



Andrzej Roman

Akademia im. Jana Długosza

al. Armii Krajowej 13/15, 42-200 Częstochowa

e-mail: a.roman@ajd.czyst.pl

WPLYW ZJAWISKA WYPIERANIA PRĄDU NA STRATY WYWOŁANE PRZEZ PRĄDY WIROWE W MODELU DOMENOWYM SKŁADAJĄCYM SIĘ ZE SKOŃCZONEJ LICZBY DOMEN

Streszczenie. W pracy określono straty wywołane przez prądy wirowe w wielodomenowym modelu blachy elektrotechnicznej o skończonej długości. Wykorzystując wielodomenowy model Pry'ego, Beana [1] oraz rozwiązania uzyskane przez Younga, Bhate, Swifta [2], określono, stosując metodę kolejnych reakcji prądów wirowych, wpływ zjawiska wypierania prądu na straty wywołane przez prądy wirowe. Rozwiązanie uzyskane przez Younga, Bhate, Swifta [2] zostało określone przy rozwiązaniu równania Laplace'a. Obliczona pierwsza składowa reakcji prądów wirowych pozwala określić wpływ zjawiska wypierania prądu na straty wywołane przez prądy wirowe.

Słowa kluczowe: anizotropowe materiały magnetyczne, straty z prądów wirowych, model domenowy, wypieranie prądu.

THE INFLUENCE OF THE SKIN EFFECT ON EDDY CURRENTS LOSSES IN FINITE WIDTH SHEET

Abstract. The work deals with calculating eddy current losses in anisotropic magnetic materials in finite width sheet. Pry, Bean multidomain wall model of electrical sheet was taken for calculation [1]. Young, Bhate, Swift [2] examined similar model and defined eddy current losses for an electrical sheet consisting of an arbitrary finite number domain solving the Laplace's equation.

The influence of the skin effect on eddy current losses was determined using method successive reactions of the eddy current losses.

Keywords: anisotropic magnetic materials, eddy current losses, domain model, skin effect.

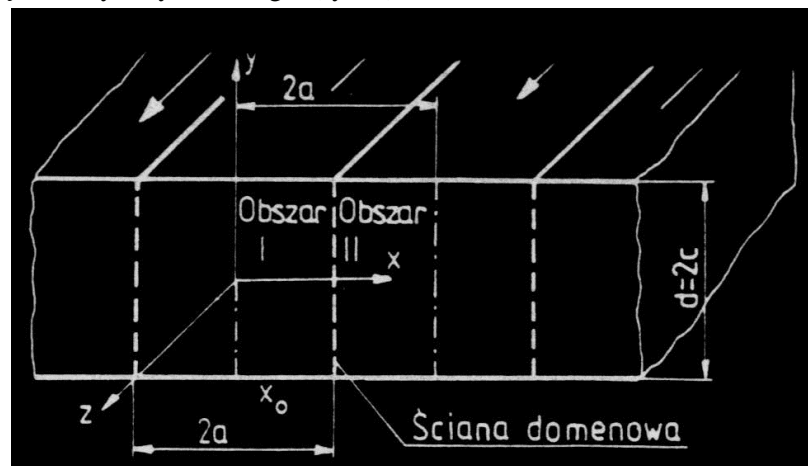
Wstęp

Teorię strat wywołanych przez prądy wirowe, w których uwzględniono strukturę domenową materiału magnetycznego, przedstawiono w pracach [1, 2, 3, 4, 5]. Wiliams, Shockley i Kittel zaproponowali, aby straty te analizować na podstawie ruchu pojedynczej ściany domenowej. Jednak najczęściej stosowanym modelem domenowym jest model Pry'ego, Beana [1]. W modelu tym domeny przedzielone są 180° ścianami Blocha, równoległymi do kierunku walcowania i przechodzącymi przez całą grubość blachy. W pracy Younga, Bhate, Swifta [2] obliczono straty wywołane w modelu wielodomenowym o skończonej długości, rozwiązując równanie Laplace'a.

