Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie

Matematyka III, Częstochowa 1995/96

Poznámky ke kurzu matematické analýzy a některé aspekty výkladu posloupností funkcí a funkčních řad

Štěpán Pelikán

Výuka matematické analýzy na vysokých školách České republiky připravujících učitele základních a středních škol je často diskutovanou otázkou. I při posledním setkání učitelů kateder matematiky z těchto vysokých škol v září 1993 v Ústí nad Labem byl posuzován rozsah a obsah výuky matematické analýzy na jednotlivých vysokých školách, ale především také didaktické přístupy k výkladu dané problematiky. Byl proveden rozbor učebních plánů a ukázalo se, že jsou mezi učitelskými fakultami značné diference v rozsahů i obsahu ve výuce matematické analýzy. Provedení rozboru obsahové náplně kurzů je značně obtížné. Nestačí vyjmenovat pojmy, které jsou předmětem výkladu, ale především přesně vymezit úroveň jejich zobecnění, na kterém by si studenti daný pojem měli osvojit a jejich zařazení do celkového kontextu učebního plánu. Z provedeného rozboru a následné diskuse vyplynulo, že názory jednotlivých kateder jsou značně odlišné, zvláště pak v učitelském studiu matematiky pro střední školy (10.–12. třída).

Obsahová náplň kursu matematické analýzy by měla být předurčena profilem absolventa. Předpokládám, že je nutné odlišit profesní přípravu odborného matematika (tedy matematika, který bude matematiku rozvíjet jako vědní obor) od profesní přípravy učitele matematiky či „aplikovaného matematika". V čem by se tedy měla lišit obsahová náplň kurzu matematické analýzy v profesní přípravě učitele matematiky a matematika — vědce? Úroveň zobecnění celé řady pojmů v těchto profesních přípravách je stejná, ale podstatně by se měl lišit didaktický přístup k výkladu těchto pojmů. V profesní přípravě učitele je neopomenutelný výklad historického vývoje daného pojmu a motivačního materiálu, který mu umožní transformovat získané poznatky na úroveň, která odpovídá školské praxi. Aby ovšem byl schopen tuto transformaci myšlenkově provést, musí vedle teoretických poznatků získat i „početní" dovednosti a dostatečné množství ilustračních příkladů. Navíc je třeba u studentů v každé matematické disciplině cílevědomě rozvíjet didaktické schopnosti.

Speciální předmět didaktika matematiky není schopna vzhledem k malé hodinové dotaci a rozsahu jednotlivých matematických disciplín v plné míře všechny tyto úkoly zajistit. Při profesní přípravě „odborného" matematika jsou tyto úkoly zcela jiné: Výklad daných pojmů je též jako u budoucích učitelů matematiky veden především heuristickými metodami k určité hladině obecnosti, ale pak jsou dané pojmy dávány do takových souvislostí, aby vytvářely základ pro další zobecňování, strukturalizaci a pod. U budoucího učitele matematiky jsou předkládané pojmy také zkoumány a dávány do souvislostí, ale spíše takových, které vedou zpět od obecného ke konkrétnímu. Experimentuje se s předpoklady vět, vytvářejí se příslušné ilustrující příklady tak, abychom studentu umožnili provést transformaci obecných odborných poznatků na úroveň školské praxe. Učitel matematiky na základní i střední škole si musí být vědom, že tato transformace neznamená zjednodušení — ve smyslu připuštění nepřesnosti, ale v tom, že se zesilují předpoklady vět, aby byly pravdivé na takových strukturách (množinách, funkcích a pod.), které odpovídají intelektuální zralosti žáků a jejich konkrétním představám.

Zavedeme-li například Riemannův integrál přes elementární množinu M (tj. množinu, která je sjednocením konečného počtu disjunktních intervalů) z funkce omezené na množině M, která má na M nejvýše konečný počet bodů nespojitosti, pak u učitelského studia je především potřeba ukázat, že množina riemannovsky integrovatelných funkcí je „dostatečně" bohatá pro aplikace v technické praxi. Zesílením předpokladů (spojitost a nezápornost funkce na uzavřeném intervalu) se transformuje úroveň zobecnění, které vede studenty středních škol k názorné představě výpočtu obsahu rovinného útvaru („křivočarého" lichoběžníka). Naopak u odborného studia matematiky se na ilustrujících příkladech snažíme odhalit příčiny neměřitelnosti množiny a riemannovsky neintegrovatelných funkcí v nedostatečném zobecnění pojetí Jordanovy teorie míry. Tím položíme základní kameny obecnější Lebesguově míře. Neznamená to ovšem, že studenty učitelství neseznámíme s riemannovsky neintegrovatelnými funkcemi, případně i s Lebesguovou mírou, ale cíl a metodický postup výkladu se v obou profesních skupinách liší.

