Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie

Matematyka III, Częstochowa 1995/96

Wielosekwentowy rachunek predykatów pierwszego rzędu

Piotr Borowik

Streszczenie

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie pewnej klasy uogólnionych kwantyfikatorów w n-wartościowym rachunku predykatów pierwszego rzędu. Do formalizacji wyżej wymienionego rachunku logicznego stosowana jest metoda n-sekwentów, zwanych też czasem metodą wielosekwentów, por. [Borowik 1984].

1. Uwagi wstępne

Zwykle w n-wartościowych rachunkach logicznych, podobnie jak w logice klasycznej sekwent definiuje się jako uporządkowaną parę skończonych zbiorów formuł. Możliwe jest jednak określenie sekwentu jako uporządkowanej n-tki takich zbiorów, nie wyłaczając logiki dwuwartościowej. W tym przypadku, (tzn gdy n = 2) sekwent będąc parą uporządkowaną zbiorów formuł, ma inną interpretację niż w znanej formalizacji Gentzena. Tak rozumiane pojęcie sekwentu pozwala na automatyczne dowodzenie twierdzeń w teoriach pierwszego rzędu nadbudowanych nad daną logiką wielowartościową.

Dowód jest drzewem, którego liśćmi są sekwenty przepełnione, korzeniem zaś sekwent postaci $\vdash_j \alpha$. Poszczególne węzły drzewa uzyskujemy w oparciu o reguły wprowadzania spójników i kwantyfikatorów.

Dla tak określonego rachunku logicznego zachodzą twierdzenia o istnieniu modelu, o pełności, zwartości i twierdzenie Löwenheima-Skolema.

2. Składnia rachunku predykatów pierwszego rzędu

Alfabet przedstawionego poniżej rachunku predykatów pierwszego rzędu, który nazywać będziemy po prostu rachunkiem logicznym, składa się z:

(a) nieskończonego zbioru zmiennych indywiduowych $\mathbf{V} = \{x_i : i \in N\}$, gdzie N jest zbiórem liczb naturalnych,

(b) zbioru symboli reprezentujących stałe indywiduowe, zwanych też krótko stałymi $\mathbf{C} = \{c_k : k \in K\}$,

(c) zbioru predykatów $\mathbf{P} = \{P_i : i \in I\}$,

(d) zbioru symboli funkcyjnych $\mathbf{F} = \{f_j : j \in J\}$,

(e) zbioru spójników logicznych $\mathbf{A} = \{\sigma_k : k \in L\}$,

(f) zbioru kwantyfikatorów $\mathbf{Q} = \{Q_w : w \in W\}$,

(g) zbioru symboli pomocniczych $\mathbf{H} = \{(,),,\}$.

Przyjmujemy, że zbiory $\mathbf{P}$, $\mathbf{A}$, i $\mathbf{Q}$ są niepuste. Z sumą zbiorów $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$ i $\mathbf{A}$ związana jest funkcja $\arg : \mathbf{P} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{N}$ ustalająca liczbę argumentów predykatów, symboli funkcyjnych i spójników.

Przyjmujemy też że $\arg(P_i) > 0$ dla pewnych $P_i \in \mathbf{P}$. Jeżeli $\arg(P_i) = 0$ dla $P_i \in \mathbf{P}$, to predykat P_i będziemy nazywać stałą zdaniową. Jeżeli $\arg(f_j) = 0$ dla $f_j \in \mathbf{F}$ to f_j będziemy nazywać symbolem reprezentującym stałą indywiduową. Zakładamy, że $\arg(\sigma_j) > 0$ dla wszystkich $\sigma_j in \mathbf{A}$.

Zbiór termów i zbiór formuł określany jest w sposób standardowy. I tak:
Zbiorem termów $\mathbf{T}$ nazywamy najmniejszy ze zbiorów X spełniający następujące warunki

(a) $\mathbf{V} \subseteq X$,

(b) $\mathbf{C} \subseteq X$,

(c) jeżeli $t_1, t_2, \ldots, t_m \in X$, $f_j \in \mathbf{F}$ i $\arg(f_j) = m$ to $f_j(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in X$

Zbiór formuł poprawnie zbudowanych S definiujemy jako najmniejszy zbiór Z, który spełnia następujące warunki:

(a) dla każdego $P_i \in \mathbf{P}$, jeżeli $\arg(P_i) = k$ i $t_1, t_2, \ldots, t_k \in T$, to $P_i(t_1, t_2, \ldots t_k) \in Z$;

(b) dla dowolnego $\sigma_j \in \mathbf{A}$ jeśli $\arg(\sigma_j) = m$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in Z$; to $\sigma_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{Z}$

(c) dla dowolnego $Q_u \in \mathbf{Q}$ i dowolnego $x_i \in \mathbf{V}$, jeśli $\alpha \in Z$, to $Q_u x_i \alpha \in Z$.

