

ARKADIUSZ MANDOWSKI

RÓWNANIA EINSTEINA W MODELU SKYRME'A

1. Wstęp

Powstanie tzw. modeli σ było wyrazem podejścia fenomenologicznego do teorii silnych oddziaływań. Lagranżjan takich modeli mógł być zadany w formie

$$\mathcal{L}_1(x) = -\frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^+) \quad (1)$$

z więzem $UU^+ = 1$, powodującym nieliniowość w równaniach Eulera-Lagrange'a. Skończoność energii wymaga, aby $U(x) \rightarrow 1$ dla $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. Jeśli lagranżjan (1) poszerzyć o wyraz zawierający wyższe pochodne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(x) = & -\frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^+) + \\ & + \frac{1}{32e^2} \text{Tr} \{ [\partial_\mu UU^+, \partial^\mu UU^+]^2 \}, \end{aligned} \quad (2)$$

to model taki, zwany modelem Skyrme'a, posiada statyczne rozwiązania solitonowe w formie:

$$U = \exp [if(r)\hat{r} \cdot \vec{\sigma}], \quad f \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0 \quad (3)$$

Z uwagi na szereg ciekawych własności tych rozwiązań takich jak rozciągłość, silne oddziaływanie i ściśle zachowany ładunek topologiczny, model ten szczególnie dobrze nadaje się do opisu barionów, jak to już sugerował Skyrme [1]. Ostatnio daje się zauważyć nową falę zainteresowania tą formą opisu silnych oddziaływań, głównie dzięki pracom t'Hoofta [2, 3] i Wittena [4-6].

W artykule przedstawione zostały równania Einsteina opisujące sferycznie symetryczną i asymptotycznie płaską, a także jednorodną i izotropową czasoprzestrzeń wypełnioną „materią Skyrme'a”. W obliczeniach użyto konwencji takiej, jak w podręczniku Weinberga [7], w której tensor metryczny

ma sygnaturę $(- + + +)$; zgodnie z tą umową, g oznaczać będzie wyznacznik z tensora metrycznego wzięty ze znakiem przeciwnym: $g \equiv -\text{Det}(g_{\mu\nu})$.

2. Tensor energii-pędu

Całka działania materii opisanej lagranżjanem (2)

$$I_M \equiv \int d^4x \sqrt{g} (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \quad (4)$$

wariowana po tensorze metrycznym, określa tensor energii-pędu

$$\delta I_M = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (5)$$

Wariowanie pierwszego składnika w równaniu (4) daje

$$\begin{aligned} & \delta \left\{ -\int d^4x \sqrt{g} \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial_\nu U^+) g^{\mu\nu} \right\} = \\ & = -\frac{F_\pi^2}{16} \int d^4x \text{Tr}(\partial_\mu U \partial_\nu U^+) \left(-g^{\mu\nu} \frac{1}{2\sqrt{g}} g g_{\lambda\eta} \delta g^{\lambda\eta} + \sqrt{g} \delta g^{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Odpowiednia zamiana wskaźników i porównanie ze wzorem (5) prowadzi do zależności

$$T_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{F_\pi^2}{4} \left(\mathcal{A}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{A}_{\lambda\eta} g^{\lambda\eta} \right) \quad (7)$$

w której przez $\mathcal{A}_{\mu\nu}$ oznaczono tu $\frac{1}{2} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial_\nu U^+)$. Dokonując podobnych przekształceń z drugim składnikiem

$$\delta \left\{ \int d^4x \sqrt{g} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\eta} \frac{1}{32e^2} \text{Tr}([\partial_\alpha U U^+, \partial_\beta U U^+] [\partial_\lambda U U^+, \partial_\eta U U^+]) \right\} \quad (8)$$

w którym przez $-8\mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\eta}$ oznaczmy ślad występujący pod całką, otrzymamy

$$T_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{e^2} \left(\mathcal{H}_{\alpha\mu\lambda\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\eta} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\eta} \right); \quad (9)$$

tak więc tensor energii-pędu materii Skyrme'a wynosi

$$T_{\mu\nu} = \frac{F_\pi^2}{4} \left(\mathcal{A}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{A}_{\lambda\eta} g^{\lambda\eta} \right) + \frac{1}{e^2} \left(\mathcal{H}_{\alpha\mu\lambda\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\eta} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\eta} \right). \quad (10)$$