Často se hovoří o poměru induktivních a deduktivních metod při výuce matematiky a vůbec při řešení problému. V praktické činnosti je těžké obě metody od sebe odlišit, protože se prolínají a záleží na konkrétní fázi řešení problému a na celé řadě objektivních a subjektivních příčin. V matematické analýze je tento poměr posunut směrem k dedukci, zvláště v důkazové technice. V historickém vývoji zdokonalování techniky důkazu, strukturalizací a pod. se postupně v mnoha případech ztratila původní názorná představa stavby daného důkazu a byla zamlžena „umělou" konstrukcí. Jestliže se při výkladu nahromadí několik takových důkazů bezprostředně za sebou, zvláště probíhá-li výuka formou „definice, věta, důkaz", stává se student pasivním divákem, což vede k povrchnímu osvojení teoretických poznatků a malému aktivnímu přístupu k vykládané teorii. Je tedy otázkou, zda za tuto cenu se mají dokazovat všechny předkládané věty, nebo oproti deduktivnímu pojetí důkazu alespoň občas postavit induktivní postupy ověřování vlivu změny předpokladů a z toho plynoucích důsledků.

Vytváření příslušných příkladů vede studenty k aktivnímu zapojení, umožní jim to hlubší pochopení věty, rozlišení nutných a postačující podmínek a pod. Zvolíme-li tento postup, pak je vhodné provést kombinace změn předpokladů vět vyčerpávajícím způsobem, aby si studenti alespoň na příkladech ověřili, že jedině předpoklady uvedené v dané větě zaručují její obecnou platnost. Časově je tento postup mnohem náročnější než samotné provedení důkazu a uvedení jednoho či dvou protipříkladů. Tento postup sice nenahradí „exaktní" matematický důkaz, ale přispěje k aktivnímu osvojení dané věty a takto získané zkušenosti vedou studenta k analogickému přístupu při studiu dalších vět.

V kursu matematické analýzy je možno tento postup zvolit na kterékoliv větě. V našem případě je budeme demonstrovat na větě, která odpovídá na otázku možnosti záměny pořadí limity funkce a limity posloupností funkcí. Jedná se tedy o tuto záměnu

$$\lim_{t\to x}(\lim_{n\to\infty} f_n(t)) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{t\to x} f_n(t)) \,, \tag{1}$$

kde x je libovolný hromadný bod množiny M a vlastně říká, že limita posloupnosti spojitých funkcí je spojitá funkce na množině M. Platnost rovnosti (1) je dána touto větou:

Věta 1 *Nechť posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na M k limitní funkci f. Nechť x je hromadný bod množiny M a nechť $\lim_{t\to x} f_n(t) = a_n$, pro všechna $n \in N$. Potom posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a platí rovnost (1).*

Podstatnou roli v uvedené větě mají tyto předpoklady:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost spojitých funkcí na M.
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na množině M konverguje stejnoměrně k limitní funkci f.

Rozborem věty a kombinací změn předpokladů dojdeme k těmto důsledkům:

(a) Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost spojitých funkcí, která konverguje nestejnoměrně, tj. pouze bodově na množině M. Pak limitní funkce může být:

(a) spojitá, (b) nespojitá.

(b) Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nespojitých funkcí, která konverguje stejnoměrně na množině M. Pak limitní funkce může být:

(a) spojitá, (b) nespojitá.

(c) Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nespojitých funkcí, která konverguje nestejnoměrně na množině M. Pak limitní funkce f může být:

(a) spojitá, (b) nespojitá.

(d) Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost spojitých funkcí, která stejnoměrně konverguje na množině M. Pak limitní funkce f je spojitá.