Stosując metodę kolejnych reakcji prądów wirowych i wykorzystując rozwiązanie podane przez Younga, Bhate, Swifta [2], określono wpływ zjawiska wypierania prądu na straty wywołane przez prądy wirowe.

Założenia

Straty z prądów wirowych w modelu wielodomenowym anizotropowej blachy elektrotechnicznej określono przy założeniu, że płaskie ściany Blocha rozdzielają domeny antyrównoległe (rys. 1).



Rys. 1. Przekrój modelu domenowego anizotropowej blachy elektrotechnicznej [3]

Szerokość domeny wynosi $2a$, natomiast grubość blachy $d=2c$, a położenie ściany domenowej x_0 . W modelu rozpatrywanym przez Younga, Bhate, Swifta [2] założono, że blacha ma skończoną długość, równą W równą $W=(N-1)2a$, położenie i -tej ściany domenowej opisane jest równaniem:

$$x_i = (2i-1)a + (-1)^i (B_m / B_s) a \cos \omega t \quad (1)$$

a prędkość ruchu i-tej ściany domenowej zależnością:

$$v_i = \omega a (B_m / B_s) \sin \omega t \quad (2)$$

gdzie : B_m – amplituda indukcji,

B_s – indukcja nasycenia,

ω – pulsacja.

Warunki brzegowe dla modelu Younga, Bhate, Swifta [2] o skończonej długości miały postać:

$$j_x = 0 \quad \text{dla } x=0 \text{ i } x=W \quad (3)$$

$$j_y = 0 \quad \text{dla } y=c \text{ i } y=-c \quad (4)$$

$$j_{xi} = j_{xi+1} \quad \text{dla } x = x_i \quad (5)$$

$$j_{yi} - j_{yi+1} = 2v_i B_m / B_s \gamma \quad \text{dla } x = x_i \quad (6)$$

gdzie: γ – przewodność właściwa.

Natężenie pola H_0 podane przez Younga, Bhate, Swifta [2] określone jest zależnością:

$$H_0 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_m^{\infty} (A_{mi} \cosh \lambda_m x + B_{mi} \sinh \lambda_m x) \cos \lambda_m y. \quad (7)$$

gdzie stałe występujące w tej zależności opisane są zależnościami:

$$A_{mi} - A_{mi+1} = C_m \sin \omega t \sinh \lambda_m x_i \quad (8)$$

$$B_{mi} - B_{mi+1} = -C_m \sin \omega t \cosh \lambda_m x_i \quad (9)$$

$$C_m = \frac{16B_m \sigma \omega 2Lc}{m^2 \pi^2} \sin \frac{m\pi}{2} \quad (10)$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{2c} \quad (11)$$

Metoda kolejnych reakcji prądów wirowych

Stosując znaną w literaturze [3, 4, 5] metodę kolejnych reakcji prądów wirowych, pole H można przedstawić w postaci:

$$H = H_0 + H_1 + \dots + H_m + \dots \quad (12)$$

przy czym składowa H_0 spełnia równanie Laplace'a, podczas gdy kolejne składowe spełniają równanie

$$\nabla^2 H_{m+1} = \mu_0 \gamma \frac{\partial H_m}{\partial t} \quad (13)$$

które przy danym H ma postać równania Poissona. Łatwo sprawdzić, że wyznaczone w ten sposób pole H spełnia równanie przewodnictwa, które opisuje wpływ zjawiska wypierania prądu.

