Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie

Matematyka III, Częstochowa 1995/96

Założeniowe odrzucanie wyrażeń w skończenie - wartościowej logice zdaniowej

Piotr Borowik & Grzegorz Bryll

1. Istota uogólnionej metody dedukcji naturalnej

Metody założeniowe (metody dedukcji naturalnej) pochodzą od St. Jaśkowskiego i G. Gentzena. Systemy bezaksjomatyczne Jaśkowskiego i Gentzena są podobne, bowiem oparte są wyłącznie na regułach inferencji i regułach tworzenia dowodu, różnią się jednak w sposób istotny. System pochodzący od Jaśkowskiego doskonalony był przez Borkowskiego i Słupeckiego [Borkowski, Słupecki 1958], [Słupecki 1955] oraz ich uczniów (zob. np. [Słupecki, Hałkowska, Piróg-Rzepecka 1976]).

W pracy tej opiszemy uogólnioną metodę założeniową (uogólnioną metodę dedukcji naturalnej), która różni się tym od zwykłej metody założeniowej, że oprócz reguł uznawania wyrażeń stosuje się także reguły ich odrzucania. Jedyną regułą dowodzenia jest reguła tworzenia dowodu nie wprost. Przyjmuje się, że zbiór aksjomatów uznanych i zbiór aksjomatów odrzuconych są zbiorami pustymi. Uogólniona metoda założeniowa jest podobna do spotykanej w literaturze metody „tableaux", czy też metody „drzew" (zob. [Carnielli 1987, 1991], [Smullyan 1968], [Surma 1974]), oparta jest jednak na prostszych intuicjach.

Dowody mają postać drzew, których gałęzie tworzy się według zasady koniunkcyjnej (czyli zasady łączenia szeregowego) i zasady alternatywnej (czyli zasady łączenia równoległego).

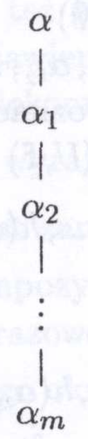
Schematom:

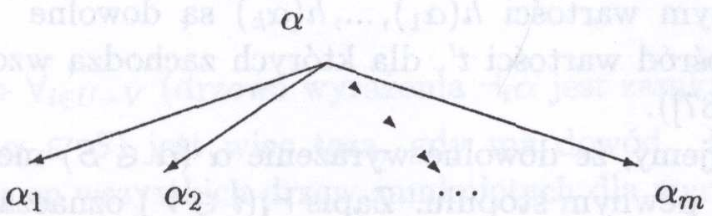
$$\frac{\alpha}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m}, \quad \frac{\alpha}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_m},$$

czyli schematom:

$$\frac{\alpha}{\wedge\{\alpha_i : 1 \leq i \leq m\}}, \quad \frac{\alpha}{\vee\{\alpha_i : 1 \leq i \leq m\}}$$

odpowiadają drzewa postaci:





Wykażemy, że zbiór tautologii dowolnej matrycy skończonej pokrywa się ze zbiorem tez uzyskanych na drodze uogólnionej metody założeniowej, tj. przy użyciu reguł uznawania i reguł odrzucania wyrażeń. Twierdzenie o równości tych zbiorów jest bezpośrednim wnioskiem z ogólniejszego twierdzenia, że konsekwencja matrycowa, w przypadku matryc skończonych, jest identyczna z pewną konsekwencją opartą na układzie reguł uznawania i odrzucania. W rozważaniach odwołujemy się bezpośednio do wyników W.A. Carnielli'ego [Carnielli 1987, Carnielli 1991], J. Hintikki [Hintikka 1955], R.M. Smullyana [Smullyan 1968], W. Suchonia [Suchoń 1977] i S.J. Surmy [Surma 1974], formułujemy je jednak w języku teorii odrzucania wyrażeń.

Dla rachunku zdaniowego opartego na języku $J = (S, \mathbf{F})$ przyjmijmy, że:

$$At = \{p_o, p_1, ...,\}; \quad \mathbf{F} = \{F_1, F_2, ..., F_r\}.$$

Zakładamy, że funktor $F_i\,(i = 1, 2, ..., r)$ jest funktorem k_i - arnym.

Rozważmy następującą algebrę podobną do języka J :

(1) $M = (U, \mathrm{f})$,

gdzie: $card(U) < \aleph_o$, $\mathrm{f} = (f_1, f_2, ..., f_r)$ oraz

$f_i : U^{k_i} \to U \quad (i = 1, 2, ..., r)$.

