PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Seria: PEDAGOGIKA 1991 z. II

Albina Słomska

ANALIZA PORÓWNAWCZA PROGRAMÓW NAUCZANIA POCZĄTKOWEGO MATEMATYKI W NRD I PRL

Wstęp

Matematyka jako przedmiot szkolny jest jednym z podstawowych przedmiotów zarówno w ogólnej koncepcji nauczania początkowego PRL, jak i NRD. W założeniach obu tych koncepcji przyswajanie celowo dobranych i odpowiednio usystematyzowanych treści matematycznych ma przyczyniać się w dużym stopniu do rozwoju osobowości ucznia. Treści matematyczne, które uczeń ma przyswoić, obok waloru poznawczego tają w sobie pokaźny ładunek czynników wychowawczych aktywizujących między innymi logiczne myślenie ucznia. Twórcza matematyczna aktywność poszczególnych uczniów zależy jednakże od rzeczywistego prawidłowego przyswajania treści zagadnień matematycznych omawianych pod kierunkiem nauczyciela, który organizuje wszystkie interakcje na lekcji matematyki. Przy czym gwarantem pomyślnego przebiegu lekcji jest komunikatywność stosowanych metod nauczania. Jakim powinien być dobór metod trafny dla konkretnej sytuacji klasowej, rozstrzyga sam nauczyciel prowadzący daną klasę, kierując się wtedy głównie wynikiem własnej interpretacji programu nauczania. Jeżeli przyjmiemy za W. Okoniem, że program nauczania to przedstawienie celów, treści oraz metod nauczania i uczenia się danego przedmiotu, niekiedy również wyników, które powinny być osiągnięte przez uczniów i że w nowoczesnym ujęciu program nauczania jest programem czynności uczniów i założonych wyników tych czynności, to konieczność twórczej, głębokiej interpretacji przez nauczyciela haseł programowych staje się bezsporna. Problemem jest przy tym dla wielu nauczycieli trafność dokonanej interpretacji mającej zapewnić (poprzez dobór komunikatywnych metod) osiągnięcie zamierzonych wyników kształcenia matematycznego.

Przedstawiając w tym artykule analizę porównawczą celów, treści i metod nauczania początkowego matematyki w PRL i NRD, chcemy po-

kazać na dwóch różnych programach możliwość niejednakowej realizacji zamierzeń określonych przez bardzo zbliżone cele.

1. Analiza celów i treści

1.1. Cele ogólne i specyficzne (przedmiotowe) kształcenia

Cele ogólne w programie nauczania w NRD (por. Lehrplan 1987 oraz Lenné., 1969), można podzielić na dwa rodzaje: 1) odnoszące się do treści ogólnokształcących i 2) odnoszące się do treści specyficznych dla danego przedmiotu.

1.1.1. Cele ogólne w matematyce

Cele ogólne kształcenia są rozumiane jako kwalifikacje tworzące system. Zakłada się, że po pierwsze, szkoła ma przygotować uczniów do korzystania z przyswojonej wiedzy w rozmaitych sytuacjach ich życia. Po drugie, zakłada się, że uczeń przygotowuje się do życia zdobywając w toku nauczania i uczenia się szereg kwalifikacji: w zakresie zachowań i w zakresie wiedzy. Po trzecie, przyjmuje się, że te niezbędne w życiu kwalifikacje uczeń pozyskuje, gdy przyswaja konkretne treści. Tak same te cele jak i ich realizacja dotyczą także matematyki w klasach I—III.

Nauczanie matematyki w klasach I—III ma na celu zapewnienie gruntownego przyswojenia tych podstawowych elementów wiedzy matematycznej, które są niezbędnymi elementami ogólnego wykształcenia matematycznego i które przyczyniają się do realizacji celów kształcenia i wychowania w nauczaniu początkowym w ogóle. Mocno podkreśla się, że już w klasach I—III uczniowie mogą i powinni przysposabiać się do korzystania z wiedzy i umiejętności matematycznych przy samodzielnym rozwiązywaniu zadań. Za konieczne uważa się ukazywanie zastosowań wiedzy i umiejętności matematycznych w sytuacjach z życia codziennego uczniów. Bardzo dużą wagę przywiązuje się przy realizacji programu nauczania do rozwijania zdolności do giętkości myślenia oraz stwarzania warunków wymagających pracy umysłowej. W świetle tak określonych celów ogólnych cele specyficzne znajdują swój wyraz w doborze treści matematycznych. W klasach I—III cele specyficzne formułuje się w odniesieniu do arytmetyki i geometrii. Sprowadzają się one do przyczynienia się do solidnego przyswojenia podstawowych elementów wiedzy matematycznej, która gwarantuje realizację przedmiotowych celów kształcenia w klasach starszych.

1.1.2. Cele specyficzne arytmetyki

Wymaga się, by uczniowie:

a) przyswoili trwale wiadomości i umiejętności dotyczące wykonywania rachunków w skończonym podzbiorze zbioru liczb naturalnych;

b) stosowali wiadomości i umiejętności w zakresie rachunków;
c) stale rozwijali wiadomości już przyswojone;
d) osiągnęli biegłość w wykonywaniu działań;
e) opanowali pamięciowo podstawowe zadania związane z dodawaniem, odejmowaniem i mnożeniem (przy dwóch składnikach albo czynnikach);
f) rozumieli porządek w zbiorze liczb naturalnych;
g) rozumieli własności działań intuicyjnie [1], nie formalnie;
h) rozumieli związki między działaniami;
i) zdobywali stopniowe umiejętności obliczeń pamięciowych;
j) opanowywali pisemne techniki obliczeń (od klasy III);
k) przyswajali stopniowo umiejętność pracy ze zmiennymi i występującymi w formułach nazwowych [2], w formułach zdaniowych [3] oraz tabelach;
l) opanowali rozwiązywanie prostych równań;
m) opanowali rozwiązywanie prostych nierówności;
n) nauczyli się rozwiązywać zadania tekstowe z zakresu arytmetyki.

---

1) Wobec wieloznaczności wyrazu „intuicja" przyjmujemy w tym artykule za Z. Krygowską, iż wiedza intuicyjna to wiedza niesformalizowana (na przykład cała geometria Euklidesa).

2) Forma nazwowa jest szczególnym przypadkiem formuły nazwowej zdefiniowanej indukcyjnie ze względu na złożoność formuły.

1. Każda zmienna jest formułą nazwową.

2. Każda stała nazwowa a, b, c, ... jest formułą nazwową.

3. Wyrażenie złożone z symbolu funkcyjnego, po którym występuje nawias z pewną ilością zmiennych ustaloną dla danego symbolu funkcyjnego, jest formułą nazwową.

4. Wyrażenie powstające przez podstawienie w formułę nazwową zamiast pewnej zmiennej pewnej innej formuły nazwowej jest samo z kolei formułą nazwową.

5. Każda formuła nazwowa powstaje z formuł 1, 2, 3 przez stosowanie skończoną ilość razy operacji 4 (3, str. 178).

Forma nazwowa jest formułą nazwową z wyjątkiem punktu 2.

3) Forma zdaniowa jest szczególnym przypadkiem formuły zdaniowej zdefiniowanej indukcyjnie ze względu na złożoność formuły.