Formuły postaci $P_i(t_1, \ldots, t_m)$ dla $P_i \in \mathbf{P}$, nazywamy *formułami atomowymi* .

Połóżmy
$S_0 = \{\alpha : \alpha \text{ jest formułą atomową}\}$

$$S_{k+1} = S_k \cup \{\sigma_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) : \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S_k, \sigma_i \in \mathbf{A}\} \cup$$
$$\cup \{Q_w x_i \alpha : \alpha \in S_k, Q_w \in \mathbf{Q}, x_i \in \mathbf{V}\}$$

Wtedy
$$S = \bigcup_{m \in N} S_m$$

Mówimy, że formuła α ma poziom r wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in S_r - S_{r-1}$.

3. Semantyka n-wartościowego rachunku predykatów

W rachunku zdań wartości formuł są zdeterminowane przez wartości ich podformuł. Formuły kwantyfikatorowe mogą mieć jednak nieskończenie wiele podformuł; związki między prawdziwością formuł kwantyfikatorowych i wartościami ich podformuł ustala się za pomocą pewnej dodatkowej funkcji zwanej czasem *funkcją dystrybucji.* Niech $n > 0$ i $m > 0$, niech $E_n = \{0, \ldots, n-1\}$, $s_j : E^m)_n \longrightarrow E_n$, dla $j \in L$, $q_w : \mathcal{P}(E_n) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow E_n$ dla $w \in W$, gdzie $\mathcal{P}(E_n)$ oznacza zbiór potęgowy zbioru E_n, a W jest tym samym zbiorem, który występuje w punkcie 2(f). Niech $\mathbf{D}_n = \mathcal{P}(E_n) - \{\emptyset\}$. Łatwo zauważyć istnienie naturalnej wzajemnej jednoznaczności zbioru $\mathbf{D}_n$ ze zbiorem $\{0,1\}^n - \{(0,0,\ldots,0)\}$.
Zbiór ten niekiedy utożsamiać będziemy ze zbiorem $G_n = \{0,1\}^n - \{(0,0,\ldots,0)\}$.

Czwórkę

$$\mathcal{E} = (E_n, E_n^*, \{s_j : j \in J\}, \{q_w : w \in W\})$$

gdzie $E_n^* \subseteq E_n$, $E_n^* \neq E_n$, nazywać będziemy *strukturą* dla języka S. Przyjmujemy dodatkowo, że $E_r^* = \{r, r+1, \ldots n-1\}$ i $r > 0$. Niech teraz U będzie dowolnym niepustym zbiorem i niech $\mathfrak{R}$ oznacza następujący układ:

$$\mathfrak{R} = (U, \{p_i : i \in I\}, \{g_j : j \in J\}, \{a_k : k \in K\}, \mathcal{E}),$$

gdzie p_i oraz g_j są funkcjami takimi, że

$$p_i : U^{\arg(p_i)} \longrightarrow E \text{ dla } i \in I,$$

$$g_j : U^{\arg(g_j)} \longrightarrow U \text{ dla } j \in J \text{ oraz}$$

$$a_k \in U, \text{ dla } k \in K,$$

to jest a_k są pewnymi wyróżnionymi elementami ze zbioru U. (W powyższych wzorach $\arg(p_i)$ oznacza liczbę argumentów funkcji p_i, podobnie $\arg(g_j)$).

Interpretacją języka S w strukturze $\mathfrak{R}$ nazywamy funkcję $i : S \longrightarrow \mathfrak{R}$ spełniającą następujące warunki:

(a) $i(x_j) \in U$ dla $j \in N$,

(b) $i(c_k) = a_k$ dla $k \in K$,

(c) $i(P_s) = p_s$ dla $s \in I$,

(d) $i(f_j) = g_j$ dla $j \in J$,

(e) $i(\sigma_j) = s_j$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$,

(f) $i(Q_w) = q_w$ dla $w \in W$.