Wzbogacając algebrę M o zbiór wartości wyróżnionych $V(\emptyset \neq V \subset U)$ otrzymamy matrycę logiczną

(2) $\mathfrak{M} = (U, V, \mathrm{f})$,

przy czym $U - V$ jest zbiorem wartości niewyróżnionych.

Oznaczmy przez $C_{\mathfrak{M}}$ konsekwencję matrycową wyznaczoną przez matrycę (2).

Mamy więc: $E(\mathfrak{M}) = C_{\mathfrak{M}}(\emptyset)$

Z wyrażeniem $F(\alpha_1, ..., \alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_t}, ..., \alpha_k)$ $(F \in \mathbf{F})$ zwiążemy zapis $H_s(j_1, j_2, ..., j_t)$, który będzie oznaczał, że dla pewnego homomorfizmu $h \in Hom$ języka $(S, \mathbf{F})$ w algebrę $(U, \mathbf{f})$ o własności:

(3) $h(\alpha_{i_1}) = j_1,\ h(\alpha_{i_2}) = j_2, ..., h(\alpha_{i_t}) = j_t,$

spełniony jest warunek:

(4) $$\begin{aligned} h(F(\alpha_1, ..., \alpha_k)) &= \\ &= f(h(\alpha_1), ..., h(\alpha_{i_1}), ..., h(\alpha_{i_2}), ..., h(\alpha_{i_t}), ..., h(\alpha_k)) = \\ &= f(h(\alpha_1), ..., j_1, ..., j_2, ..., j_t, ..., h(\alpha_k)) = s, \end{aligned}$$

(przy czym wartości $h(\alpha_1), ..., h(\alpha_k)$ są dowolne i t jest najmniejszą spośród wartości t', dla których zachodzą wzory (3) i (4)) (por. [Carnielli 1987]).

Przyjmujemy, że dowolne wyrażenie α $(\alpha \in S)$ może być uznane lub odrzucone w pewnym stopniu. Zapis $\vdash_i (i \in V)$ oznacza, że wyrażenie jest uznane w stopniu i-tym, zaś zapis $\dashv_j (j \in U - V)$ oznacza, że wyrażenie α jest odrzucone w stopniu j-tym. Dla ogólnej charakteryzacji reguł dekompozycji (rozkładu) wyrażeń będziemy stosować też zapis $*_s\alpha$, który ma następujące znaczenie:

(5) $$*_s\alpha = \begin{cases} \vdash_s\alpha, & \text{gdy } s \in V, \\ \dashv_s\alpha, & \text{gdy } s \in U - V. \end{cases}$$

Wyrażenie $*_s\alpha$ nazywać będziemy wyrażeniem znakowanym. Jeśli ma ono postać

$$*_sF(\alpha_1, ..., \alpha_k) \quad (F \in \mathbf{F}),$$

to przyjmujemy regułę dekompozycji tego wyrażenia o schemacie:

(6)

$$F_{*_s} : \frac{*_sF(\alpha_1, ..., \alpha_k)}{\vee\{*_{j_1}\alpha_{i_1} \wedge ... \wedge *_{j_t}\alpha_{i_t} : j_1, ..., j_t \in U,\ t \le k, H_s(j_1, ..., j_t)\}}.$$

Jeśli funkcja $f \in \mathbf{f}$ (odpowiadająca funktorowi F) nie przyjmuje wartości $i \in U$, to nie istnieje reguła F_{*_i} postaci (6). Tak więc dla każdego funktora F $(F \in \mathbf{F})$ liczba reguł postaci (6) jest równa co najwyżej $card\,(U)$.

Dekompozycja danego wyrażenia znakowanego polega na wielokrotnym stosowaniu reguł postaci (6) w odniesieniu do wszystkich funktorów występujących w tym wyrażeniu. Otrzymujemy w ten sposób drzewo (graf) dekompozycji wyrażenia, zbudowane z gałęzi.

Przyjmujemy następującą umowę:

a. gałąź danego drzewa jest *zamknięta*, gdy występuje w niej sprzeczność, tzn. bądź występują w niej dwa wyrażenia znakowane postaci

$*_i\gamma, *_j\gamma$, przy czym $i \neq j$, bądź też występuje w niej wyrażenie znakowane nieatomowe postaci $*_i\delta$, zawierające funktor główny G $(G \in \mathbf{F})$, dla którego nie istnieje reguła dekompozycji G_{*_i};

b. drzewo dekompozycji danego wyrażenia znakowanego jest *zamknięte,* gdy każda gałąź tego drzewa jest zamknięta.