1. Predykaty atomiczne $x=y$, $P(x)$, $Q(x, y)$, ... są formułami zdaniowymi.

2. Podstawienie w formułę zdaniową zamiast dowolnej zmiennej wolnej pewnej formuły nazwowej jest formułą zdaniową.

3. Jeśli A i B są formułami zdaniowymi, to formułami zdaniowymi są również wyrażenia: $A \Rightarrow B$, $\sim A$, A B, A B, A B, x_1A, x_1A, gdzie x_1 jest dowolną zmienną (3, str. 139, 178).

Forma zdaniowa jest formułą zdaniową z wyjątkiem zdań zamkniętych.

1.1.3. Cele specyficzne geometrii

Wymaga się, by uczniowie:

a) wykrywali i rozpoznawali figury geometryczne w otoczeniu;
b) umieli rysować figury geometryczne;
c) umieli wykrywać proste związki między figurami;
d) umieli opisywać związki między figurami;
e) uczyli się wyobrażać sobie figury geometryczne.

Do celów specyficznych zaliczyć można także cele będące kwalifikacjami interdyscyplinarnymi.

1.1.4. Kwalifikacje interdyscyplinarne takie jak:

a) intuicyjne rozumienie pojęcia zbioru elementów;
b) umiejętność utrwalania z pomocą reguł (a później formuł) stosunków między przedmiotami otaczającego ucznia świata;
c) znajomość najprostszych form matematycznych sposobów pracy poprzez posługiwanie się wielkościami zmiennymi występującymi w formułach nazwowych, tabelach, równaniach i nierównościach;
d) nawyk analizowania obiektów ze świata rzeczywistego poprzez opisywanie obiektów matematycznych;
e) nawyk uzasadniania twierdzeń;
f) umiejętność pozyskiwania wniosków poprzez proste porównywania i uogólnianie;
g) przekonanie o pożyteczności posługiwania się elementami języka matematycznego przy wyrażaniu swoich spostrzeżeń;
h) nawyk przemyślanego i planowego postępowania;
i) umiejętność koncentrowania uwagi na zagadnieniu;
j) nawyk kontrolowania poprawności uzyskiwanych wyników i osiągania pewności przy samodzielnym rozwiązywaniu zadań.

Realizacji omówionych celów towarzyszą następujące założenia metodologiczne.

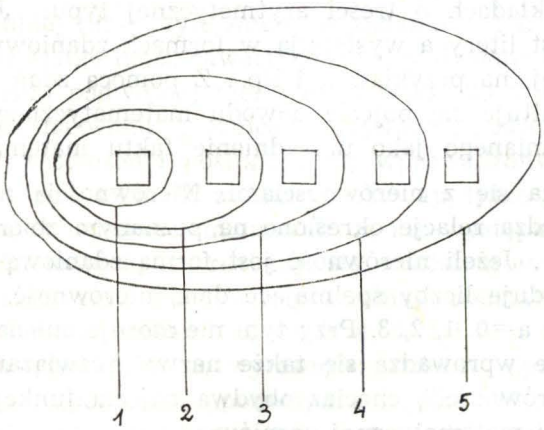
1. Pojęcia matematyczne są odbiciem obiektywnych praw świata rzeczywistego materialnego utrwalane w świadomości człowieka poprzez powtarzające się obserwacje elementów tej rzeczywistości i relacji między nimi.
2. Język matematyczny jest swoistą formą utrwalania pojęć matematycznych i relacji między nimi.
3. Nauczanie matematyki nie można oderwać od jej zastosowań, jej wartość jest zdeterminowana przez jej zastosowania.
4. Gwarantem realizacji złożonego systemu celów w nauczaniu początkowym matematyki jest uczeń aktywny, pracujący nie tylko świadomie, lecz także samodzielnie.

1.2. Analiza treści zagadnień arytmetycznych

Arytmetyka jest głównym działem matematyki w klasach I—III. W treściach tego działu i w ich strukturze odzwierciedla się, jakie konkretne kwalifikacje powinien zdobyć uczeń przygotowujący się do dalszej nauki i które będą przydatne w jego życiu pozaszkolnym.

1.2.1. Pojęcia pierwotne i ich interpretacja

W klasie I w nauczaniu matematyki centralnym pojęciem jest pojęcie liczby, a pomocniczymi — pojęcia relacji: „mniej", „więcej", „równy", „równoliczny". Najpierw ukazuje się liczbę jako cechę zbioru nieuporządkowanego. Jest to aspekt kardynalny kształtujący się w związku z relacją równoliczności zbiorów dowolnych przedmiotów. Natychmiast po zaznajomieniu się z pierwszymi liczbami od 1 do 5 następuje ich uporządkowanie i utrwalenie pozyskanych wiadomości z użyciem języka matematycznego czyli symboli: „<", „>", „=". Wraz z porządkowaniem liczb w zakresie od 1 do 5 wprowadza się pojęcie następnika i poprzednika liczby. Od samego początku, już przy pracy z liczbami w zakresie 1—5 pojęcie zbioru liczb naturalnych zaczyna funkcjonować jako pojęcie dotyczące zbioru nie tylko uporządkowanego, ale i nieskończonego (1, 2, 3, 4, 5, ...). Jednocześnie z intuicyjnym rozumieniem pojęcia zbioru liczb naturalnych kształtuje się rozumienie dodawania jako działania określonego na skończonym zbiorze 1, 2, 3, 4, 5 oraz znaku „+" jako symbolu dodawania. Każda kolejna liczba naturalna wprowadza się jako następnik ostatniej poznanej liczby, nie będącej jednakże liczbą ostatnią we wciąż wydłużającym się ciągu liczb naturalnych. Przy tym ustawicznie utrwala się pojęcie poprzednika i następnika liczby naturalnej na coraz to nowych przykładach. Znamienne są rysunki ilustrujące istotę wprowadzania kolejnych liczb naturalnych.



Zarówno wielokropek, który wystąpił wcześniej, jak i powyższy rysunek mają bardzo ważną wymowę, nawiązują mianowicie do rozumienia nieskończoności, co więcej do rozumienia nieskończoności jako potencjalnej.

Pojęcia składnika i sumy wprowadza się, gdy uczeń wykonuje dodawanie w zakresie 1—5. Korzystając z aspektu kardynalnego liczby uczeń zauważa prawo przemienności dodawania dwóch liczb i przyswaja go jako rezultat uogólnienia, do którego prowadzi indukcja zupełna. Następnie zakres liczb naturalnych rozszerza się do 10. Rozszerzeniu zakresu towarzyszy porządkowanie zbioru liczbowego rozszerzonego. Kolejne nowe pojęcie różnicy dwóch liczb w zakresie 1—5 z jednoczesnym wykazaniem związku między odejmowaniem a dodawaniem liczb i wprowadzeniem symbolu „—".

Bardzo ważnym momentem jest wprowadzenie liczby 0. Pojęcie zera kształtuje się w kilku aspektach jednocześnie: 1) zero jako wynik odejmowania, 2) zero jako liczba mniejsza od każdej innej liczby, 3) zero jako neutralny lewostronny i prawostronny element dodawania, 4) zeru odpowiada początkowy punkt na osi liczbowej.