Niech $b \in U^N$ będzie ciągiem nieskończonym o wyrazach ze zbioru U. Wartość $w(t, b)$ termu t dla ciągu $b = (b_1, b_2, \ldots)$ określamy w następujący sposób:

(a) $w(x_i, b) = b_i$ dla $i \in N$,

(b) $w(c_k, b) = a_k$ dla $k \in K$,

(c) $w(f_j(t_1, \ldots, t_m), b) = g_j(w(t_1, b), \ldots, w(t_m, b))$, gdzie $m = \arg(f_j)$, $j \in J$.

Wartość $v(\alpha, b)$ formuły α dla ciągu b określamy indukcyjnie w następujący sposób:

(a) $v(P_k(t_1, \ldots, t_m), b) = p_k(w(t_1, b), \ldots w(t_m, b))$,

(b) $v(Q_w x_k \alpha(x_k), b) = q_w(d_v(\alpha(x_k)))$ gdzie $d_v : S \longrightarrow \mathcal{P}(E_n) \setminus \{\emptyset\}$ określone jest równością $d_v(\alpha) = \{j \in E : \exists b \in U^N (v(\alpha, b) = j)\}$, tj. diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S} \arrow[rr, "d"] \arrow[drr, "v"'] & & \mathcal{P}(E_n) \setminus \{\emptyset\} \arrow[d, "q_w"] \\
& & E_n
\end{tikzcd}$$

jest przemienny,

(c) $v(\sigma_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), b) = s_j(v(\alpha_1, b), \ldots v(\alpha_k, b))$.

Z definicji funkcji v mamy

(a) $d_v(\alpha(x_k)) = \{i \in E_n : \exists_{b \in U^N}(v(\alpha(x_k), b) = i\}$,

(b) $v(Q_u x_k \alpha(x_k)) = \rho_u(d_v(\alpha(x_k)))$.

Można też przyjąć, że

$$d_v(\alpha(x_k)) = (d(0), \ldots, d(n-1)), \quad \text{gdzie}$$

$$d(j) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \exists_{b \in U^N}(v(\alpha(x_k), b) = j) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Kwantyfikator Q nazywać będziemy *uniwersalnym* (lub ogólnym bądź dużym), gdy

$$\rho((j_0, j_1, \ldots, j_{n-1})) \geq r \Leftrightarrow \forall_{i<r} j_i = 0,$$

oraz Q nazywać będziemy kwantyfikatorem *egzystencjalnym* (szczegółowym, małym), gdy

$$\rho((j_0, j_1, \ldots, j_{n-1})) \geq r \Leftrightarrow \exists_{i \geq r} j_i = 1.$$

Łatwo zauważyć, że wartość $w(t, b)$ termu t dla ciągu b, jak również wartość $v(\alpha, b)$ formuły α są jednoznacznie określone przez interpretację i.

Lemat 1

Jeśli zmienne występujące w termie t należą do zbioru $\{x_0, x_1, \ldots x_k\}$, a ciągi b i b' nie różnią się na k pierwszych miejscach to $w(t, b) = w(t, b')$.

Dowód. Prowadzimy indukcję ze względu na złożoność termu t.

(a) $w(x_i, b) = b_i = w(x_i, b')$,

(b) $w(c_k, b) = a_k = w(c_k, b')$.

(c) Zakładamy że

$$w(t_1, b) = w(t_1, b'),$$
$$w(t_2, b) = w(t_2, b'),$$
$$w(t_m, b) = w(t_m, b'),$$

Stąd

$$w(f_j(t_1, t_2, \ldots t_m), b) = g_j(w(t_1, b), w(t_2, b), \ldots, w(t_m, b)) =$$
$$= g_j(w(t_1, b'), w(t_2, b'), \ldots, w(t_m, b')) = w(f_j(t_1, t_2, \ldots, t_m), b')$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego. ■

Dla formuł zachodzi analogiczy lemat:

Lemat 2
Jeżeli wszystkie zmienne występujące w formule α należą do zbioru
$$\{x_0, x_1, \ldots, x_s\},$$
a ciągi b i b' nie różnią się na s pierwszych miejscach to
$$v(\alpha, b) = v(\alpha, b')$$
Dowód. Indukcyjny ze względu na złożoność formuły α

(a) Jeżeli $\alpha = P_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ to na podstawie Lematu 1
$$v(P_i(t_1, t_2, \ldots, t_m), b) = p_i(w(t_1, b), w(t_2, b), \ldots, w(t_m, b)) =$$
$$= p_i(w(t_1, b'), w(t_2, b'), \ldots, w(t_m, b')) =$$
$$= v(P_i(t_1, t_2, \ldots, t_m), b') \text{ dla } i \in I.$$

(b) Zakładamy, że
$$v(\alpha_1, b) = v(\alpha_1, b')$$
$$v(\alpha_2, b) = v(\alpha_2, b')$$
$$v(\alpha_k, b) = v(\alpha_k, b')$$
$$v(\alpha(x_i), b) = v(\alpha(x_i), b')$$
Wtedy
$$v\sigma_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), b) = s_j(v(\alpha_1, b), v(\alpha_2, b), \ldots, v(\alpha_k, b)) =$$
$$= s_j(v(\alpha_1, b'), v(\alpha_2, b'), \ldots, v(\alpha_k, b')) = v(\sigma_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), b')$$
dla $j \in J$.

I podobnie
$$v(Q_w x_i \alpha(x_i), b) = q_w(d_b(\alpha(x_i))) = q_w(d_b, (\alpha(x_i))) = v(Q_w x_i \alpha(x_i), b')$$
co kończy dowód kroku indukcyjnego. ■

Powyższy lemat można wzmocnić, ograniczając się w założeniu do zmiennych wolnych występujących w formule α. W dowodzie modyfikacji ulegnie jedynie warunek (c).

Formuła $\alpha \in S$ jest *prawdziwa w interpretacji i* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $b \in U^N$ $v(\alpha, b) \in E_n^*$. Formuła $\alpha \in S$ jest *tautologią* struktury $\mathfrak{R}$ wtedy i tylko wtedy gdy jest ona prawdziwa w każdej interpretacji języka w $\mathfrak{R}$.

4. Wielosekwentowy rachunek predykatów

Niech $\Gamma_0, \ldots \Gamma_{n-1}$ będą dowolnymi skończonymi zbiorami formuł. W szczególności niektóre ze zbiorów Γ_i mogą być puste. Uporządkowaną n-tkę zbiorów formuł $(\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1})$ nazywamy *n-sekwentem.* Ten n-sekwent, złożony ze zbiorów formuł $\Gamma_0, \ldots \Gamma_{n-1}$, będziemy notować $\Gamma_0 \vdash \ldots \vdash \Gamma_{n-1}$. Jeżeli α jest formułą i $\Gamma \subseteq S$ to zapis Γ, α oznaczać będzie sumę zbiorów $\Gamma \cup \{\alpha\}$. Sekwenty będziemy oznaczać literą Σ, również z indeksami, jeśli zajdzie taka konieczność. W dalszym ciągu tej pracy, jeśli to nie będzie prowadzić do nieporozumień, n-sekwenty będziemy nazywać po prostu sekwentami.

Niech

$$\Sigma = \Gamma_0 \vdash \cdots \vdash \Gamma_{n-1}$$

i

$$\Pi = \Delta_0 \vdash \cdots \vdash \Delta_{n-1}$$

będą dwoma dowolnymi sekwentami. Sekwent Σ *zawiera się* w sekwencie Π wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego i, $0 \leq i \leq n-1$ $\Gamma_i \subseteq \Delta_i$. Fakt ten będziemy notować $\Sigma \subseteq \Pi$. Zapis $\Sigma * \Pi$ lub $\Sigma\Pi$ będziemy nazywać *złożeniem* sekwentów Σ oraz Π i oznacza on sekwent

$$\Lambda_0 \vdash \cdots \vdash \Lambda_{n-1}$$

gdzie

$$\Lambda_i = \Gamma_i \cup \Delta_i \quad \text{dla} \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Niech $\Gamma \subseteq S$ będzie dowolnym zbiorem formuł. Przez zapis $\Gamma \vdash_j$ będziemy rozumieć sekwent

$$\Sigma = \Gamma_0 \vdash \cdots \vdash \Gamma_{n-1} \quad \text{taki, że}$$

$$\Gamma_i = \begin{cases} \Gamma & \text{jeśli} \quad i = j \\ \emptyset & \text{jeśli} \quad i \neq j. \end{cases}$$