Jest widoczne, że drzewa dekompozycji dla wyrażeń znakowanych atomowych $*_m p_i$ $(p_i \in At)$ są jednowyrazowe i nie są zamknięte (są otwarte).

Zbiór $\mathbf{T}$ tez rachunku zdaniowego określonego regułami F_*, postaci (6) definiujemy następująco:

Definicja 1.

(7) $\alpha \in \mathbf{T} \Longleftrightarrow \forall_{i \in U-V}$ (drzewo wyrażenia $\dashv_i \alpha$ jest zamknięte)

Wyrażenie α $(\alpha \in S)$ jest więc tezą, gdy ma dowód. Dowód tego wyrażenia składa się ze wszystkich drzew zamkniętych dla wyrażeń znakowanych $*_i\alpha$, gdzie $i \in U - V$. Możemy powiedzieć, że wyrażenie α jest tezą (jest uznane), gdy przypuszczenie, że jest ono odrzucone w stopniu i-tym, prowadzi do sprzeczności, dla dowolnego $i \notin V$.

Niech $X = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...\}$ będzie skończonym lub przeliczalnym zbiorem wyrażeń należących do S. Drzewo dekompozycji dla zbioru

(8) $\{*_{i_1}\alpha_1, *_{i_2}\alpha_2, ..., *_{i_n}\alpha_n, ...\}$

tworzymy następująco (por.[Carnielli 1987]):

a. w pierwszym kroku budujemy drzewo dekompozycji dla wyrażenia $*_{i_1}\alpha_1$;

b. mając krok n-ty, wykonujemy krok $n+1$ w ten sposób, że do każdej gałęzi otwartej (jeśli taka istnieje) dopisujemy drzewo dekompozycji dla wyrażenia $*_{i_{n+1}}\alpha_{n+1}$;

c. proces dekompozycji wyrażeń zbioru (8) zatrzymuje się, gdy nie istnieją gałęzie otwarte.

Za pomocą powyższej procedury można otrzymać drzewo zamknięte lub otwarte dla zbioru wyrażeń znakowanych. Oczywiste jest, że dla danego zbioru $(X \subseteq S)$ można otrzymać różne drzewa dekompozycji w zależności od sposobu znakowania wyrażeń należących do tego zbioru. Jeśli $card(X) = \aleph_o$ i drzewo dla zbioru (8) jest otwarte, to ma ono co najmniej jedną gałąź nieskończoną (zob. [Carnielli 1987]).

Niech $W \subseteq U$, $X \subseteq S$, zaś φ jest dowolną funkcją o własności $\varphi : X \to W$. Zbiór formuł znakowanych $W_\varphi^*(X)$ określamy następująco:

Definicja 2. Dla dowolnego $X \subseteq S$:

(9) $W^*_\varphi(X) = \{*_i\alpha : i = \varphi(\alpha) \in W\}$.

Jeśli $X = \emptyset$, to $W^*_\varphi(X) = \emptyset$.

Na przykład, jeśli

$$U = \{0,1,2,3\},\ W = \{0,2,3\},\ X = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_5\},$$
$$\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_3) = 2,\ \varphi(\alpha_2) = 3,\ \varphi(\alpha_4) = \varphi(\alpha_5) = 0,$$

to

$$W^*_\varphi(X) = \{*_2\alpha_1, *_3\alpha_2, *_2\alpha_3, *_0\alpha_4, *_0\alpha_5\}.$$

Zapis $W^*(X)$ oznacza, że dokonane zostało przekształcenie $\varphi : X \to W$, dla pewnego φ. Przyjmujemy, że drzewo dekompozycji dla zbioru $W^*(\emptyset)$ nie jest zamknięte (jest otwarte).

Konsekwencję generowaną przez reguły postaci (6) definiujemy następująco:

Definicja 3. Dla dowolnego $X \subseteq S$:

(10) $\alpha \in C_*(X) \Longleftrightarrow \forall_{\varphi \in X \to V}$ [jeśli drzewo dla $V^*_\varphi(X)$ jest otwarte, to $\forall_{i \in U-V}$ (drzewo dla $V^*_\varphi(X) \cup \{*_i\alpha\}$ jest zamknięte].