Dwa następne nowe pojęcia to pojęcie zmiennej wraz z pierwszym symbolem oznaczającym zmienną oraz pojęcie dowodu. W odróżnieniu od pojęcia zmiennej pojęcie dowodu występuje niejawnie, tj. bez wprowadzenia nazwy „dowód". Zaczyna ono funkcjonować z chwilą wyróżnienia i mocniejszego podkreślenia zdania złożonego, w którym wyraża się związek logiczny warunkowy międzyzdaniowy. Ten związek wynikania logicznego zwraca na siebie uwagę dzięki uwydatnieniu roli spójnika języka potocznego „jeżeli ... to ...". Z reguły spójnik ten łączy formy zdaniowe o treści arytmetycznej. Zdania złożone o okresie warunkowym stanowią podstawę do przeprowadzania dowodów dedukcyjnych składających się z jednego kroku. Sposób rozumienia spójnika „jeżeli ...to ..." ukazuje się w przykładach o treści arytmetycznej typu: „Jeżeli $x=a$, to $3+a=5$". Zamiast litery a występują w formach zdaniowych także inne symbole zmiennej, na przykład e, i itp.. Z pomocą zdań złożonych warunkowych kształtuje się pojęcie dowodu matematycznego (jeden krok dowodowy) rozumianego jako uzasadnienie faktu matematycznego.

Uczeń spotyka się z nierównościami. Nierównością nazywa zdanie, w którym stwierdza relacje określone na poznanym zbiorze liczbowym: $4<5$, $6>5$ itp.. Jeżeli nierówność jest formą zdaniową ($a<4$, $4>a$, $2+a=5$), to znajduje liczby spełniające daną nierówność. Wynik przedstawia w postaci: $a=0, 1, 2, 3$. Przy tym nie stosuje ani nazwy, ani symboli zbiorów. Nie wprowadza się także nazw: „rozwiązanie równania", „rozwiązanie nierówności", chociaż obydwa pojęcia funkcjonują niejawnie w działalności matematycznej uczniów.

Następne pojęcie to prawo łączności dodawania. Podobnie jak i prawo przemienności nowe prawo formułuje się jawnie. Wprowadza się jednostkę długości „centymentr" i skrót „cm", korzysta się z wprowadzonej jednostki przy mierzeniu długości. Wynik mierzenia jest liczbą.

Wszystkie wprowadzone pojęcia utrwalają się po kolejnych rozszerzeniach zbioru liczbowego. Przede wszystkim rozszerzony zbiór porządkuje się, uczniowie czytają liczby w kierunku ich wzrastania i w kierunku odwrotnym, odczytują wszystkie liczby znajdujące się pomiędzy dwiema danymi liczbami. Zaznajamiają się z monetami o wartości 1, 10, 5 pfennigów. Wprowadza się formy zdaniowe z dwiema zmiennymi. Jednocześnie wzrasta stopień trudności zadań z tekstem, które uczniowie rozwiązują w zasadzie w pamięci, ale wynik utrwalają w odpowiedzi pisemnej.

Po rozszerzeniu zakresu liczbowego do 100 wprowdaza się mnożenie wraz z wyrażeniami „mnożyć", „czynnik", „iloczyn", „razy", i symbolem „.". Odsłania się prawo przemienności mnożenia. W rozdziale „Liczby naturalne od 21 do 100" dużą wagę przywiązuje się do wielokrotności 10. Wprowadza się i stosuje jednostki: 1 marka i 1 metr oraz skróty dla tych jednostek. Uczniowie pracują ze wszystkimi monetami o wartości do 1 marki włącznie i poznają stosunki: marka—pfennig, metr—centymetr. Rozkładają liczby dwucyfrowe w postaci sumy dziesiątek i jedności, nawiązując tym samym do dziesiętnego układu przedstawiania liczb.

W klasie II oprócz gruntownego utrwalania materiału przerabianego w klasie I wprowadza się szereg nowych pojęć. Uczniowie poznają jednostki: milimetr, decymetr, kilometr oraz związki pomiędzy poznanymi jednostkami długości. Pogłębiają znajomość związku między marką a pfennigiem a także zaznajamiają się z jednostkami: kilogram i litr, bez odniesienia jednakże do innych jednostek masy.

Na tym etapie wymaga się od uczniów posługiwania się wyrażeniami: „więcej niż", „mniej niż", „tyle samo" w zadaniach z treścią. Występują ćwiczenia na określanie liczb, zawartych między dwiema danymi liczbami przy wprowadzeniu podwójnej nierówności typu „$28 < x < 33$". Uczniowie posługują się nazwami: „różnica", „odjemna", „odjemnik". W pracy z przedmiotami z otoczenia posługują się wprowadzonymi jednostkami długości: 1 dm, 1 mm, 1 km. W zadaniach używają tylko jednej jednostki, w zapisie złożonych wielkości mianowanych nie występuje przecinek.

Mnożenie i dzielenie do 100 realizuje się w ścisłym wzajemnym związku tak treści, jak i czasu. Uczniowie przerabiają podstawowe zadania na mnożenie i dzielenie z liczbami: 2, 10, 3, 4, 5, 1 i 0, a następnie z 6, 7, 8 i 9. Przy tym wprowadza się wyrażenia: „dzielić", „podzielone przez", „podzielne przez", „podwoić", „podwojenie", „połowić", „połowa", „wielokrotność dziesięciu", „dziesiąta część", „potrojenie", „trzecia część", „po-

dzielna" i „niepodzielna". Uczniowie posługują się własnościami mnożenia: przemiennością, łącznością, rozdzielnością względem dodawania. Używają symbolu „:". Przerabiają takie zagadnienia jak: $10 \cdot 0$ i $0 \cdot 10$, $a \cdot 1$ i $1 \cdot a$, $a:1$ i $a:a$ gdzie $a > 0$, $a \cdot 0$ i $0 \cdot a$. Wprowadza i używa się wyrazu „iloraz". Uczniowie poznają cechy podzielności liczb przez 10, 5 i 2. Przerabiają związki między wynikami mnożenia przez 2 i 4, 3 i 6, 5 i 10, 2 i 6.

Uczniowie muszą oswoić się z jednostkami czasu: minutą, godziną, dniem i tygodniem na tyle, na ile wymaga tego życie codzienne. Przy zaznajamianiu się z kalendarzem poznają związki między tygodniem a dniem, uczą się odczytywać i zapisywać daty. Odróżniają pojęcia momentu czasu i przedziału czasowego.

W seriach zadań ukazuje się związki między czynnikiem a iloczynem, między dzielnikiem a ilorazem. Uczniowie obliczają sumy i różnice iloczynów i ilorazów, mnożą i dzielą sumy i różnice liczb, przy czym w zapisie działań łącznych stosują nawiasy dla zaznaczenia kolejności wykonywanych działań.

W klasie III uczniowie przyswajają wiadomości o liczbach naturalnych do 10 000 przy jednoczesnym utrwalaniu i systematyzowaniu wiadomości z klasy II. Uczniowie pracują z wielokrotnościami liczb 100 i 1000. Wprowadza się pojęcie „jedna setna", „dwie setne" itd., „jedna tysięczna", „dwie tysięczne" itd.. W związku z tym ukazuje się zależności między jednostkami: kilometr i metr, metr i milimetr. Po zaznajomieniu się z trzycyfrowymi i czterocyfrowymi liczbami uczniowie pracują nad mnożeniem i dzieleniem przez 10 i 100, przyswajają znaczenie wyrażeń: „wielokrotność dziesięciu (stu)", „dziesiąta (setna) część". Przy porządkowaniu liczb do 10 000 wciąż ważną rolę odgrywają pojęcia poprzednika i następnika liczby. Wprowadza się pojęcie „w przybliżeniu" i symbol „≈". Przy rozwiązywaniu zadań tekstowych zwraca się szczególną uwagę na kształtowanie znaczenia wyrażeń: zwiększać (zmniejszać) o" i „zwiększać (zmniejszać) do". Podczas przerabiania dodawania i odejmowania do 10 000 zwraca się uwagę na obliczenia pamięciowe, przy tym rachunki pamięciowe muszą rozwijać u uczniów zdolności do analizowania i syntezowania treści matematycznej. Ponadto zaleca się największą dbałość o kształtowanie nawyku uzasadniania poszczególnych kroków w rozwiązywaniu zadania i kontrolowanie poprawności otrzymywanych wyników. Rachunek pamięciowy i pisemny są ze sobą powiązane. Uczeń musi biegle przeliczać jedne jednostki w drugie i zapisywać z pomocą przecinka cenę składającą się z marek i fenigów oraz długość wyrażoną w metrach i centymetrach. Powinien także zaznajomić się z jednostkami: tona, kilogram, gram i przyswoić stosunki między nimi. Pracuje się nad zdolnością uczniów odkrywania początku rozwiązania zadania i rozkładania zadania na części składowe. W tym celu uczniowie opracowują tabele przy pla-

