Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka IV, Częstochowa 1998

Przekształcenie afiniczne

Jadwiga Knop

W nauczaniu geometrii istnieje pewien problem z prezentacją przekształcenia afinicznego. Część autorów podręczników geometrii dla studentów definiuje przekształcenie afiniczne podając gotowy wzór. Inni podają definicję tego przekształcenia jako bijekcji przestrzeni afinicznej na siebie, przekształcających proste na proste, lecz wówczas nie jest wyprowadzany wzór. Jeszcze inna metoda polega na definiowaniu przekształcenia afinicznego przy pomocy przekształcenia liniowego, co w łatwy sposób prowadzi do odpowiedniego wzoru. Wydaje się, że sposobem najbardziej naturalnym jest sposób drugi uzupełniony o niezbyt żmudne wyprowadzenie wzorów na przekształcenie. Otóż w znanych mi podręcznikach nie spotkałam takiego połączenia.

W pracy niniejszej podaję, właśnie, pewien prosty i naturalny sposób wyprowadzania wzoru na przekształcenie afiniczne używając definicji przekształcenia afinicznego jako bijekcji przekształcającej proste na proste.

Niech X będzie dwuwymiarową przestrzenią afiniczną o przestrzeni wektorowej V (rzeczywistej). Przyjmujemy następującą definicję

Definicja 1. Bijekcję $f : X \to X$ przekształcającą proste na proste nazywamy przekształceniem afinicznym.

Uwaga 1.
Z definicji tej wynika, że przekształcenie afiniczne proste równoległe przekształca na proste równoległe, natomiast proste przecinające przechodzą na proste przecinające. Ponadto, ponieważ środek odcinka $\overline{ab}$ jest punktem przecięcia się odpowiednio skonstruowanego równoległoboku, więc z powyższych uwag wynika, że środek odcinka $\overline{ab}$ przy przekształceniu afinicznym f przechodzi na środek odcinka wyznaczonego przez punkty $f(a)$ i $f(b)$.

Definicja 2. Niech $a, b, c \in X$ będą punktami współliniowymi i niech $a \neq b \neq c$.
Stosunkiem pojedyńczego podziału punktów a, b punktem c nazywamy taką liczbę λ, że

$$\overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{bc}$$

i oznaczamy symbolem $s(a, b; c) = \lambda$.

Uwaga 2.
Z definicji stosunku wynika, że

$$s(a,b;c) \neq 1.$$

Ponadto, jeśli $c \neq a \neq b \neq c$, to

$$s(a,b;c) = \frac{1}{s(b,a;c)}$$

Przy pomocy stosunku pojedyńczego podziału możemy podać warunki równoważne na odcinek i środek odcinka. Zachodzą mianowicie następujące lematy

Lemat 1. Niech $a \neq b$. Wówczas punkt c należy do odcinka $\overline{ab}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$s(a,b;c) < 0.$$

Lemat 2. Niech $a \neq b$. Wówczas punkt c jest środkiem odcinka $\overline{ab}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$s(a,b;c) = -1.$$

Zachodzi również

Lemat 3. Niech $a \neq b$. Wówczas zachodzą następujące warunki

1) Jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$ i $0 \neq \lambda \neq 1$, to istnieje dokładnie jeden punkt taki, że
$$s(a,b;c) = \lambda.$$

2) Jeśli $a \neq c \neq b$, to
$$s(a,c;b) = 1 - s(a,b;c).$$

3) Jeśli $s(a,b;c) < 0$ i $s(a,c;p) < 0$, to
$$s(a,b;c) < s(a,b;p)$$

4) Jeśli $s(a,b;c) < 0$ i $s(a,c;p) < 0$, to
$$s(a,b;p) < 0.$$

5) Jeśli punkty a,b,c,p są współliniowe i różne oraz $s(a,b;p) < 0$, to
$$s(a,c;p) < 0 \text{ albo } s(c,b;p) < 0.$$

6) Jeśli $a \neq b \neq c \neq a$ oraz
$s(a,b;c) = \lambda^2$, $s(a,b;p) = -\lambda$, i $s(a,b;q) = \lambda$, to
$$s(p,q;c) = -1.$$

7) Jeśli $a \neq b \neq q \neq a$ oraz $s(a,b;q) = \lambda$, $\lambda \neq -1$
$s(a,b;p) = -\lambda$ i $s(p,q;c) = -1$, to
$$s(a,b;c) = \lambda^2.$$