Z powyższej definicji wynikają wnioski:

Wniosek 1.

(11) $C_*(\emptyset) = \{\alpha \in S : \forall_{i \in U-V}$ (drzewo wyrażenia $*_i\alpha$ jest zamknięte) $\}$.

Wniosek 2.

(12) $\mathbf{T} = C_*(\emptyset)$.

Podamy dowody szkicowe dwóch lematów: [1]

Lemat 1. Dla dowolnego $X \subseteq S$:

(13) $\alpha \in C_{\mathfrak{M}}(X) \Longrightarrow \alpha \in C_*(X)$.

Dowód. Załóżmy, że $\alpha \in C_{\mathfrak{M}}(X)$ i załóżmy nie wprost, że $\alpha \notin C_{\mathfrak{M}}(X)$. Stąd i z definicji 3 wynika, że dla pewnej funkcji $\varphi_1 : X \to V$ i pewnego $i_o \in U - V$ zbiory $V^*_{\varphi_1}(X)$, $V^*_{\varphi_1}(X) \cup \{*_{i_o}\alpha\}$ mają otwarte drzewa dekompozycji. Ponieważ każdy skończony podzbiór zbioru mającego drzewo otwarte ma również drzewo otwarte, zatem zbiór $\{*_{i_o}\alpha\}$ ma drzewo otwarte. Istnieje więc taki homomorfizm $h_1 : S \to U$, że $h_1(\alpha) = i_o \notin V$ i $h_1(X) \subseteq V$. Z założenia i definicji konsekwencji matrycowej wynika jednak, że

$$\forall_{h \in Hom}\ [h(X) \subseteq V \Longrightarrow h(\alpha) \in V],$$

co prowadzi do sprzeczności.

[1]Szczegółowe dowody, odwołujące się do własności zbiorów Hintikki, znaleźć można w pracy [Carnielli 1987].

Lemat 2 Dla dowolnego $X \subseteq S$:

(14) $\alpha \in C_*(X) \Longrightarrow \alpha \in C_{\mathfrak{M}}(X)$.

Dowód. Niech $\alpha \in C_*(X)$ i załóżmy nie wprost, że $\alpha \notin C_{\mathfrak{M}}(X)$. Dla pewnego homomorfizmu $h_1 \in Hom$ spełniony jest warunek:

$$h_1(X) \subseteq V \quad \text{i} \quad h_1(\alpha) \in U - V.$$

Wobec założenia i definicji 3 mamy jednak: $\forall_{\varphi: X \to V}$ [jeśli drzewo dla $V^*_\varphi(X)$ jest otwarte, to
$\forall_{i \in U-V}$ (drzewo dla $V^*_\varphi(X) \cup \{*_i\alpha\}$ jest zamknięte)].

Rozważając ograniczenie homomorfizmu h_1 do zbioru X stwierdzamy, że zbiór $V^*_{h_1}(X)$ ma drzewo otwarte. Zatem drzewo dekompozycji dla zbioru $V^*_{h_1}(X) \cup \{*_i\alpha\}$ jest zamknięte, dla dowolnego $i \in U - V$. Tym samym $h_1(\alpha) \in V$, co jest sprzeczne z wcześniej otrzymanym wnioskiem, że $h_1(\alpha) \in U - V$.

Na podstawie powyższych lematów otrzymujemy:

Twierdzenie 1.

(15) $C_{\mathfrak{M}} = C_*$.

Tak więc konsekwencja matrycowa i konsekwencja określona za pomocą definicji 3 są identyczne. Twierdzenie 1 ma ważne znaczenie praktyczne. Uogólniona metoda dedukcji naturalnej jest na ogół metodą prostszą od metody matrycowej przy badaniu wyrażeń danego rachunku zdań.

W szczególności, z twierdzenia 1 i wniosku 2 wynika,

Wniosek 3.

(16) $\mathbf{T} = E(\mathfrak{M})$.

Zauważmy, że uogólniona metoda dedukcji naturalnej nadaje się m. in. do badania matryc, które nie są aksjomatyzowalne w zwykłym sensie.