nowaniu rozwiązań ułatwiających im samodzielne znajdywanie wyniku. W tymże celu układają równania i nierówności do zadań.

Dodawanie i odejmowanie do 10 000 uczniowie wykonują w pamięci i pisemnie. Przeprowadza się przy tym kontrolę odejmowania przy pomocy dodawania. Przy obliczeniach pamięciowych rozwiązują zadania wymagające dokładnie jednego kroku dowodowego. Poznają związki: 1 kg = 1000 g, 1 t = 1000 kg. Przy technice pisemnego dodawania korzystają z prawa przemienności dodawania. Przy technice pisemnego odejmowania kontrolują wynik z pomocą dodawania. Przy rozwiązywaniu zadań tekstowych rozwiązanie składa się z dwóch lub więcej kroków dowodowych.

Przy mnożeniu i dzieleniu do 10 000 w pamięci jest ważne by wiadomości uczniów o podzielności liczb naturalnych powiązać z wiadomościami o dzieleniu z resztą. Korzysta się przy tym z wyrazów: „dzielna" i „dzielnik". W ćwiczeniach występują pojęcia początkowego i końcowego odczytu czasu oraz przedziału czasowego. Wprowadza się jednostkę 1 sekunda z uwzględnieniem związku między sekundą a minutą. Funkcjonuje prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania (odejmowania), wskazuje się na konieczność rozstawiania nawiasów. W zadaniach na mnożenie i dzielenie występują jednostki czasu: miesiąc i rok a także stosunki między rokiem i miesiącem oraz dniem i godziną. Uczniowie opanowują techniki pisemnego mnożenia i dzielenia, uwzględnia się dzielenie z resztą przy dzieleniu pisemnym.

W klasach I—III pojęcie liczby naturalnej kształtuje się w związku z własnościami przedmiotów z otaczającego świata. Z pomocą liczby naturalnej wyraża się opinię o takich mierzalnych cechach konkretnych przedmiotów, jakimi są: długości odcinków, pola figur płaskich, wartość pieniądza, odstęp czasowy, wzrost dziecka, masa przedmiotu, liczebność zbioru skończonego (liczba jabłek w koszyku, skrzyń w magazynie itp.). Liczba naturalna funkcjonuje jako pojęcie abstrakcyjne, jako model, który w życiu dziecka znajduje liczne konkretyzacje, model wspólny dla wielu takich konkretyzacji i dlatego właśnie mający bardzo szerokie zastosowanie.

1.2.2. Analiza porównawcza programu nauczania arytmetyki w PRL (1985) i NRD (1987)

Cele kształcenia matematycznego w klasach I—III sformułowane w programach PRL i NRD nie różnią się istotnie. Natomiast występują dość znaczne różnice treści.

1. W programie NRD pojęcie zbioru występuje tylko jako środek dla zrozumienia pojęcia liczby, nie zaś jako pojęcie wymagające pogłębionej znajomości (porównaj program PRL, klasa I, rozdziały 4, 5 i klasa II, rozdział 1).

2. Według programu NRD liczbę 0 wprowadza się znacznie później niż w programie PRL, gdy uczeń przyswoił już działania: dodawanie i odejmowanie na liczbach od 1 do 5 i poznał liczby 6 i 7 (porównaj program PRL, klasa I, rozdział 6).
3. Znaczne i istotne są różnice w kształtowaniu znaczenia wyrażenia „zero". W nauczaniu w NRD „zero" nie jest wyrazem liczebności zbioru pustego. Sposób rozumienia tego wyrazu ukazuje się przy rozwiązywaniu zadań na odejmowanie dwóch jednakowych liczb (porównaj program PRL, klasa I, rozdział 6).
4. W klasie I NRD nie wprowadza się nawiasów (porównaj program PRL, klasa I, rozd. 12).
5. Z praktycznych umiejętności uczeń klasy I NRD przyswaja tylko mierzenie długości odcinków z pomocą porównywania do jednostki 1 cm oraz rozpoznawanie wartości drobnych monet: 1, 10, i 5 pfennigów (porównaj program PRL, klasa II, rozd. 15).
6. W klasie II NRD uczeń poznaje liczby naturalne do 100 (według programu PRL — do 1 000), więc nie zaznajamia się jeszcze z algorytmem dodawania i odejmowania pisemnego.
7. W programie NRD nie wyodrębnia się działu poświęconego mnożeniu i dzieleniu liczb jednocyfrowych w zakresie 30 (porównaj program PRL, klasa II, rozdział 4).
8. W nauczaniu początkowym NRD nie uwzględnia się ułamków (porównaj program PRL, klasa II, rozdział 7 i klasa III, rozdział 6).
9. W programie NRD nie występuje pojęcie numeracji (porównaj program PRL, klasa II, rozdział 8).
10. W nauczaniu początkowym w NRD nie zaznajamia się uczniów z cyframi rzymskimi (porównaj program PRL, klasa II, rozdział 9).
11. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie do 100 w szkole w NRD przerabia się w klasie II, natomiast w PRL — w klasie III (porównaj program PRL, klasa III, rozdział 1 i 2).
12. W nauczaniu początkowym w NRD nie rozszerza się zakresu liczbowego do miliona, jak w szkole w PRL (porównaj program PRL, klasa III, rozdział 8).
13. Technikę pisemnego dodawania i odejmowania liczb oraz pisemnego mnożenia i dzielenia przez liczbę jednocyfrową poznają uczniowie NRD w klasie III, w PRL — w klasie II).
14. W klasach I—III w NRD nie wprowadza się wyrażeń dwumianowych (porównaj program PRL, klasa III, rozdział 7).
15. W szkole podstawowej NRD wprowadza się dwa rodzaje zadań tekstowych i to jako stałe elementy każdego tematu, począwszy od dodawania i odejmowania do 20 (czyli już w klasie I). Są to: 1) zadania tekstowe o treści matematycznej z gotowym modelem matematycz-

nym i 2) zadania opisujące autentyczne sytuacje z życia ucznia, bądź sytuacje, w których zagadnienie matematyczne ma swoje zastosowanie, a w odniesieniu do których model musi być dopiero skonstruowany.

16. Realizacja niektórych tematów różni się ujmowaniem zagadnień, podejściem do problematyki (na przykład rozdziały: klasa I — 6, 7, 12, 14, klasa II — 3, 4, 9, klasa III — 2 programu PRL).
17. Analizowane programy różnią się pod względem czasu przeznaczonego na realizację poszczególnych tematów.