Dowód. Własności 1) - 7) są ogólnie znane.
Pokażę prawdziwość warunku 6).
Z założeń mamy

$$\overrightarrow{ac} = \lambda^2 \overrightarrow{bc}, \ \overrightarrow{ap} = -\lambda \overrightarrow{bp}, \ \overrightarrow{aq} = \lambda \overrightarrow{bq}.$$

Z tych równości otrzymujemy następujące związki:

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb} = \lambda^2 \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cb} = (1 - \lambda^2)\overrightarrow{cb},$$

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ap} + \overrightarrow{pb} = -\lambda \overrightarrow{bp} + \overrightarrow{pb} = (1 + \lambda)\overrightarrow{pb},$$

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{aq} + \overrightarrow{qb} = \lambda \overrightarrow{bq} + \overrightarrow{qb} = (1 - \lambda)\overrightarrow{qb}$$

Zatem

$$\overrightarrow{pc} = \overrightarrow{pb} + \overrightarrow{bc} = \frac{-\lambda}{1 - \lambda^2}\overrightarrow{ab}$$

oraz

$$\overrightarrow{cq} = \overrightarrow{cb} + \overrightarrow{bq} = \frac{-\lambda}{1 - \lambda^2}\overrightarrow{ab}.$$

Stąd $\overrightarrow{pc} = \overrightarrow{cq}$,
a więc $s(p, q; c) = -1$.

Dowód własności 7) przebiega analogicznie. ■

Pokażę, że stosunek pojedyńczego podziału jest niezmiennikiem przekształceń afinicznych. W tym celu skorzystam z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. Niech $a \neq b$. Przy przekształceniu afinicznym f obrazem każdego punktu c należącego do odcinka $\overline{ab}$ jest punkt $f(c)$ należący do odcinka wyznaczonego przez punkty $f(a)$ i $f(b)$.

Twierdzenie to można znaleźć w [1].

Ponieważ jest to mało znane twierdzenie, więc przytoczę dowód tego twierdzenia.

Dowód.

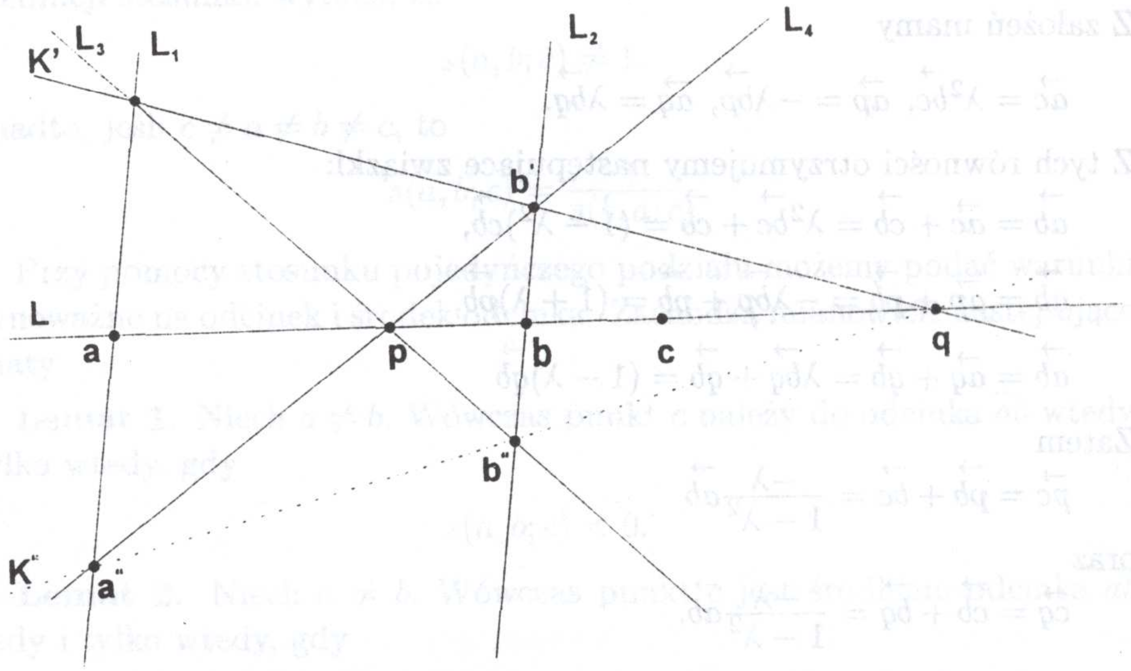
Załóżmy najpierw, że punkt c współliniowy z punktami a i b nie należy do odcinka $\overline{ab}$, $a \neq c \neq b$.