2. Przykłady rachunków zdaniowych sformalizowanych uogólnioną metodą dedukcji naturalnej

A. Trójwartościowy implikacyjno-negacyjny rachunek zdań Łukasiewicza.

Dla trójwartościowego implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań Łukasiewicza o matrycy adekwatnej

(17) $\mathfrak{M}_3 = (\{0,1,2\}, \{2\}, \{c, \neg\})$
gdzie $c(x,y) = min(2, 2 - x + y)$, $\neg(x) = 2 - x$, $x, y \in \{0,1,2\}$)

reguły rozkładu wyrażeń znakowanych mają postać [2]:

negacja N : $\dfrac{\vdash N\alpha}{\dashv_o \alpha}$, $\dfrac{\dashv_o N\alpha}{\vdash \alpha}$, $\dfrac{\dashv_1 N\alpha}{\dashv_1 \alpha}$,

[2]Stosujemy tutaj dwa symbole odrzucania $\dashv_0$, $\dashv_1$ (odrzucanie w stopniach zerowym i pierwszym) oraz symbol uznawania $\vdash$.

implikacja C : $\dfrac{\vdash C\alpha\beta}{\begin{array}{ccc}\dashv_o \alpha & \vdash \beta & \dashv_1 \alpha \\ & & \dashv_1 \beta\end{array}}$, $\dfrac{\dashv_o C\alpha\beta}{\begin{array}{c}\vdash \alpha \\ \dashv_o \beta\end{array}}$, $\dfrac{\dashv_1 C\alpha\beta}{\begin{array}{cc}\dashv_1 \alpha & \vdash \alpha \\ \dashv_o \beta & \dashv_1 \beta\end{array}}$.

Niech

$\mathbf{T}_3 = \{\alpha \in S :$ drzewa wyrażeń $\dashv_o \alpha, \dashv_1 \alpha$ są zamknięte $\}$.

Zachodzi oczywiście

Twierdzenie 2. $E(\mathfrak{M}_3) = \mathbf{T}_3$.

B. Rachunek trójwartościowy „nonsense-logic”.

Rozważmy rachunek trójwartościowy określony za pomocą matrycy:

$\mathfrak{M}_{HZ} = (\{0,1,2\}, \{1,2\}, \{\vee, \wedge, \neg\})$,

gdzie:

$$x \vee y = \begin{cases} max(x,y), & gdy \quad x, y \in \{0,1\}, \\ y, & gdy \quad x = 2, \\ x, & gdy \quad x \neq 2 \ \ i \ \ y = 2, \end{cases}$$

$$x \wedge y = \begin{cases} min(x,y), & gdy \quad x, y \in \{0,1\}, \\ 2, & gdy \quad x = 2 \ \ lub \ \ y = 2, \end{cases}$$

$$\neg x = \begin{cases} 1 - x, & gdy \quad x \in \{0,1\}, \\ 2, & gdy \quad x = 2. \end{cases}$$

Stosując symbole uznawania $\vdash_1$, $\vdash_2$ i symbol odrzucania $\dashv$ możemy przyjąć następujące reguły dekompozycji wyrażeń znakowanych dla tego rachunku:

alternatywa A : $\dfrac{\vdash_1 A\alpha\beta}{\vdash_1 \alpha \ \ \vdash_1 \beta}$, $\dfrac{\vdash_2 A\alpha\beta}{\begin{array}{c}\vdash_2 \alpha \\ \vdash_2 \beta\end{array}}$, $\dfrac{\dashv A\alpha\beta}{\begin{array}{ccc}\dashv \alpha & \dashv \alpha & \vdash_2 \alpha \\ \dashv \beta & \vdash_2 \beta & \dashv \beta\end{array}}$,

koniunkcja K : $\dfrac{\vdash_1 K\alpha\beta}{\begin{array}{c}\vdash_1 \alpha \\ \vdash_1 \beta\end{array}}$, $\dfrac{\vdash_2 K\alpha\beta}{\vdash_2 \alpha \ \ \vdash_2 \beta}$, $\dfrac{\dashv K\alpha\beta}{\begin{array}{ccc}\dashv \alpha & \dashv \alpha & \vdash_1 \alpha \\ \dashv \beta & \vdash_1 \beta & \dashv \beta\end{array}}$

negacja - N : $\dfrac{\vdash_1 N\alpha}{\dashv \alpha}$, $\dfrac{\vdash_2 N\alpha}{\vdash_2 \alpha}$, $\dfrac{\dashv N\alpha}{\vdash_1 \alpha}$.