1.3. Analiza treści zagadnień geometrycznych

1.3.1. Zakres zagadnień geometrycznych

W klasie I NRD uczniowie zaznajamiają się z podstawowymi liniowymi, płaskimi i przestrzennymi figurami i punktami tak dalece, że mogą je rozróżniać i poznawać dalej. Pierwsze obrazy obiektów geometrycznych spostrzega uczeń w prostych obiektach otaczającego go świata. Aby mógł on przyswoić pojęcie geometryczne jako abstrakcyjne, musi wykonać wiele różnorodnych czynności z obiektami konkretnymi: układanie, rozkładanie, zestawienie, składanie, rozcinanie, oznaczanie, porządkowanie, porównywanie, mierzenie. Te wszystkie czynności prowadzą stopniowo do rozumienia pojęcia geometrycznego jako modelu dla wielu sytuacji i zjawisk zachodzących w otaczającym ucznia świecie rzeczywistym. Przy tym kształtują się pierwsze umiejętności posługiwania się linijką z podziałką oraz mierzenia. Poprzez wykonywanie ćwiczeń na orientację w przestrzeni uczeń poznaje znaczenie wyrazów: „na lewo", „na prawo", „nad", „pod", „przed", „z tyłu". Wprowadza się wyraz „punkt" i oznaczenia dla punktów (duże litery alfabetu). Wprowadza się nazwy: „linia", „prosta". Rozpatrują się punkty na prostej, wprowadza się pojęcie odcinka jako części prostej ograniczonej dwoma punktami oraz nazwę i symboliczne oznaczanie odcinków. Porównując odcinki, uczniowie zapoznają się ze znaczeniem wyrazów: „dłuższy", „krótszy", „tej samej długości". Dokonują pomiarów odcinków z pomocą jednostki 1 cm. Rysują proste przecinające się, zaznaczają punkt wspólny, przyswajają znaczenie wyrażenia „przecinać się nawzajem". Z pomocą pieczątek odciskają na papierze w kratkę trójkąty i czworokąty (prostokąty, kwadraty), koła. Wyszukują te figury w otoczeniu i rysują je z pomocą szablonów. Wycinają te figury. Wyszukują, oznaczają, mierzą i porównują odcinki w czworokątach i trójkątach z pomocą linijki z podziałką centymetrową. Formułują proste wnioski.

W klasie II uczniowie pogłębiają wiadomości wyniesione z klasy I, rozwijają je, doskonalą zdobyte umiejętności i poznają nowe pojęcia, zdobywając zarazem nowe umiejętności.

Uczniowie poznają znaczenie wyrażenia „leży na" w odniesieniu do punktu na prostej i oznaczają proste małymi literami alfabetu. Poznają znaczenie wyrażenia „przechodzi przez", gdy prosta przechodzi przez dany punkt. Poznają a następnie stosują pojęcie „leży między", zaznaczając punkty na odcinkach. Wprawiają się w biegłe posługiwanie się poznanymi pojęciami przy badaniu wzajemnego położenia punktu i prostej (odcinka). Poznają pojęcie „promień", zaznaczają początek promienia. W pracy z trójkątami uczniowie muszą posługiwać się nazwami: „trójkąt", „wierzchołek trójkąta", „bok trójkąta". Podobnie rozwija się pojęcie czworokąta. Uczniowie wyszukują trójkąty i czworokąty w swoim otoczeniu. Rysują koła z pomocą cyrkla. Wprowadza się pojęcie „środka koła". Szukają kół w otoczeniu.

W klasie II uczniowie badają także wzajemne położenie dwóch prostych na płaszczyźnie oraz wzajemne położenie dwóch odcinków. Poznają i stosują pojęcie równoległości dwóch prostych (odcinków). Szukają w otoczeniu proste (odcinki) równoległe i rysują na papierze nie kratkowanym z pomocą szablonów proste równoległe. Poznają i stosują pojęcie prostych (odcinków) prostopadłych. Szukają proste nawzajem prostopadłe w otoczeniu i rysują proste prostopadłe z pomocą szablonów na papierze niekratkowanym. Kontrolują dokładność rysunków z pomocą ekierki. Wprowadza się pojęcie równoległoboku i nazwy „równoległobok", a także „wierzchołek równoległoboku", „bok równolegołboku". Uczniowie oznaczają wierzchołki i boki równoległoboku. Opracowują własności równoległoboków: każdy równoległobok jest czworokątem, boki przeciwległe są równej długości i równoległe. Rysują równoległoboki z pomocą szablonów. Wprowadza się nazwę „prostokąt". Uczniowie szukają prostokątów w otoczeniu, opracowują własności prostokąta: każdy prostokąt jest równoległobokiem, sąsiadujące boki są nawzajem prostopadłe. Poznają i wskazują własności kwadratu: każdy kwadrat jest prostokątem, wszystkie boki kwadratu są równe. Rysują prostokąty i kwadraty z pomocą szablonów i kontrolują dokładność wykonania z pomocą ekierki. Wprowadza się nazwę „prostopadłościan".

Uczniowie szukają sześcienne i prostopadłościenne kształty w otoczeniu. Badają sześciany i prostopadłościany posługując się modelami. Wprowadza się wyrażenie „o jednakowych podstawach", odnoszące się do wielkości przeciwległych powierzchni ograniczających bryłę. Wyszukują kwadraty i prostokąty na modelach prostopadłościanów i sześcianów. Składają różne figury przestrzenne z prostopadłościanów i sześcianów (cegiełki budowlane). Od uczniów wymaga się opisywania, kontrolowania i uzasadniania zauważonych własności.

W klasie III uczniowie systematycznie pogłębiają i poszerzają swoją wiedzę. Powinni sprawnie posługiwać się cyrklem przy kreśleniu okręgu

i przy mierzeniu długości odcinka oraz korzystać z tych umiejętności przy konstruowaniu czworokątów (niektórych rodzajów). Muszą nauczyć się rysować prostą h równoległą do prostej g, rysować prostą h równoległą (prostopadłą) do prostej g przechodzącą przez dany punkt P (dwa przypadki: P nie leży na g oraz P leży na g). Wprowadza się i stosuje pojęcie „odległość" (odległość dwóch punktów, odległość punktu od prostej, odległość dwóch prostych równoległychą). Uczniowie rysują prostą równoległą do danej prostej w danej odległości. Wprowadza się i stosuje pojęcia: „promień okręgu", „średnica okręgu". Uczniowie kreślą z pomocą cyrkli koła ze środkiem w danym punkcie i dowolnym bądź danym promieniem. Z kół układają ornamenty i figury. Kreślą czworokąty mając dane ich własności: 1) każde dwa sąsiednie boki są wzajemnie prostopadłe i są jednakowej długości ,2) każde dwa przeciwległe boki są jednakowej długości i równoległe. Wprowadza się pojęcie i nazwę „trapez". Rozważa się stosunki: czworokąt—trapez—równoległobok—prostokąt——kwadrat. Uczniowie kreślą figury geometryczne z pomocą linijki, ekierki i cyrkla; rozcinają dane figury bądź z danych układają nowe. Wprowadza się pojęcia: wierzchołek prostopadłościanu, krawędź prostopadłościanu, ściana prostopadłościanu (ściana prostokątna, ściana kwadratowa). Uczniowie badają przeciwległe ściany prostopadłościanu. Poznają stosunek między sześcianem a prostopadłościanem, siatkę sześcianu, układają z sześcianów różne bryły. Wprowadza się pojęcia ostrosłupa, stożka, walca, kuli i nazwy tych brył. Uczniowie badają, czy powierzchnia bryły jest płaska, czy nie jest. Wyszukują w otoczeniu kształty ostrosłupa, stożka, walca, kuli.