Określenie wpływu zjawiska wypierania prądu na straty wywołane przez prądy wirowe

Wartość natężenia pola H_0 określoną przez Younga, Bhate, Swifta [2] podstawiono do równania (13), otrzymując równanie:

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} = \mu \mu_0 \gamma \frac{\partial H_0}{\partial t}. \quad (14)$$

Posługując się metodą rozdzielania zmiennych, określono natężenie pola H_1 . Natężenie pola, uwzględniające pierwszą składową reakcji prądów wirowych, określone jest wzorem:

$$H_1 = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} f_m(x) \cos \lambda_m y \quad (15)$$

Uwzględniając warunki brzegowe, określono natężenie pola w poszczególnych domenach. Całkowite natężenie pola jest równe sumie natężeń pól w poszczególnych domenach:

$$H_{01} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_m^{\infty} \left\{ C_m \left[\begin{aligned} & \frac{A'_{mi}}{2\lambda_m} x \sinh \lambda_m x + \frac{B'_{mi}}{2\lambda_m} - \frac{A'_{mi}}{4\lambda_m^2} \cosh \lambda_m x - \\ & + \frac{B'_{mi}}{4\lambda_m^2} \sinh \lambda_m x \\ & + K_i e^{\lambda_m x} + L_i e^{-\lambda_m x} \end{aligned} \right] \right\} + \cos \lambda_m y. \quad (16)$$

gdzie:

$A'_{mi}, A'_{mi+1}, B'_{mi}, B'_{i+1}$ pochodne stałych $A_{mi}, A_{mi+1}, B_{mi}, B_{i+1}$

$$A'_{mi} - A'_{mi+1} = C_m \omega [\cos \omega t \sinh \lambda_m x_i + (-1)^i x_m \lambda \sin^2 \omega t \cosh \lambda_m x_i] \quad (17)$$

$$B'_{mi} - B'_{mi+1} = -C_m \omega [\cos \omega t \cosh \lambda_m x_i + (-1)^i x_m \lambda \sin^2 \omega t \sinh \lambda_m x_i] \quad (18)$$

Uwzględniając warunki brzegowe, określono współczynniki:

$$A'_{mr} = C_m \omega \sum_{r=1}^{i-1} -[\cos \omega t \sinh \lambda_m x_i + (-1)^i x_m \lambda \sin^2 \omega t \cosh \lambda_m x_i] \quad (19)$$

$$A'_{mN} = C_m \omega \sum_{r=1}^{N-1} -[\cos \omega t \sinh \lambda_m x_i + (-1)^i x_m \lambda \sin^2 \omega t \cosh \lambda_m x_i] \quad (20)$$

$$B'_{mr} = B'_{mN} - C_m \omega \sum_{r=i}^{N-1} [\cos \omega t \cosh \lambda_m x_i + (-1)^i x_m \lambda \sin^2 \omega t \sinh \lambda_m x_i]$$

$$K_i = K_1 + \sum_{r=1}^{i-1} \left\{ (A'_{mr} - A'_{mr+1})(2\lambda x_r - e^{-2\lambda x_r}) + (B'_{mr} - B'_{mr+1})(2\lambda x_r + e^{-2\lambda x_r}) \right\} \quad (21)$$

$$L_i = L_1 + \sum_{r=1}^{i-1} \left\{ (A'_{mr} - A'_{mr+1})(2\lambda x_r + e^{-2\lambda x_r}) + (B'_{mr} - B'_{mr+1})(2\lambda x_r - e^{-2\lambda x_r}) \right\} \quad (22)$$

$$L_1 = -K_1 = -\frac{A'_{mN} 4\lambda W e^{\lambda W}}{\sinh \lambda W e^{\lambda W}} + \frac{e^{2\lambda W}}{e^{2\lambda W} - 1} \sum_{r=1}^{N-1} \left\{ (A'_{mr} - A'_{mr+1})(2\lambda x_r - e^{-2\lambda x_r}) + (B'_{mr} - B'_{mr+1})(2\lambda x_r + e^{-2\lambda x_r}) \right\} +$$

$$-\frac{1}{e^{2\lambda W} - 1} \sum_{r=1}^{N-1} \left\{ (A'_{mr} - A'_{mr+1})(2\lambda x_r + e^{2\lambda x_r}) + (B'_{mr} - B'_{mr+1}) - (e^{2\lambda x_r} - 2\lambda x_r) \right\} \quad (23)$$

$$B'_{mN} = -A'_{mN} \coth \lambda_m W \quad (24)$$

Straty z prądów wirowych określone są wzorem:

$$P = \frac{1}{\gamma} \int \mathbf{j}^2 dV = \frac{1}{\gamma} \int \text{grad}^2 H dV \quad (25)$$