Oznaczmy przez $\lambda^2 = s(a, b; c)$

Z własności stosunku pojedyńczego podziału istnieją punkty p i q takie, że

$$s(a, b; p) = -\lambda, \ s(a, b; q) = \lambda \ \text{ i } \ s(p, q; c) = -1.$$

Poprowadzimy przez punkty a i b dwie proste równoległe L_1 i L_2. Na prostej L_1 obieramy dowolny punkt $a' \neq a$. Następnie przez punkty q i a' prowadzimy prostą K' i oznaczmy przez b' punkt przecięcia prostej K' z prostą L_2 (patrz rys. 1).



Stosując twierdzenie Talesa do prostych przecinających się K' i L (L - prosta zawierająca punkty a, b, c) i prostych równoległych L_1 i L_2 otrzymujemy

$$(1) \quad \frac{|\overline{aa'}|}{|\overline{bb'}|} = \frac{|\overline{aq}|}{|\overline{qb}|} = |\lambda|$$

Przez punkty a' i p prowadzimy prostą L_3. Oznaczmy przez b'' punkt przecięcia się tej prostej z prostą L_2. Stosując ponownie twierdzenie Talesa do prostych L_3 i L oraz prostych równoległych L_1 i L_2 otrzymujemy

$$(2) \quad \frac{|\overline{a'a}|}{|\overline{b''b}|} = \frac{|\overline{ap}|}{|\overline{pb}|} = |\lambda|$$

Stąd i z (1) mamy $|\overline{b''b}| = |\overline{b'b}|$, a więc b jest środkiem odcinka $\overline{b'b''}$.
Przez punkt b' i p prowadzimy prostą L_4.
Oznaczmy przez a'' punkt przecięcia się prostej L_4 z prostą L_1. Stosując, tak jak poprzednio, twierdzenie Talesa do odpowiednich prostych otrzymamy, że punkt a jest środkiem odcinka wyznaczonego przez punkty a' i a''. Ponadto punkty punkty a'', b'' i q są współliniowe. W ten sposób skonstruowana figura (rys. 1.) przy przekształceniu afinicznym f zachowa swój kształt (patrz Uwaga 1). Jeśli, przy tym, jeden z punktów $f(p)$ lub $f(q)$ należy do odcinka wyznaczonego przez punkty $f(a)$ i $f(b)$, to drugi punkt do tego odcinka nie należy. Niech np. punkt $f(p)$ należy do odcinka wyznaczonego przez punkty $f(a)$ i $f(b)$.
Oznaczmy przez

$$-\lambda' = s(f(a), f(b); f(p)),$$

gdzie $\lambda' > 0$. Stosując twierdzenie Talesa do przekształconej figury otrzymamy

$$s(f(a), f(b); f(q)) = \lambda'.$$

Ponadto punkt $f(c)$ jest środkiem odcinka wyznaczonego przez punkty $f(p)$ i $f(q)$, a więc $s(f(p), f(q); f(c)) = -1$. Stosując teraz własność 7) z lematu 3 otrzymamy

$$s(f(a), f(b); f(c)) = \lambda'^2$$

co oznacza, że punkt $f(c)$ nie należy do odcinka $\overline{f(a)f(b)}$. Stąd i z założenia, że f jest bijekcją otrzymamy tezę twierdzenia 1. ■

Konsekwencją tego twierdzenia jest

Twierdzenie 2. Stosunek pojedyńczego podziału jest niezmiennikiem przekształceń afinicznych.

Dowód.

Niech $f : X \to X$ będzie przekształceniem afinicznym i niech $a \neq b$. Zauważmy, że jeśli odcinek $\overline{ab}$ podzielimy na n równych części punktami $p_1 = a, p_2, \dots, p_{n-1} = b$, to

$$s(a, b; p_i) = s(f(a), f(b); f(p_i))$$

dla $i = 2, \dots, n-2$. Bowiem punkty p_i $(i = 2, \dots, n-2)$ są środkami odcinków $\overline{p_{i-1}p_{i+1}}$.