Jeśli do języka wprowadzimy funktor implikacji C, któremu w matrycy $\mathfrak{M}_{HZ}$ odpowiada funkcja $\rightarrow$ określona wzorem $x \rightarrow y = \neg(\neg x \vee \neg y) \vee \neg x$, to reguły dotyczące funktora C są następujące:

$$\frac{\vdash_1 C\alpha\beta}{\begin{array}{ccc}\dashv \alpha & \vdash_1 \beta & \vdash_1 \alpha \\ & & \vdash_2 \beta\end{array}}, \quad \frac{\vdash_2 C\alpha\beta}{\begin{array}{c}\vdash_2 \alpha \\ \vdash_2 \beta\end{array}}, \quad \frac{\dashv C\alpha\beta}{\begin{array}{cc}\dashv_1 \alpha & \vdash_2 \alpha \\ \dashv \beta & \dashv \beta\end{array}}.$$

Wyrażenie α jest tezą rozważanego systemu ($\alpha \in \mathbf{T}_{HZ}$) wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo rozkładu wyrażenia $\dashv \alpha$ jest zamknięte, tzn. w każdej gałęzi znajduje się co najmniej jedna z par postaci:

$$\begin{cases}\vdash_1 \gamma\\ \dashv \gamma,\end{cases} \qquad \begin{cases}\vdash_2 \gamma\\ \dashv \gamma,\end{cases} \qquad \begin{cases}\dashv_1 \gamma\\ \vdash_2 \gamma.\end{cases}$$

Dla rozważanego systemu rachunku zdań zachodzi oczywiście

Twierdzenie 3. $E(\mathfrak{M}_{HZ}) = \mathbf{T}_{HZ}$.

C. Czterowartościowy rachunek modalny Łukasiewicza.

Matryca rachunku modalnego ma postać

$\mathfrak{M}_4 = (\{1,2,3,4\},\{1\},\{c,\neg,d\})$,

gdzie:

c	1	2	3	4	$\neg$	d
1	1	2	3	4	4	1
2	1	1	3	3	3	1
3	1	2	1	2	2	3
4	1	1	1	1	1	3

Funkcja d nie przyjmuje wartości 2 i 4.

Posługując się symbolami odrzucania $\dashv_2, \dashv_3, \dashv_4$ oraz symbolem uznawania $\vdash$ możemy reguły dekompozycji wyrażeń w rachunku modalnym przedstawić w postaci:

$$\text{implikacja } C: \frac{\vdash C\alpha\beta}{\begin{array}{cccc}\vdash \beta & \dashv_4 \alpha & \dashv_2 \alpha & \dashv_3 \alpha\\ & & \dashv_2 \beta & \dashv_3 \beta\end{array}}, \qquad \frac{\dashv_2 C\alpha\beta}{\begin{array}{ccc}\vdash \alpha & \dashv_3 \alpha & \dashv_3 \alpha\\ \dashv_2 \beta & \dashv_2 \beta & \dashv_4 \beta\end{array}},$$

$$\frac{\dashv_3 C\alpha\beta}{\begin{array}{ccc}\vdash \alpha & \dashv_2 \alpha & \dashv_2 \alpha\\ \dashv_3 \beta & \dashv_3 \beta & \dashv_4 \beta\end{array}}, \qquad \frac{\dashv_4 C\alpha\beta}{\begin{array}{c}\vdash \alpha\\ \dashv_4 \beta\end{array}},$$

$$\text{negacja } N: \frac{\vdash N\alpha}{\dashv_4 \alpha}, \quad \frac{\dashv_2 N\alpha}{\dashv_3 \alpha}, \quad \frac{\dashv_3 N\alpha}{\dashv_2 \alpha}, \quad \frac{\dashv_4 N\alpha}{\vdash \alpha},$$

$$\text{możliwość } \Delta: \frac{\vdash \Delta\alpha}{\vdash \alpha \quad \dashv_2 \alpha}, \quad \frac{\dashv_3 \Delta\alpha}{\dashv_3 \alpha \quad \dashv_4 \alpha}.$$

Niech $\mathbf{T}_4 = \{\alpha \in S :$ drzewa wyrażeń $\dashv_2 \alpha, \dashv_3 \alpha, \dashv_4 \alpha$ są zamknięte $\}$.

Dla rozważanego rachunku zachodzi:

Twierdzenie 4. $E(\mathfrak{M}_4) = \mathbf{T}_4$.