Przy zdobywaniu i stosowaniu wiadomości z zakresu geometrii chodzi przede wszystkim o to, by powiązać je z doświadczeniem życiowym ucznia: z otaczającego świata uczeń czerpie nowe pojęcia geometryczne i potem stosuje je do opisu tegoż świata. Nauczanie geometrii przebiega w ścisłej korelacji z nauczaniem innych przedmiotów. Uczniowie opisują i uzasadniają proste konstrukcje geometryczne oraz kontrolują ich poprawność. Od uczniów wymaga się przy tym, by posługiwali się słownictwem fachowym, tj. by używali wyrażeń matematycznych, których znaczenie zostało określone.

1.3.2. Analiza porównawcza programu nauczania geometrii w PRL i NRD

Pod względem celów programy nauczania początkowego geometrii w PRL i NRD nie różnią się w sposób istotny. Pod względem treści i jej struktury zachodzą znaczne różnice.

1. Również w dziale geometrii w programie NRD nie występują żadne elementy teorii zbiorów (porównaj program PRL, klasa I, rozdział 4, klasa II rozdział 1).

2. Program NRD nie wymaga wprowadzania pojęcia pięciokąta (porównaj program PRL, klasa I, rozdział 3).
3. W pierwszej klasie szkoły NRD porównywanie odcinków odbywa się nie tylko przez ich nakładanie, lecz także przy użyciu linijki z podziałką centymetrową (porównaj program PRL, klasa I, rozdział 3).
4. Pojęcia równoległoboku, sześcianu, prostopadłościanu uczniowie w NRD poznają znacznie wcześniej, bowiem już w klasie II (porównaj program PRL, klasa I, rozdział 3, klasa II, rozdział 5, klasa III, rozdział 4).
5. Uczniowie klasy II w NRD zaznajamiają się z relacjami: prostokąt jest równoległobokiem, równoległobok jest czworokątem, które w nauczaniu początkowym w PRL nie występują wcale (porównaj program PRL, klasa I, rozdział 3; klasa II, rozdział 5; klasa III, rozdział 4).
6. W odróżnieniu od ucznia PRL uczeń NRD w nauczaniu początkowym stopniowo, w klasach I, II, III jest przygotowywany do przyswojenia jednostki objętości.
7. Program NRD nie przewiduje przerabiania pojęcia skali (porównaj program PRL, klasa III, rozdział 4).
8. Zarówno w nauczaniu arytmetyki jak i geometrii odróżnia się w NRD pojęcia (arytmetyczne, geometryczne) od ich nazw. Z reguły najpierw kształtuje się pojęcie, później zaś (nie koniecznie w tej samej klasie, często dopiero w następnej) wprowadza ich nazwy wraz z „obowiązkiem" posługiwania się nimi. To znaczy, że programowo rozróżnia się sferę przedmiotową od języka.

2. Implikacje metodyczne

2.1. Uwagi ogólne

Z programu nauczania matematyki w klasach I—II NRD można wnioskować o dwóch rodzajach ogólnych zaleceń metodycznych: 1) zalecenia metodyczne wyszczególnione w programie to wymagania przestrzegania niektórych zasad nauczania ściśle związanych z rozbudzaniem aktywności uczących się bądź organizacją procesu dydaktyczno-wychowawczego, 2) rozwiązania metodyczne wynikające z doboru i układu treści programowych.

Cele i zadania nauczania początkowego matematyki wymagają takiego ukształtowania nauczania we wszystkich jego fazach, by zapewnić wszystkim uczniom skuteczność ich pracy i radość płynącą z nauki, z aktywnego uczestnictwa w działalności matematycznej. Ponieważ do klasy I przychodzą uczniowie z już posiadanymi różnymi wiadomościami i umiejętnościami przyswojonymi w przedszkolu i w rodzinie, to staje się niezbędne zapewnienie zróżnicowanego podejścia do każdego ucznia na samym początku nauki szkolnej. W pierwszych miesiącach tego okresu

szczególnie zaleca się przyzwyczajanie uczniów do systematyczności w nauce. Dla zapewnienia systematyczności w pracy zaleca się łączyć dwa zabiegi metodyczne: różnicowanie treści i wielokrotne ćwiczenia w zakresie tej samej treści, lecz urozmaicone pod względem ich formy. Jednakże od klasy pierwszej począwszy należy koncentrować się na treści ściśle matematycznej celem zapewnienia racjonalnego przebiegu nauczania.

Dla osiągania lepszych wyników wymaga się tak organizowywać zajęcia, by stale korzystać z wiadomości i umiejętności przyswojonych wcześniej. Należy jednak przy tym uwzględniać indywidualne różnice rozwojowe uczniów. Ponieważ radość uczenia się jest bardzo ważnym czynnikiem, należy wyrażać uznanie uczniowi dla jego osiągnięć i zachęcać do następnych. Stronę werbalną zajęć należy urozmaicać z pomocą gier dydaktycznych, poglądowego i czynnościowego nauczania oraz powiązania matematyki z życiem i najbliższym otoczeniem ucznia. Poprzez dobór zadań zaleca się tworzyć sposobności do łączenia wiedzy matematycznej z doświadczeniem ucznia. Duże znaczenie metodyczne ma wyważenie stosunku między seriami zadań tego samego rodzaju. To samo dotyczy zadań występujących w różnych formach, lecz dotyczących tego samego przedmiotu. W fazie pierwszego utrwalania, w szczególności przy opanowywaniu technik rachunkowych, jest niezbędne rozwiązywanie wielu zadań tego samego rodzaju, zwłaszcza, gdy chodzi o zapamiętanie zadań pełniących rolę paradygmatów; powinny one znaleźć się w centrum uwagi nauczyciela. Stopień trudności następnych ćwiczeń i zadań powinien wzrastać krok po kroku przy wzrastającej ilości zadań różnorodnych. Dla zapewnienia stałej dyspozycyjności i operatywności podstawowych wiadomości i umiejętności uczniowie wykonują ćwiczenia tak zwane „bieżące". Są one niezbędne, by planowo, we właściwym czasie przygotować ucznia do przyswajania nowego materiału. Tak na przykład podczas przerabiania dodawania i odejmowania powinno przygotować ucznia do przyswajania w przyszłości mnożenia i dzielenia, a podczas przerabiania mnożenia i dzielenia wiedza i umiejętności związane z dodawaniem i odejmowaniem powinny być utrwalone.

Przy przerabianiu materiału geometrycznego korzysta się z nabytej wiedzy z arytmetyki. Ćwiczenia bieżące należy dostosować do poziomu poszczególnych uczniów i stosownie zróżnicować celem uzupełnienia stwierdzonych luk w wiadomościach i umiejętnościach. Z metodycznego punktu widzenia istotne jest wyważenie udziału pracy pamięciowej i pisemnej.

Na zakończenie każdego rozdziału uczniowie przerabiają zestaw ćwiczeń przeglądowo-sprawdzających. Zaleca się przy tym brać pod uwagę fragmenty materiału dla uczniów trudne.