Zatem, jeśli $s(a, b; c)$ jest liczbą wymierną, to

$$s(a, b; c) = s(f(a), f(b); f(c)).$$

Bowiem, jeśli np.

$$s(a, b; c) = -\tfrac{\alpha}{\beta}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{N},$$

to dzielimy odcinek $\overline{ab}$ na $\alpha+\beta$ równych części punktami $p_1 = a, \ p_2, \dots, p_{\alpha+\beta-1}$. Wówczas punkt $c = p_\alpha$.

Załóżmy więc, że

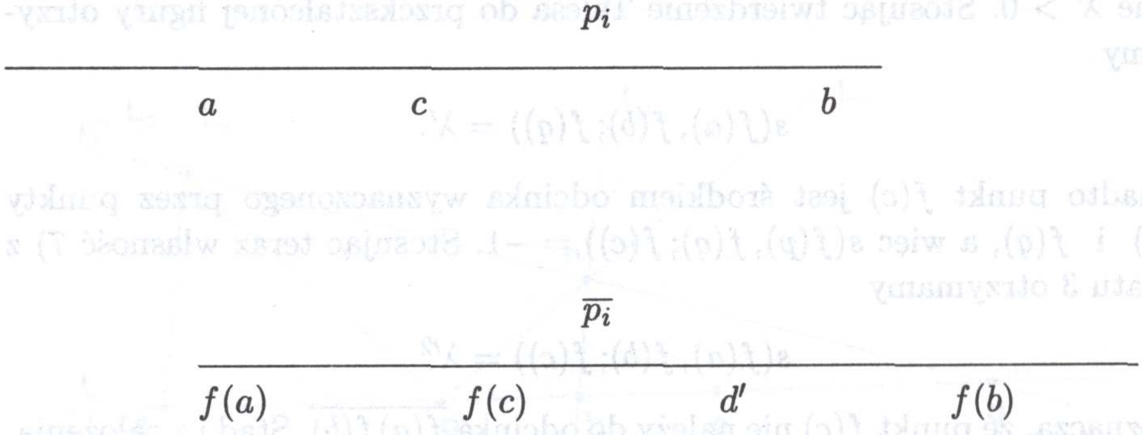
$$(3) \quad s(a, b; c) = \lambda \in \mathbb{R} - Q \quad \text{i} \quad \lambda < 0.$$

Przypuśćmy, że

$$s(f(a), f(b); f(c)) > s(a, b; c).$$

Punkt $f(c)$ na mocy poprzedniego twierdzenia należy do odcinka wzynaczonego przez punkty $f(a)$ i $f(b)$. Ponadto z własności stosunku otrzymujemy istnienie punktu d' takiego, że

$$(4) \quad s(f(a), f(b); d') = \lambda \qquad \text{(rys. 2.)}$$



rys. 2.

Podzielimy odcinek $\overline{f(a)f(b)}$ na n równych części i weźmiemy n tak duże aby jeden z punktów podziału $\overline{p_i}$ należał do odcinka wyznaczonego przez punkty $f(c)$ i d' (rys. 2). Stąd punkt $p_i = f^{-1}(\overline{p_i})$ należy do odcinka $\overline{ab}$ oraz

$$(5) \quad s(a,b;p_i) = s(f(a),f(b);\overline{p_i}).$$

Również z własności stosunku pojedyńczego podziału otrzymujemy, że punkt $\overline{p_i}$ należy do odcinka wyznaczonego przez punkty $f(c)$ i $f(b)$, a więc punkt p_i należy do odcinka $\overline{cb}$. Stosując ponownie własności stosunku mamy

$$s(a,b;p_i) < s(a,b;c)$$

Stąd i z równości (3), (4) i (5) mamy

$$s(f(a),f(b);\overline{p_i}) < s(f(a),f(b);d'),$$

co jest sprzeczne z tym, że $\overline{p_i}$ należy do odcinka wyznaczonego przez $f(c)$ i d'.

Zatem $s(f(a),f(b);f(c)) = s(a,b;c)$ dla $s(a,b;c) < 0$.
Jeśli $s(a,b;c) > 0$, to stosując lemat 2 i Uwagę 2 otrzymujemy

$$s(b,c;a) < 0 \quad \text{lub} \quad s(a,c;b) < 0$$

Powtarzając piszemy częśc tezy dla tych stosunków i stosując własności stosunku mamy

$$s(f(a),f(b);f(c)) = s(a,b;c).$$

Twierdzenie 3. Jeżeli $f : X \to X$ jest przekształceniem afinicznym, to odwzorowanie $\hat{f} : \mathbf{V} \to \vee$ zdefiniowane wzorem

$$\bigwedge_{x,y \in X} \quad \hat{f}(\overrightarrow{xy}) := \overrightarrow{f(x)f(y)}$$

jest przekształceniem liniowym.
Dowód.

