pouze nepatrně pozměněnou. Později jsou pak vytvářeny obtížnější problémy při jejichž řešení často musí opět pomoci učitel.

Aby žáci skutečně sami vytvářeli ve druhé etapě nové problémy, k tomu je potřeba dlouhodobý trénink. V opačném případě tvoří nové problémy pouze učitel.

O metodě generovaných problémů a konkrétních příkladech použití této metody je možné se dočíst ve společném sborníku Univerzity v Oslo a Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem: *Selected Topics from Mathematics Education 2,* Centre for Teacher Education and In–Service Training University of Oslo — Norway 1993.

Název článku: JAN KOPKA; *Problem Solving — Method of Generating Problems.*