(D) *Pełny n - wartościowy rachunek zdań Słupeckiego.*

W pracy [Słupecki 1938] J. Słupecki wprowadził klasę n - wartościowych logik zdaniowych określonych za pomocą matrycy:

$$\mathfrak{M}_n Sl = (E_n, E_r^*, \sim, \neg, \Rightarrow),$$

gdzie $E_n = \{0,1,2,\ldots,n-1\}$, $E_r^* = \{r, r+1, \ldots, n-1\}$, $0 < r \le n-1$.

Funkcje $\sim, \neg, \Rightarrow$ (nazywane odpowiednio: negacją, tercjum i implikacją) określone są w następujący sposób:

$$\sim x = \begin{cases} n-1, & \text{jeśli} \quad x = 0, \\ x-1, & \text{jeśli} \quad x \neq 0, \end{cases}$$

$$\neg x = \begin{cases} x, & \text{jeśli} \quad 0 \leq x \leq n-3, \\ n-1, & \text{jeśli} \quad x = n-2, \\ n-2, & \text{jeśli} \quad x = n-1, \end{cases}$$

$$x \Rightarrow y = \begin{cases} n-1, & \text{jeśli} \quad 0 \leq x < r, \\ y, & \text{jeśli} \quad r \leq x \leq n-1. \end{cases}$$

Reguły eliminacji spójników dla wyrażeń znakowanych mają następującą postać:

$(\sim_i)$ $\dfrac{*_i \sim \alpha}{*_{i+1}\alpha}$, $\quad 0 \leq i < n-1$;

$(\sim_{n-1})$ $\dfrac{\vdash_{n-1} \sim \alpha}{\dashv_0 \alpha}$,

$(\neg_i)$ $\dfrac{*_i \neg\alpha}{*_i\alpha}$, $\quad 0 \leq i < n-2$;

$(\neg_{n-2})$ $\dfrac{*_{n-2} \neg\alpha}{\vdash_{n-1} \alpha}$,

$(\neg_{n-1})$ $\dfrac{\vdash_{n-1} \neg\alpha}{*_{n-2}\alpha}$,

$$(\Rightarrow_j) \quad \frac{*_j(\alpha \Longrightarrow \beta)}{\begin{array}{ccccc} \vdash_r \alpha & \vdash_{r+1} \alpha & \ldots & \vdash_{n-2} \alpha & \vdash_{n-1} \alpha \\ *_j\beta & *_j\beta & \ldots & *_j\beta & *_j\beta \end{array}} \quad 0 \leq j < n-1$$

$$(\Rightarrow_{n-1}) \quad \frac{\vdash_{n-1}(\alpha \Longrightarrow \beta)}{[\vee\{\dashv_k \alpha : 0 \leq k \leq r-1\}] \wedge [\vee\{*_l \beta : 0 \leq l \leq n-2\}] \vdash_{n-1} \beta \wedge [\vee\{*_j \alpha : 0 \leq j \leq n-1\}]}.$$

Wyrażenie α jest tezą n - wartościowego rachunku zdań Słupeckiego ($\alpha \in \mathbf{T}_{nSl}$) wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie drzewa dowodowe wyrażeń $\dashv_j \alpha$ dla $0 \leq j < r$, są zamknięte, tj. wszystkie gałęzie tych drzew są zamknięte. W rozważanym systemie gałąź **G** drzewa jest zamknięta, jeśli istnieje wyrażenie γ i istnieją $j, k \in E_n$ takie, że $j \neq k$ i $*_j\gamma, *_j\gamma$ należą do **G**. Dowodzi się też że

Twierdzenie 5. $E(\mathfrak{M}_{nSl}) = \mathbf{T}_{nSl}$.

(E) *Rachunek zdaniowy Sobocińskiego.*

Rachunek Sobocińskiego może być określony za pomocą matrycy:

$$\mathfrak{M}_n = (E_n, E_n^*, \Rightarrow, \sim),$$

gdzie $E_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ i $E_n^* = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. E_n^* jest zbiorem wartości wyróżnionych.