2.2. Cechy układu materiału

Dobór treści poszczególnych rozdziałów programu, zadania, ich układ w podręcznikach, uwagi, akcenty, rysunki i schematy świadczą o określonej koncepcji realizacji programu nauczania. Obowiązuje konsekwentne przestrzeganie spiralnego układu materiału. Rozszerzenie wiadomości i umiejętności następuje stopniowo. Towarzyszą temu utrwalanie i systematyzacja typu „spojrzenie wstecz" Lebesgue'a i Poly'i, czyli refleksje nad przerobionym materiałem mające ogromną wartość dydaktyczną. Przy każdym kolejnym rozszerzaniu wiadomości zaznacza się utrwalony trzon, stanowiący minimum kompetencji ucznia na danym etapie uczenia się. Taka realizacja materiału nauczania daje wiele możliwości dla indywidualnego procesu dydaktycznego.

2.3. Wielostronne kształtowanie pojęć

Drugi rys charakterystyczny treści programowych i ich interpretacji podręcznikowej to wielostronne kształtowanie pojęć matematycznych, które realizuje się trojako: 1) przez stosowanie różnych sposobów określania pojęć matematycznych, 2) przez rozróżnianie treści matematycznej i jej zastosowań, 3) przez dobór odpowiednich zestawów zadań i ich kolejności w zestawach. Tak na przykład kształtowanie pojęcia liczby jest ukierunkowane na syntezę sześciu jakościowo różnych aspektów tego pojęcia:

1. liczba jako wynik abstrakcji, do której dochodzi przy porównywaniu zbiorów równolicznych, tj. liczba kardynalna zbioru skończonego;
2. liczba jako cecha umiejscowienia elementu w szeregu elementów po określeniu w zbiorze tych elementów relacji porządku, tj. liczba porządkowa;
3. liczba jako element zbioru liczbowego odpowiadający elementowi innego zbioru (zbioru punktów na osi liczbowej), zatem liczba i jej obraz graficzny występują jako odpowiednie elementy dwóch zbiorów izomorficznych;
4. liczba jako operator w działaniach arytmetycznych; już na tym poziomie pojawia się zapowiedź struktury grupy, gdy odkrywa się możliwość lewo- i prawostronnego wykonywania działań (nie zawsze jest to możliwe) oraz wyróżnienie elementów neutralnych niektórych działań (nie zawsze istnieją);
5. liczba jako wynik mierzenia, zachodzi tu izomorfizm zbioru liczbowego i zbioru wyników mierzenia (długości, czasu itp.);
6. liczba jako model bądź element modelu rozmaitych zjawisk w otaczającym świecie znanych uczniowi od strony jakościowej, modelu służącego do ścisłego poznania i opisu tych zjawisk.

Do syntezy różnych aspektów tego samego pojęcia dochodzi się tu przez łączenie różnego rodzaju sposobów jego określania: poprzez pokaz, przykłady, manipulowanie przedmiotami itp.. Chociaż nauczanie opiera się na doświadczeniu ucznia, to jednak od początku nie tylko łączy się, ale i rozróżnia zagadnienia czysto matematyczne i ich zastosowania. Znajduje to odbicie zarówno w języku, jak i w zadaniach. Mianowicie przy wprowadzaniu nazw obiektów matematycznych stosuje się określenia tak w stylizacji językowej („A nazywamy B"), podkreślając tym samym stosowność użycia nowego wyrażenia w języku, jak i w stylizacji przedmiotowej („A jest to B"), podając tym samym charakterystykę obiektu matematycznego. Stąd też stosowanie zadań z tekstem matematycznym i zadań „rzeczowych", przy czym pierwsze zawsze pełnią rolę modeli dla drugich. Zabiegi mające na celu łączenie treści matematycznej i „rzeczowej" zapobiegają powstawaniu tendencji do odrywania matematyki od zjawisk i przedmiotów, z których zostały wyprowadzone. Odmienną rolę w syntezie pojęć matematycznych spełniają zadania bieżące i poglądowo sprawdzające. Przy rozwiązywaniu zadań pierwszego rodzaju uczeń poznaje i stopniowo przyswaja poszczególne pojęcia, wałsności obiektów matematycznych, działań i własności działań. Przy rozwiązywaniu zadań przeglądowo-sprawdzających nie tylko powtarza i utrwala te pojęcia, ale także włącza poznane treści do szerokiego kontekstu pojęciowego i przyswaja umiejętność konkretyzowania pojęcia matematycznego w zależności od przedstawionej w zadaniu sytuacji. Pogłębia wtedy rozumienie pojęć matematycznych poprzez różnorakie ich konkretyzacje wymagające trafnego użycia tych pojęć. W rezultacie materiał z ostatniego i wcześniejszych rozdziałów systematyzuje się na poziomie wyższym niż w końcu rozdziału poprzedniego, a pojęcie matematyczne występujące jako integralna składowa część pozyskanych wiadomości łączy w sobie nierozerwalnie ukazane w zadaniach możliwości jego rozumienia.

2.4. Wprowadzenie pojęcia zmiennej

W klasie I po zaznajomieniu ucznia z kilkoma pierwszymi liczbami naturalnymi rozpoczyna się systematyczna praca nad pojęciem zmiennej i, w związku z tym pojęciem, dedukcyjne uzasadnianie twierdzeń. Pierwsze typowe zwroty wyrażające związek wynikania: „jeżeli $a=2$, to $3+a=5$", „jeżeli $e=3$, to $e+4=7$", jeżeli $i=4$, to $i-4=0$" itp.. Następnie uczniowie uzasadniają samodzielnie: „jeżeli $5-i=3$, to $i=2$" itp. (jeden krok dowodowy). Nieco później uczniowei klasy I uzasadniają wynik w dwóch krokach dowodowych: „jeżeli $a=5$, to $10+a=15$, ponieważ $10+5=15$". Przy porównywaniu liczb uczniowie uzasadniają: „$13<16$, ponieważ $3<6$" bądź „$16>13$, ponieważ $6>3$". Przy obliczaniu wartości wyrażeń zawierających zmienne uzasadniają wynik z pomocą związku logicznego

wynikania: „jeżeli i=8 oraz u=6, to i—u=2". Przy działaniach z wielokrotnościami liczby 10 uzasadniają: „20+30=50, ponieważ 2+3=5", „50—30=20, ponieważ 5—3=2". Związek wynikania podkreśla się również graficznie: „5+2=7 2+5=7", „5+2=7 → 7—2=5".
↘ 7—5=2

W klasie II często przypomina się uczniom sposób uzasadniania poznany w klasie I: „28—3=25, ponieważ 25+3=28", „uzasadnij, że 34 < 37 i 56 > 52". Podobnie uzasadnia się nierówność 47—b > 43, dla b=0, 1, 2, 3. Niekiedy na związek wynikania wskazuje się pośrednio: „Anna ma policzyć 35 : 5. Ona wie, że 7·5=35, więc 35 : 5=7". Do uzasadniania wypowiadanych sądów pobudza się ucznia z pomocą poleceń typu: „11 : 2 nie można obliczyć, uzasadnij", „porównaj 5·7 z 5·0, 58 z 87, uzasadnij", „rozwiąż i uzasadnij: a) a·6=6, b) 10 : b=10, c) 0·6=a, d) b : 5=0".

W klasie III utrwalają się poznane w klasach I i II formy uzasadniania twierdzeń, przy czym wskazuje się na sposób uzasadniania: „Porównaj i uzasadnij z pomocą dodawania". W ten sposób pojęcie uzasadniania łączy się z pojęciem sprawdzania i kontrolowania wyniku.