W szczególności zapis $\alpha \vdash_j$ oznaczał będzie sekwent postaci $\{\alpha\} \vdash_j$. Z powyższych określeń łatwo wynika, że dowolny sekwent $\Sigma = \Gamma_0 \vdash \cdots \vdash \Gamma_{n-1}$ można przedstawić jako złożenie n sekwentów $\Gamma_j \vdash_j$ dla $0 \leq j \leq n-1$. Sekwent będziemy nazywać *atomicznym* jeśli wszystkie formuły w nim występujące są atomowe.

Niech $s : E_n^m \to E_n$ będzie interpretacją spójnika $\sigma \in \mathbf{A}$. Powiemy, że funkcja *s spełnia warunek*

$$(c_0, \ldots, c_{k-1}; j)$$

dla zmiennych $x_0, \ldots, x_{k-1}$ przy $k \leq m$ jeśli wartość funkcji przy $x_i = c_i$ dla $i = 0, \ldots, k-1$ wynosi j. Powiemy też, że funkcja *s spełnia minimalnie* *warunek* $(c_0,\ldots,c_{k-1};\ j)$ wtedy i tylko wtedy gdy $k-1$ jest minimalnym wskaźnikiem zmiennej, to jest jeśli $\{b_0,\ldots,b_{r-1}\} \subseteq \{c_0,\ldots,c_{k-1}\}$ i $r \neq k$, to funkcja s nie spełnia warunku $(b_0,\ldots,b_{r-1};\ j)$ dla żadnego z podzbiorów zmiennych $x_0,\ldots,x_k$. Fakt, że funkcja s spełnia minimalnie warunek $(a_0,\ldots,a_{k-1};\ j)$ będziemy oznaczać $s\#(a_0,\ldots,a_{k-1};\ j)$. Jeśli ciąg $a_0,\ldots,a_{k-1}$ oznaczymy przez $\boldsymbol{a}$, to napis $s\#(a_0,\ldots,a_{k-1};\ j)$ możemy skrócić do zapisu $s\#(\boldsymbol{a};j)$.

Niech teraz Q będzie dowolnym n-wartościowym kwantyfikatorem a funkcja $\rho:\ \mathbf{D}_n \to E_n$ jego funkcją interpretacji. Powiemy, że $(m+1)$-ka $(i,j_1,\ldots,j_m)$,
$m<n$ spełnia warunek $w_Q(i;j_1,\ldots,j_m)$, krócej $w_Q(i;\boldsymbol{j})$, jeśli n-tka $(d(0),\ldots,d(j_1),\ldots,d(j_2),\ldots,d(j_m),\ldots,d(n-1))$ określona wzorem

$$d(t)=\begin{cases}1 & \text{jeśli } t\in\{j_1,\ldots,j_m\}\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}$$

należy do zbioru $\rho^{-1}(\{i\})$. Innymi słowy warunek $w_Q(i,j_1,\ldots,j_n)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy n-kta mająca 1 na miejscach $j_1,\ldots,j_m$ i 0 na pozostałych przyjmuje wartość i przez funkcję ρ.

Niech

$$\Sigma=\Gamma_0\vdash\cdots\vdash\Gamma_{n-1}$$

i niech $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in S,\ \ \sigma\in\mathbf{A},\ \ a_k\in C$ i $Q\in\mathbf{Q}$. Niech ponadto

$$\Sigma_{\boldsymbol{c}}=\Gamma'_0\vdash\cdots\vdash\Gamma'_{n-1} \quad \text{i}$$
$$\Delta_{\boldsymbol{a}}=\Gamma''_0\vdash\cdots\vdash\Gamma''_{n-1}$$

będą sekwentami takimi, że dla $i=0,1,\ldots,n-1$

$$\Gamma'_i=\Gamma_i\cup\{\alpha_k:\ pr_k(c)=i\}$$
$$\Gamma''_i=\Gamma_i\cup\{\beta(a_k):\ (d(j_0),\ldots,d(j_{n-1}))\in\rho^{-1}(\{i\})$$