Średnia wartość strat dla jednej domeny po przekształceniach określona jest zależnością:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\oint_S H \frac{\partial H}{\partial n} dS - \mu_0 \gamma \int_{V_i} H_1 \frac{\partial H_0}{\partial t} dV \right] dt \quad (26)$$

Straty całkowite są sumą strat we wszystkich N-1 domenach

$$P_{srN} = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^{N-1} \left[\oint_S H \frac{\partial H}{\partial n} dS - \mu_0 \gamma \int_{V_i} H_1 \frac{\partial H_0}{\partial t} dV_i \right] dt \quad (27)$$

Po przekształceniach i uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymano:

$$P_{srN} = -\sum_{i=1}^{N-1} \int_{-c}^c H_i (j_{yi} - j_{yi+1}) \Big|_{x=x_i} dy = -2B_s v_0 \sum_{i=1}^{N-1} \int_{-c}^c H_i \Big|_{x=x_i} dy \quad (28)$$

Wnioski

W pracy określono wpływ zjawiska wypierania prądu na straty wywołane przez prądy wirowe, wykorzystując model Younga, Bhate, Swifta [2] i obliczoną wartość strat wywołanych przez prądy wirowe (rozwiązanie równania Laplace'a). Wykorzystując metodę kolejnych reakcji prądów wirowych, okreś-

lono wartość strat wywołanych przez prądy wirowe uwzględniającą wpływ zjawiska wypierania prądu dla blachy anizotropowej posiadającej skończoną liczbę domen. Dzięki przekształceniom zależności określającej straty z prądów wirowych otrzymano straty z prądów wirowych uzależnione tylko od natężenia pola H na i -tej ścianie. Uproszczenie to było możliwe dzięki zastosowaniu zależności teorii pola oraz wykorzystaniu warunków brzegowych. Otrzymana zależność pozwala także określić wpływ zjawisk krawędziowych. W przypadku gdy przyrost strat przekracza 10% strat liczonych bez uwzględnienia zjawiska wypierania prądu, należy uwzględnić drugą składową prądów wirowych, której wpływ będzie wówczas zauważalny.

Literatura

- [1] Pry R.H., Bean C.P., Calculation of the energy loss in magnetic sheet materials using a domain model. *Journal of Applied Physics* 1958, Vol. 29, p. 532–533, DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1723212>.
- [2] Young F.J., Bhate S.K., Swift W.M., Theory of eddy current losses in finite width sheet exhibiting simple bar-like domain structure. *IEEE Transactions on Magnetics* 1974, Vol. MAG-9, No. 3, p. 814–816, DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.1974.1058484>.
- [3] Roman A., The influence of the skin effect on eddy current losses in the plane for single and multidomain wall models, *IEEE Transactions on Magnetics* 1984, Vol. MAG-20, No. 6, p. 2109–2116, DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.1984.1063568>.
- [4] Roman A., The influence of skin effect on eddy current losses induced by Barkhausen jumps for the single domain wall model, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 1988, Vol. 74, p. 359–364, DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0304-8853\(88\)90211-9](http://dx.doi.org/10.1016/0304-8853(88)90211-9).
- [5] Roman A., Pole elektromagnetyczne w materiałach magnetycznie miękkich o uporządkowanej strukturze domenowej, *Wyd. Politechniki Częstochowskiej, seria Monografie 36*, 1996.