Funkcje negacji $\sim$ i implikacji $\Rightarrow$ są określone w następujący sposób:

$$\sim x = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad x = n-1, \\ x+1, & \text{jeśli} \quad x < n-1, \end{cases}$$

$$x \Rightarrow y = \begin{cases} n-1, & \text{jeśli} \quad x = y, \\ y, & \text{jeśli} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Reguły eliminacji spójników mają następującą postać:

$$(\sim_0) \quad \frac{\dashv \sim \alpha}{\vdash_{n-1} \alpha},$$

$$(\sim_i) \quad \frac{\vdash_i \sim \alpha}{\vdash_{i-1} \alpha}, \quad \text{gdzie } 1 \leq i \leq n-1,$$

$$(\Rightarrow_0) \quad \frac{\dashv \alpha \Rightarrow \beta}{\begin{array}{c} \vdash_1 \alpha \vdash_2 \alpha \ldots \vdash_{n-1} \alpha \\ \dashv \beta \ \dashv \beta \ \ldots \ \dashv \beta \end{array}},$$

$$(\Rightarrow_i) \quad \frac{\vdash_i \alpha \Rightarrow \beta}{\begin{array}{c} \dashv \alpha \vdash_1 \alpha \ldots \vdash_{i-1} \alpha \vdash_{i+1} \alpha \ldots \vdash_{n-1} \alpha \\ \vdash_i \beta \vdash_i \beta \ldots \ \vdash_i \beta \ \vdash_i \beta \ \ldots \vdash_i \beta \end{array}},$$

gdzie $1 \leq i < n-1$

$$(\Rightarrow_{n-1}) \quad \frac{\vdash_{n-1} \alpha \Rightarrow \beta}{\begin{array}{c} \dashv \alpha, \vdash_1 \alpha, \vdash_2 \alpha, \ldots, \vdash_{n-1} \alpha \\ \dashv \beta \vdash_1 \ \beta \vdash_2 \ \ \vdash_{n-1} \beta \end{array}},$$

Pojęcie drzewa zamkniętego i zbioru tez $\mathbf{T}_n$ rachunku zdaniowego Sobocińskiego określa się podobnie jak w punkcie (D). Zachodzi więc twierdzenie

Twierdzenie 5. $E(\mathfrak{M}_n) = \mathbf{T}_n$.

Bibliografia

[1] Beth, E. W., (1952): Semantic entailment and formal derivability. Mededel Kon. Ned. Akad. Wetensch. Afd. Letterkunde N. S. 19, 309 - 342.

[2] Beth, E. W., (1959): The fundations of mathematics. Amsterdam.

[3] Borkowski, L., Słupecki, J., (1958): A logical system based on rules and its application in teaching mathematical logic. *Studia Logica*, 7, 71 - 113.

[4] Borowik, P., Bryll, G., (1995): O skończonej (nie)aksjomatyzowalności pewnych matryc skończonych. Filozofia / Logika : Filozofia Logiczna 1994, red. J. Perzanowski i in., UMK, Toruń, 281 - 287.

[5] Carnielli, W. A., (1987): Systematization of finite many-valued logics through the method of tableaux. *Journal of Symbolic Logic,* vol. 52, no. 2, 473 - 493.

[6] Carnielli, W. A., (1991): On sequents and tableaux for many-valued logics. *Journal of Non - Classical Logic,* vol. 8, no. 1, 59 - 76.

[7] Hintikka, J., (1955): Form and content in quantyfication theory. Acta Phil. Fen., 8, 7 - 55.

[8] Słupecki, J., (1955): Sur une méthode de noter les démonstrations en symboles logiques. Colloquium Mathematicum, III. 2, 210.

[9] Słupecki, J., Hałkowska, K., Piróg - Rzepecka, K., (1976): Logika matematyczna. OTPN - PWN, Warszawa - Wrocław.

[10] Smullyan, R. M., (1968): First order logic. Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New - York.

[11] Sobociński, B., (1936): Aksjomatyzacja pewnych wielowartościowych systemów teorii dedukcji. Roczniki Prac Naukowych Zrzeszenia Asystentów Uniwersytetu Józefa Piłsudskiego w Warszawie, I.

[12] Suchoń, W., (1977): Smullyan's method of constructing Łukasiewicz's m-valued implicational-negational sentential calculus. in: WÓJCICKI R., MALINOWSKI G. eds. Selected papers on Łukasiewicz sentential calculi. Ossolineum, Wrocław - Warszawa, 119 - 124.

[13] Surma, S. J., (1974): A method of the construction of finite Łukasiewiczian Algebras and ist application to a Gentzen - style charakterisation of finite logics. RML 2, 49 - 54.

[14] Surma, S. J., (1974): An algorithm of axiomatizing every finite logic. RML 3, 57 - 62.