gdzie

$pr_k(c)$ oznacza rzut ciągu c na k-tą współrzędną, a

$$d(j_k)=\begin{cases}1 & \text{jeśli istnieje ciąg } b\in U^N \text{ taki, że } v(\beta(x/a_s),b)=k\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}$$

przy czym na stałe a_s nakładane będą pewne ograniczenia w zależności od wprowadzanego przy pomocy określanej reguły kwantyfikatora Q.
Wtedy reguły wprowadzania spójnika zdaniowego σ i kwantyfikatora Q do zbioru Γ_j w sekwencie $\Sigma=\Gamma_0\vdash\cdots\vdash\Gamma_{n-1}$ mają następującą postać:

$$(\sigma j)\qquad \frac{\{\Sigma_{\boldsymbol{c}}:\ c\in E^m_k\ \&\ k\le m\ \&\ s\#(c;j)\}}{\Gamma_0\vdash\cdots\vdash\Gamma_j,\sigma(\alpha_1,\ldots\alpha_m)\vdash\cdots\vdash\Gamma_{n-1}}$$

gdzie s jest interpretacją spójnika σ;

$$(Qj) \quad \frac{\{\Delta_{a} : a \in G_n \;\&\; w_Q(j;a)\}}{\Gamma_0 \vdash \cdots \vdash \Gamma_j, Q_{x_k}\beta(x_k) \vdash \cdots \vdash \Gamma_{n-1}}$$

dla $j = 0, 1, \ldots, n-1$

Sekwent $\Sigma = \Gamma_0 \vdash \cdots \vdash \Gamma_{n-1}$ nazywać będziemy *sekwentem przepełnionym* wtedy i tylko wtedy gdy

(a) istnieją r, s takie, że $0 \leq r \leq n-1$, $0 \leq s \leq n-1$ i $\Gamma_r \cap \Gamma_s \neq \emptyset$, lub

(b) istnieje nieatomowa formuła $\sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \Gamma_j$ dla której nie istnieje ciąg stałych $c \in E$ taki, że $s\#(c, j)$.

(c) istnieje formuła postaci $Q_x\alpha(x) \in \Gamma_j$ taka dla której nie istnieje ciąg $a \in G_n$ taki, że $w_Q(j;a)$.

Sekwent Σ nazywać będziemy *sekwentem końcowym* wtedy i tylko wtedy gdy jest sekwentem atomicznym lub przepełnionym.

Drzewem dowodowym sekwentu

$$\Sigma = \Gamma_0 \vdash \cdots \vdash \Gamma_{n-1}$$

nazywamy piątkę

$$\mathcal{D} = (\Sigma, D, D', r, l) \quad \text{gdzie}$$

(a) sekwent Σ jest korzeniem lub początkiem drzewa,

(b) zbiór D jest zbiorem sekwentów i $D' \subseteq D$, gdzie D' oznacza zbiór sekwentów końcowych,

(c) r jest relacją binarną określoną na zbiorze D w następujący sposób:

$\Sigma r \Pi$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje reguła (σj) dla pewnego $\sigma \in A$ i pewnego $j \in E_n$ taka, że sekwent Π jest jej wnioskiem a Σ jedną z jej przesłanek

(d) $l : D \to N$ przy czym spełnione są następujące warunki:

$l(\Sigma) = 0$,

jeżeli $\Sigma r \Pi$, to $l(\Sigma) = l(\Pi) + 1$.

Funkcję l nazywamy *poziomem sekwentu* w drzewie $\mathcal{D}$.
Zbiór sekwentów końcowych D' stanowi zbiór *liści* drzewa dowodowego sekwentu Σ.

Drzewo dowodowe $\mathcal{D}$ sekwentu Σ nazywamy *zamkniętym* jeśli każdy liść tego drzewa jest sekwentem przepełnionym. W przeciwnym przypadku drzewo takie będziemy nazywać otwartym.

Przypomnijmy, że r, gdzie $0 < r \leq n-1$ jest najmniejszą wartością wyróżnioną w zbiorze wartości logicznych E_n.