Dalsze rachunki mające na celu wyliczenie poszczególnych składowych tensorów $\mathcal{A}_{\mu\nu}$ oraz $\mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\eta}$, prowadzone będą z użyciem Ansatzu (3) w którym $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ jest zespołem trzech macierzy Pauliego, a $\hat{r} \equiv (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ jest wersorem we współrzędnych sferycznych; zakładamy

też, że $f=f(r, t)$. Wykorzystując oczywiste zależności $r_i r_i=1$, $r_i r_{i,\mu}=0$ oraz własności macierzy Pauliego, otrzymamy

$$\mathcal{A}_{\mu\nu}=f_{,\mu}f_{,\nu}+r_{i,\mu}r_{i,\nu}\sin^2f \quad (11)$$

Składowe tego tensora można dla większej przejrzystości zapisać w postaci macierzowej

$$\mathcal{A}_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} (f_{,t})^2 & f_{,r}f_{,t} & 0 & 0 \\ f_{,t}f_{,r} & (f_{,r})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2\theta\sin^2f \end{pmatrix} \quad (12)$$

Tensor $\mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\eta}$ ma bardziej skomplikowaną postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\eta} = & \left\{ \sin^2f (r_{s,\alpha}f_{,\beta} - r_{s,\beta}f_{,\alpha}) - \epsilon_{iks} [\sin^2f r_{i,\alpha}r_{k,\beta} + \right. \\ & \left. + \sin f \cos f (r_{i,\alpha}r_{k,\beta} + r_{k,\beta}r_{i,\alpha})] \right\} \times \\ & \times \left\{ \sin^2f (r_{s,\lambda}f_{,\eta} - r_{s,\eta}f_{,\lambda}) - \epsilon_{prs} [\sin^2f r_{p,\lambda}r_{r,\eta} + \right. \\ & \left. + \sin f \cos f (r_{p,\lambda}r_{r,\eta} + r_{r,\eta}r_{p,\lambda})] \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Choć tensor $\mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\eta}$ nie wygląda w tej postaci zbyt prosto, to jednak posiada on pewne własności, które znacznie upraszczają rachunki. Jedną z nich jest własność symetrii względem przestawienia pierwszej i drugiej pary wskaźników oraz antysymetrii wewnątrz tych par

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\eta} = \mathcal{H}_{\lambda\eta\alpha\beta} = -\mathcal{H}_{\beta\alpha\lambda\eta} = -\mathcal{H}_{\alpha\beta\eta\lambda} \quad (14)$$

Dalszego uproszczenia można dokonać, jeżeli tylko zauważyć, że f i r_s są funkcjami różnych zbiorów współrzędnych. Dokładniejsze rachunki prowadzą do wniosku, że $\mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\eta}$ posiada tylko 7 niezależnych składowych:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{2020} &= \mathcal{H}_{0202} = -\mathcal{H}_{0220} = -\mathcal{H}_{2002} = (f_{,t})^2 \sin^2f \\ \mathcal{H}_{2120} &= \mathcal{H}_{2021} = \mathcal{H}_{1202} = \mathcal{H}_{0212} = -\mathcal{H}_{1220} = -\mathcal{H}_{2102} = -\mathcal{H}_{0221} = -\mathcal{H}_{2021} = f_{,r}f_{,t} \sin^2f \\ \mathcal{H}_{2121} &= \mathcal{H}_{1212} = -\mathcal{H}_{1221} = -\mathcal{H}_{2112} = (f_{,r})^2 \sin^2f \\ \mathcal{H}_{3030} &= \mathcal{H}_{0303} = -\mathcal{H}_{0330} = -\mathcal{H}_{3003} = (f_{,t})^2 \sin^2f \sin^2\theta \\ \mathcal{H}_{3130} &= \mathcal{H}_{3031} = \mathcal{H}_{1303} = \mathcal{H}_{0313} = -\mathcal{H}_{1330} = -\mathcal{H}_{3103} = -\mathcal{H}_{3013} = -\mathcal{H}_{0331} = \\ &= f_{,r}f_{,t} \sin^2f \sin^2\theta \\ \mathcal{H}_{3131} &= \mathcal{H}_{1313} = -\mathcal{H}_{1331} = -\mathcal{H}_{3113} = (f_{,r})^2 \sin^2f \sin^2\theta \\ \mathcal{H}_{3232} &= \mathcal{H}_{2323} = -\mathcal{H}_{2332} = -\mathcal{H}_{3223} = \sin^4f \sin^2\theta \end{aligned}$$

Pozostałe elementy równe są zeru.