Nyní již můžeme přistoupit k vytváření příslušných příkladů. Nezbytným předpokladem k urychlení práce je důkladné osvojení a procvičení předcházejících vět o stejnoměrné konvergenci, kde si studenti vyřešili řadu příkladů, které odpovídají výše uvedeným důsledkům. Bez podrobnějších výpočtů uveďme přehled ilustračních příkladů:

1a Příkladem takové posloupnosti je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in \langle 0,1\rangle = M.$$

Funkce f_n jsou spojité na M, limitní funkce

$$f(x) = 0$$

je spojitá a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na M konverguje nestejnoměrně $(\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2})$.

1b Příkladem takové posloupnosti je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}, x \in \mathbf{R}.$$

Funkce f_n jsou spojité na $\mathbf{R}$, limitní funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \neq 0 \\ 1, & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

je nespojitá na $\mathbf{R}$ a konvergence není stejnoměrná na $\mathbf{R}$. $(\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1)$.

2a Příkladem takové posloupnosti je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+n^2x^2} & \text{pro } x \in (0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1\rangle \\ \frac{1}{n} & \text{pro } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Funkce f_n jsou nespojité

$$\left(\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{2}{4+n^2} \neq \frac{1}{2} \right),$$

limitní funkce

$$f(x) = 0$$

pro $x \in \langle 0,1 \rangle$ je spojitá a konvergence je stejnoměrná na $\langle 0,1 \rangle$ ($\sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \to 0$ pro $n \to \infty$).

2b Příkladem takové posloupnosti je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+n^2x^2} & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1\rangle = M \\ 1 & \text{pro } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Funkce f_n jsou nespojité na $\langle 0,1 \rangle$, limitní funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in M \\ 1 & \text{pro } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

je nespojitá na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a konvergence je stejnoměrná na intervalu $\langle 0,1 \rangle$
($\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2n} \to 0$,
pro $n \to \infty$ $\sup_{x=\frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)| = 0$,
čili $\sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f_n(x) - f(x)| = 0$).

3a Příkladem takové posloupnosti je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx}{1+n^2x^2} & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1\rangle = M \\ \frac{1}{n} & \text{pro } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Funkce f_n jsou nespojité na intervalu $\langle 0,1 \rangle$

$$\left(\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{2n}{4+n^2} \neq \frac{1}{2} \right),$$

limitní funkce

$$f(x) = 0$$

je spojitá na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a konvergence není stejnoměrná na $\langle 0,1 \rangle$ ($\sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2}$).

3b Příkladem takové posloupnosti je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx}{1+n^2x^2} & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1\rangle = M \\ 1 & \text{pro } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Funkce f_n jsou nespojité na intervalu $\langle 0,1\rangle$, limitní funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in M \\ 1 & \text{pro } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

je nespojitá na $\langle 0,1\rangle$ a konvergence není stejnoměrná na $\langle 0,1\rangle$ ($\sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2}$).

4 Takových posloupností, které splňují předpoklady uvedené věty studenti spočítali v předcházející části dostatek.

Vytváření odpovídajících příkladů je pro studenty dosti náročné a především na počátku studia těchto vět je potřebná spolupráce s učitelem. Ale vynaložené úsilí významně přispěje k pochopení věty a k důkladnému procvičení všech používaných pojmů. Obdobným způsobem jsou připraveny i věty o záměně derivace, resp. primitivní funkce a limity posloupnosti.

Je třeba upozornit, že některé předpoklady nelze opomenout, či měnit. Například bez předpokladu bodové konvergence $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$, což je posloupnost derivovaných funkcí, může rovnost záměny derivace a limity posloupnosti ztrácet smysl. Vezměme posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{\sin n^4 \cdot x}{n^2}, \ x \in \mathbf{R}\,.$$

Na základě Weierstrassova kritéria pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ zjistíme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nulové funkci na $\mathbf{R}$. Ale $f_n' = n^2 \cdot \cos n^4 x$ na $\mathbf{R}$ nekonverguje. To znamená, že ze stejnoměrné konvergence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoznačně neplyne ani bodová konvergence $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$.

References

1. Pelikán, Š.-Zdráhal, T.: *Matematická analýza,* Číselné řady, posloupnosti a řady funkcí, Skriptum PF Ústí nad Labem, 1984

2. Vopravil, V. (red.): *Celostátní seminář kateder matematiky,* Sborník referátů, UJEP Ústí nad Labem, 1993