Powiemy, że formuła $\alpha \in S$ jest twierdzeniem w systemie sekwentów dla n–wartościowego rachunku zdań wtedy i tylko wtedy gdy istnieją zamknięte drzewa dowodowe sekwentów postaci $\alpha \vdash_j$ dla każdego j, $0 \leq j < r$. Niech X będzie dowolnym zbiorem formuł. Oznaczmy

$$t(X) = \{\beta \vdash_j \colon j \in E_n \,\&\, \beta \in X\}.$$

Niech $Y \subseteq t(X)$. Konfiguracją dla ciągu sekwentów Y (oczywiście, każdy zbiór sekwentów możemy ustawić w ciąg) nazywamy drzewo dowodowe skonstruowane w następujący indukcyjny sposób

(k_1) tworzymy drzewo dowodowe dla pierwszego sekwentu Σ_0 w ciągu Y,

(k_2) jeżeli już mamy utworzone drzewo dla sekwentów $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{k-1}$, to każdy liść otwarty Δ tego drzewa zastępujemy drzewem dowodowym sekwentu $\Delta\Sigma_k$ o ile takie liście istnieją

(k_3) kończymy procedurę tworzenia drzewa jeśli takich liści nie ma.

Łatwo zauważyć, że problem istnienia konfiguracji dla całego zbioru sekwentów Y wiąże się z istnieniem drzew otwartych dla każdego sekwentu ze zbioru Y. Jeśli ciąg sekwentów Y jest nieskończony, to konfiguracja może być drzewem nieskończonym. Ze względu na to, że każdy punkt drzewa ma skończoną ilość poprzedników, to z lematu König'a wynika natychmiast, że w takiej konfiguracji istnieje gałąź nieskończona.

Powiemy, że sekwent

$$\Sigma = \Gamma_0 \vdash \cdots \vdash \Gamma_{n-1}$$

jest *spełnialny* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartościowanie $v : V \to E_n$ takie, że $h_v(\alpha) = j$ dla pewnego $\alpha \in \Gamma_j$, gdzie h_v oznacza rozszerzenie wartościowania v do homomorfizmu S w E_n.

Drzewo dowodowe sekwentu Σ jest *spełnialne* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt tego drzewa będący sekwentem spełnialnym.

Lemat 3

Niech $\alpha \in S$. Jeżeli drzewo sekwentu $\alpha \vdash_j$ jest zamknięte, to dla każdego wartościowania $v \colon V \to E_n$, $h_v(\alpha) \neq j$.

Dowód

Proste sprawdzenie pokazuje, że reguły wprowadzania spójników do poszczególnych zbiorów sekwentów prowadzą od sekwentów spełnialnych do sekwentów spełnialnych. Jeśli sekwent $\alpha \vdash_j$ jest spełnialny, to drzewo złożone z korzenia $\alpha \vdash_j$ też jest spełnialne. Tworząc drzewo dowodowe dla $\alpha \vdash_j$ otrzymujemy, zgodnie z założeniem drzewo zamknięte, więc nie może być ono spełnialne. Zatem nie istnieje spełnialny punkt tego drzewa co przeczy założeniu, że korzeń drzewa jest spełnialny. ∎

Niech $Y = t(S)$ i niech $X \in Y$ Zbiór X będziemy nazywać nieprzepełnionym wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

(n_1) dla dowolnej formuły atomowej $\alpha \in S$ i dowolnych $j, k \in E_n$ jeśli $j \neq k$ i $\alpha \vdash_j \in X$, to $\alpha \vdash_k \notin X$,

(n_2) jeżeli $\alpha = \sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ i $\alpha \vdash_j \in X$, to istnieje przynajmniej jeden sekwent postaci $\alpha_t \vdash_k$, $1 \leq t \leq m$ należący do zbioru przesłanek reguły (σj), której wnioskiem jest $\alpha \vdash_j$ taki, że $\alpha_t \vdash_k \in X$,

(n_3) jeżeli $\alpha = Qx\beta$ i $\alpha \vdash_j \in X$, to istnieje $\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ $j_s < n$ dla $s = 1, 2, \ldots, m$, taki, że

(a) $w_Q(j, \boldsymbol{j})$,

(b) dla każdego $c \in U$ istnieje s, $1 \leq s \leq m$ takie, że $\beta(x/c) \vdash_s \in X$

(c) dla każdego j_s występującego w ciągu $\boldsymbol{j}$ istnieje stała $c \in U$ taka, że $\beta(x/c) \vdash_{j_s} \in X$.