3. Przypadek szczególny – przestrzeń o symetrii sferycznej.

Zbadajmy teraz rozwiązania o symetrii sferycznej, zadając metrykę w postaci

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (15)$$

w której funkcje v i λ zależą jedynie od r , a więc rozpatrywany przypadek będzie przypadkiem statycznym. Różniczkowanie po r dla większej przejrzystości oznaczmy w dalszej części znakiem '.

Tensor Ricciego określony wzorem.

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\eta\lambda}^{\lambda}, \quad (16)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left[\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right],$$

oraz tensor energii-pędu (10) mają dla tego przypadku następujące nie znikające tożsamościowo składowe:

$$\mathcal{R}_{00} = -e^{v-\lambda} \left(\frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} - \frac{v'\lambda'}{4} + \frac{v'}{r} \right),$$

$$\mathcal{R}_{11} = \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} - \frac{v'\lambda'}{4} + \frac{v'}{r}$$

$$\mathcal{R}_{22} = e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right],$$

$$\mathcal{R}_{33} = \mathcal{R}_{22} \sin^2 \theta.$$

$$\begin{aligned} T_{00} = \frac{F_{\pi}^2}{4} \left\{ \frac{(f_{,t})^2}{2} + \frac{(f_{,r})^2}{2} e^{v-\lambda} + \frac{\sin^2 f}{r^2} e^v \right\} + \\ + \frac{\sin^2 f}{e^2 r^2} \left\{ (f_{,t})^2 + (f_{,r})^2 e^{v-\lambda} + \frac{\sin^2 f}{2r^2} e^v \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{11} = \frac{F_{\pi}^2}{4} \left\{ \frac{(f_{,t})^2}{2} + \frac{(f_{,r})^2}{2} e^{v-\lambda} - \frac{\sin^2 f}{r^2} e^v \right\} e^{\lambda-v} + \\ + \frac{\sin^2 f}{e^2 r^2} \left\{ (f_{,t})^2 + (f_{,r})^2 e^{v-\lambda} - \frac{\sin^2 f}{2r^2} e^v \right\} e^{\lambda-v}, \end{aligned}$$

$$T_{22} = \frac{F_{\pi}^2}{4} \left\{ \frac{(f_{,t})^2}{2} - \frac{(f_{,r})^2}{2} e^{v-\lambda} \right\} r^2 e^{-v} + \frac{\sin^4 f}{2e^2 r^2},$$

$$T_{33} = T_{22} \sin^2 \theta,$$

$$T_{10} = T_{01} = \left\{ \frac{F_{\pi}^2}{4} + \frac{2\sin^2 f}{e^2 r^2} \right\} (f_{,t}) (f_{,r}).$$

Jak łatwo sprawdzić, równania Einsteina

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (17)$$



dla tensora energii-pędu danego równaniem (10), można zapisać w nieco innej – dogodniejszej formie

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = -8\pi G \left\{ \frac{F_\pi^2}{4} \mathcal{A}_{\mu\nu} + \frac{1}{e^2} \left(\mathcal{H}_{\alpha\mu\lambda\nu} g^{\alpha\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \mathcal{H}_{\alpha\beta\lambda\eta} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\eta} \right) \right\}. \quad (18)$$