Pojęcie zmiennej występuje w czterech charakterystycznych kontekstach: w formach nazwowych (termy) [4], w formach zdaniowych [5], w tabelach i na osi liczbowej. Szczególnie ważną funkcję dydaktyczną pełnią tabele, bowiem przy sporządzaniu tabeli, przy uzupełnianiu tabeli uwidocznia się istota pojęcia zmiennej. Inną funkcję pełni zmienna w formach nazwowych. Przy obliczaniu wartości liczbowej wyrażenia nazwowego dla różnych wartości zmiennej następuje nawiązanie do pojęcia zależności funkcyjnej. Użycie zmiennej w formie zdaniowej (w nierówności bądź równaniu) pozwala na pierwsze kroki w stronę pojęcia spełniania i rozwiązywania nierówności (równania). Przedstawienie zmiennej na osi liczbowej w sposób graficzny poglądowy obrazuje jednoznaczne przyporządkowanie punktu liczbie i odwrotnie.

2.5. Rozwijanie pojęcia funkcji

Myślenie w związku z pojęciem funkcji jest rozwijane u uczniów począwszy od klasy I. Pojęcie funkcji występuje w różnego rodzaju zadaniach i zagadnieniach: uzupełnianie tabeli, obliczanie wartości liczbowej form nazwowych, wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość zbioru liczb i zbioru punktów na osi liczbowej, działania na liczbach, mierzenie wielkości przedmiotów. Chociaż nazwy „funkcja" nie wprowadza się w nauczaniu początkowym, to jednak pojęcie to zaczyna stopniowo odgrywać rolę pierwszorzędną w zagadnieniach matematycznych. Pojęcie funkcji

[4] patrz przypis nr 2.
[5] patrz przypis nr 3.

rozwija się stopniowo, bez zmuszania uczniów do specjalnego zwracania uwagi na to pojęcie, zaczyna ono funkcjonować w myśleniu w sposób naturalny, niewymuszony (podobnie jak w przypadku pojęcia zbioru elementów).

2.6. Zasada abstrakcji w nauczaniu początkowym

Przy kształtowaniu pojęć matematycznych ważną rolę odgrywa umiejętne przestrzeganie zasady abstrakcji. Już w klasie I zasada ta jest niezbędnym warunkiem kształtowania pojęcia liczby. Również przy kształtowaniu pojęć geometrycznych wyobrażenia obiektów geometrycznych formują się przez abstrakcję wywodzącą się z przedmiotów rzeczywistych. Także przy wykonywaniu działań na liczbach wymaga się od ucznia pamięciowego wykonywania rachunków w celu abstrahowania działań matematycznych z czynności na konkretnych przedmiotach. Pomocne są przy tym odpowiednio dobierane zadania z użyciem zmiennej, które pozwalają na uogólnienia i dostrzeganie praw ogólnych stanowiących punkt wyjścia do abstrahowania. Temu samemu celowi służą odpowiednio dobierane zadania na zastosowanie wiadomości matematycznych. Uwzględnianie dydaktycznej zasady abstrakcji zaleca się w nauczaniu początkowym matematyki — zarówno arytmetyki, jak i geometrii — począwszy od klasy I z uwzględnieniem jednakże rozwoju indywidualnego uczniów.

Porównując analizowane programy pod względem zaleceń metodycznych zauważamy duże podobieństwo obu tych programów. Z koniecznością nasuwają się: spiralny tok kształtowania pojęć matematycznych, ich wielostronność, centralne miejsce pojęcia zmiennej i pojęcia funkcji a także ostrożność i daleko posunięty umiar w stosowaniu zasady abstrakcji. Te cechy treści jak i jej układu w obu programach decydują o doborze metod nauczania. Istotne rozbieżności uwidoczniają się jednakże w akcentowaniu wagi poszczególnych zagadnień wśród innych, co musi powodować różnice w przebiegu realizacji programów. Mogą one również być przyczyną niejednakowych efektów nauczania.

Zakończenie

Porównując programy nauczania początkowego matematyki w PRL i NRD stwierdzamy, że mimo różnic programowych wymienionych w punktach 1.2.2 i 1.3.2 główne charakterystyczne cechy programu nauczania początkowego matematyki w PRL i NRD są podobne.

1. W obu programach podstawowe treści nauczania mają układ spiralny.
2. Główne działy to zagadnienia arytmetyczne, które koncentrują się wokół pojęcia liczby naturalnej i czterech podstawowych działań na tych liczbach. W dziale geometrii zaznajamia się ucznia tylko wstępnie z podstawowymi figurami geometrycznymi.

3. W obu programach zarysowuje się drogę od myślenia konkretno-obrazowego do pojęciowego poprzez świadome czynności na przedmiotach materialnych przy stopniowo wzrastającej roli abstrakcji.
4. Zwraca się dużą uwagę na to, by kształtowała się wiedza trwała i operatywna.
5. Ważnym zadaniem jest rozwijanie myślenia logicznego i twórczego oraz kształtowanie umiejętności posługiwania się metodą matematyczną w życiu codziennym.
6. Duży nacisk kładzie się na rozwijanie samodzielności w działalności matematycznej ucznia.
7. Przyjemność uczenia się uważa się za nieodzowną cechę uczenia się matematyki.
8. W obu programach podkreśla się konieczność przyzwyczajania uczniów do systematycznej, wytrwałej i rzetelnej pracy, oraz wpajania nawyku kontrolowania uzyskiwanych wyników, a także kształtowania umiejętności koncentracji uwagi na rozwiązywanym zadaniu.

Ogólna ilość godzin przeznaczonych na realizację programu nauczania początkowego matematyki w PRL i NRD ilustruje tabela.

klasa	I	II	III	ogółem
PRL	5	5	5	15
NRD	5	6	6	17

Przedstawiona analiza porównawcza celów, treści i metod nauczania początkowego matematyki w PRL i NRD pozwala nauczycielom twórczo interpretować niektóre zagadnienia programowe celem zwiększenia efektywności procesu dydaktycznego.

LITERATURA

Nauczanie początkowe (program), klasy I—III, Warszawa, 1985

Lephrplan Mathematik Klassen 1 bis 3, Berlin, 1987

Grzegorczyk A., 1969, Zarys logiki matematycznej, Warszawa

Lenné W., 1969, Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart

ALBINA SŁOMSKA

COMPARATIVE ANALYSIS OF ELEMENTARY LEVEL MATHEMATICS SYLLABUSES IN POLAND AND IN THE GDR

SUMMARY

The comparison of two different ideas of the Polish and East-German elementary level mathematics syllabuses allows deeper reflection on the syllabus obligatory in the Polish educational system nowadays. Particular attention has been paid to aims, contents and methods of mathematics teaching in forms I—III. Taking into account specific nature of mathematics as a teaching subject, general and specific aims of teaching arithmetics and geometry on elementary level and interdisciplinary qualifications can be distinguished. An attainment of fixed aims is possible when the pupil assimilates definite contents in the process of teaching and learning. A comparative analysis of issues compulsory in teaching mathematics on elementary level displays considerable differences between the Polish and German syllabus's contents in spite of the fact that their aims do not differ significantly. Differences between the contents occur both in the scope of arithmetics and geometry.

In spite of apparent similarities, methodological recommendations resulting from syllabuses in question differ with regard to emphasis put on particular recommendations which implies differences in the course of the syllabus realization and has to be reflected by the results. Showing differences and similarities of both syllabuses helps creative interpretation of some syllabus entries in order to increase the effectiveness of the didactic process.