Lemat 4

Niech S będzie nieprzepełnionym zbiorem sekwentów. Wtedy istnieje wartościowanie $v : S \to E_n$ takie, że dla dowolnej formuły α, $h_v(\alpha) = i$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha \vdash_i \in X$.

Dowodzi się, że dowolny nieprzepełniony zbiór sekwentów Y można rozszerzyć do zbioru maksymalnego.

Formuła $\alpha \in S$ jest twierdzeniem n-sekwencyjnego rachunku predykatów wtedy i tylko wtedy gdy istnieją zbiory sekwentów przepełnionych, na gruncie których istnieją drzewa dowodowe sekwentów postaci $\alpha \vdash_j$ dla $j = 1, \ldots, r - 1$, gdzie r oznacza najmniejszą wartość wyróżnioną.

Lemat 5

Niech sekwent $\Sigma = \Gamma_0 \vdash \ldots \vdash \Gamma_{n-1}$ będzie punktem drzewa dowodowego formuły α. Jeśli α nie jest tautologią to istnieje struktura Re, interpretacja i języka S w strukturze $\Re$ oraz wartościowanie v takie, że dla każdego

$j = 0, \ldots n-1$ jeśli $\beta \in \Gamma_j$ to $v(\beta) = j$. ■

Lemat 6

Jeżeli formuła α jest twierdzeniem n-sekwentowego rachunku predykatów to α jest jego tautologią.

Dowód.

Załóżmy że α jest wyprowadzalna, a nie jest tautologią. Istnieje więc struktura $\mathfrak{R}$, interpretacja i oraz wartościowanie v takie że, $v(\alpha) \notin E^*$. Łatwo zauważyć że jeśli Lemat 6 zachodzi dla pewnego sekwentu drzewa dowodowego formuły α to zachodzi też co najmniej dla jego poprzednika. Stąd na podstawie twierdzenia o rozszerzaniu do gałęzi maksymalnej nie istnieje sekwent przepełniony. Zatem α nie jest twierdzeniem. ■

Twierdzenie 1

Jeżeli formuła α jest tautologią to jest twierdzeniem n-sekwentowego rachunku predykatów.

Dowód.

Niech formuła α nie będzie wyprowadzalna. Niech na przykład dla sekwentu końcowego $\alpha \vdash \emptyset \vdash \ldots \vdash \emptyset$ każde drzewo dowodowe zawiera jako sekwenty początkowe te sekwenty, które nie są przepełnione. Niech D będzie takim maksymalnym drzewem. Na mocy Lematu 5 można tak dobrać wartościowanie v przy którym v nie jest tautologią. ■

Wniosek 1

Zbiór twierdzeń pokrywa się ze zbiorem tautologii. ■

Bibliografia

1. E. W. Beth, *Semantic Entailment and Formal-Derivability,* Mededel Kon. Ned. Akad. Wetensch. Afd. Letterkunde N.S.19, 309–342.

2. P. Borowik, *On Gentzen's Axiomatization of the Reducts of Many-Valued Logic,* Abstract, The Journal of Symbolic Logic, 48, (4) 1983, 1224–1225.

3. P. Borowik, *Reichenbach's Propositional Logic in Algorithmic Form,* Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 44, Theory of Algorithms, 1984.

4. P. Borowik, *Multi-Valued n-Sequential Propositional Logic,* Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie, Seria: Matematyka II, Częstochowa 1992 (w druku).

5. G. Gentzen. *Untersuchungen tber das logische Schliessen,* Math.Z.39, 1934-5, 176–210 and 405–431.

6. J. Hintikka, *Form and Content in Quantification Theory,* Acta Phil. Fen. 8, 1955, 7-55.

7. V. G. Kirin, *Gentzen's Method of the Many-Valued Propositional Calculi,* Zeitschrift fur Math. Log. und Grund. der Math., 12, 1966, 317–332.

8. H. Rasiowa, *On m-Valued Predicate Calculi,* IV'th Intern. Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Sciences, Bucarest, 1971.

9. R. M. Smullyan, *First-Order Logic,* Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg New-York 1968.