Zauważmy, że $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'}$ wtedy i tylko wtedy, gdy środek odcinka $\overline{x'y}$ pokrywa się ze środkiem odcinka $\overline{xy'}$. Zatem, jeśli

$$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'}, \quad \text{to} \quad \overrightarrow{f(x)f(y)} = \overrightarrow{f(x')f(y')},$$

a więc odwzorowanie $\hat{f}$ jest poprawnie zdefiniowane. Niech $x, y, x', y' \in X$. Z definicji przestrzeni afinicznej istnieje punkt $z \in X$ taki, że $\overrightarrow{yz} = \overrightarrow{x'y'}$. Stąd

$$\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{x'y'} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz},$$

A więc

$$\hat{f}(\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{x'y'}) = \hat{f}(\overrightarrow{xz}) = \overrightarrow{f(x)f(z)} =$$
$$= \overrightarrow{f(x)f(y)} + \overrightarrow{f(y)f(z)} = \hat{f}(\overrightarrow{xy}) + \hat{f}(\overrightarrow{yz}) =$$
$$= \hat{f}(\overrightarrow{xy}) + \hat{f}(\overrightarrow{x'y'}).$$

zatem $\hat{f}$ jest odwzorowaniem addytywnym.
Pokażemy teraz, że dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ i dla każdych $x, y \in X$ zachodzi

$$(6) \qquad \hat{f}(\lambda\, \overrightarrow{xy}) = \lambda \hat{f}(\overrightarrow{xy}).$$

Zauważmy, że jeśli $\lambda = 0$ lub $\lambda = 1$, to równość jest oczywista. Załóżmy więc, że $0 \neq \lambda \neq 1$ i $x \neq y$.
Wówczas istnieje punkt $z \in Z$ taki, że

$$\overrightarrow{zy} = \lambda \overrightarrow{xy},$$

tzn. $s(z, x; y) = \lambda$.
Stosując twierdzenie 2 mamy

$$s(f(z), f(x); f(y)) = \lambda$$

stąd, zgodnie z definicją 1, otrzymujemy

$$\overrightarrow{f(z)f(y)} = \lambda\, \overrightarrow{f(x)f(y)}\,.$$

Stosując teraz definicję odwzorowania $\hat{f}$ mamy

$$\hat{f}(\lambda \overrightarrow{xy}) = \hat{f}(\overrightarrow{zy}) = \overrightarrow{f(z)f(y)} == \lambda\, \overrightarrow{f(x)f(y)} = \lambda \hat{f}(\overrightarrow{xy}).$$

A więc $\hat{f}$ jest jednorodne. Ponieważ f jest bijekcją, więc $\hat{f}$ też jest bijekcją. Zatem $\hat{f}$ jest przekształceniem liniowym. ■

Teraz korzystając z tego twierdzenia wyprowadzimy wzór na przekształcenie afiniczne f.

Ustalmy układ współrzędnych afinicznych wyznaczony przez punkt 0 i bazę $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$. Dla $\hat{f}$ istnieje macierz nieosobliwa $A = (aij)$ $i, j = 1, 2$ taka, że przekształcenie $\hat{f}$ wektorowi $\overrightarrow{u} = [u_1', u_2']$, gdzie

$$(7) \quad \begin{cases} u_1' &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2. \end{cases}$$

Niech punkt $f(0)$ ma współrzędne (a_1, a_2). Oznaczmy współrzędne punktu x przez (x_1, x_2), zaś współrzędne punktu $f(x)$ przez (x_1', x_2'). Wówczas korzystając z definicji współrzędnych afinicznych i wzorów (7) otrzymamy związki

$$\begin{cases} x_1' - a_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' - a_1 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy wzór na przekształcenie afiniczne f

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_2. \end{cases}$$

Uwaga 3 Podobne rozumowanie zawarte w tej pracy można przeprowadzić dla przekształcenia afinicznego dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni afinicznej w siebie.

Bibliografia

[1] - P.S. Modienow, A.S. Pachromienko, ,,Przekształcenia afiniczne'' Moskwa 1961 r.