W rozważanym teraz przypadku, równanie to, dla składowych (1,0) prowadzi do zależności

$$0 = f_{,r} f_{,t}, \quad (19)$$

co wskazuje na dwie możliwości $f=f(t)$ lub $f=f(r)$. Pierwsza z nich w połączeniu z warunkiem (3) daje tylko rozwiązanie trywialne $f=0$, wybierając zatem drugą widzimy, że statyczny przypadek sferycznie symetryczny („model gwiazdy”) będzie opisany przez układ trzech niezależnych równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{v' + \lambda'}{r} = 8\pi G \left\{ \frac{F_\pi^2}{4} (f_{,r})^2 + \frac{(f_{,r})^2 \sin^2 f}{e^2 r^2} \right\} \\ 2v'' + v'^2 - v'\lambda' + \frac{v'}{r} = 32\pi G \frac{1}{e^2} \left\{ \frac{(f_{,r})^2 \sin^2 f}{r^2} + \frac{\sin^4 f}{2r^4} e^\lambda \right\} \\ 1 - e^{-\lambda} \left[1 + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right] = 8\pi G \left\{ \frac{F_\pi^2}{4} \sin^2 f + \frac{\sin^4 f}{2e^2 r^2} e^\lambda \right\} \end{cases} \quad (20)$$

Układ ten prawdopodobnie nie jest całkowalny analitycznie. Spróbujmy jednak znaleźć rozwiązania w nieskończoności wykorzystując oczywiste warunki brzegowe $v, \lambda, f \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. Istnienie takich rozwiązań jest warunkiem koniecznym na to, by model Skyrme'a dopuszczał rozwiązania o skończonej masie. Podstawiając asymptotyczne rozwinięcia funkcji v, λ, f w postaci szeregów uogólnionych

$$r^{\alpha+1} \left(\frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \frac{A_3}{r^3} + \dots \right) \quad (21)$$

ze współczynnikami $(\alpha, A_1, A_2, \dots)$, $(\beta, B_1, B_2, \dots)$, $(\gamma, C_1, C_2, \dots)$, odpowiednio dla każdej z nich, otrzymamy dla funkcji v

$$v = B_1 r^{-1} - \frac{1}{2} B_1^2 r^{-2} + \dots \quad (22)$$

Postać ta jest zgodna ze wzorem definiującym masę Schwarzschilda gwiazdy

$$g_{00} = -e^v = -1 + \frac{2M}{r} + O(r^{-3}) \quad (23)$$

Korzystając z tego wzoru można wyeliminować współczynnik B_1 i wtedy

$$\begin{aligned} f &= A_1 r^{-2} + \left(\frac{97}{12} \frac{M^5}{\Pi G F_\pi^2 A_1} + \frac{19}{24} A_1 M \right) r^{-3} + 0(r^{-4}) \\ v &= -2Mr^{-1} - 2M^2 r^{-2} - \frac{3}{8} M^3 r^{-3} - 4M^4 r^{-4} - \left(8M^5 - \frac{2\Pi G F_\pi^2 A_1^2 M}{5} \right) r^{-5} + 0(r^{-6}) \\ \lambda &= -2Mr^{-1} + 2M^2 r^{-2} + \frac{3}{8} M^3 r^{-3} + \left(4M^4 - 2\Pi G F_\pi^2 A_1^2 \right) r^{-4} + \\ &\quad \left(\frac{74}{15} M^5 - \frac{5\Pi G F_\pi^2 A_1^2 M}{6} \right) r^{-5} + 0(r^{-6}) \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie A_1 jest pewną stałą. Asymptotyczna forma rozwiązań (24) może być więc argumentem za tym, że model Skyrme'a dopuszcza rozwiązania typu gwiazdy, choć oczywiście nie jest to dowód; dowodem byłoby scałkowanie układu równań (20), co nie wydaje się możliwe.

PODZIĘKOWANIA

Ideę przeprowadzenia powyższych obliczeń zawdzięczam dr. Pawłowi Mazurowi; za wiele cennych uwag i przeprowadzone rozmowy dziękuję też prof. dr. hab. Andrzejowi Staruszkiewiczowi z Uniwersytetu Jagiellońskiego.

BIBLIOGRAFIA

- [1] T.H.R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. A260 127 (1961)
- [2] G. t'Hooft, Nucl. Phys. B72 461 (1974)
- [3] G. t'Hooft, Nucl. Phys. B75 461 (1974)
- [4] E. Witten, Nucl. Phys. B223 422 (1983)
- [5] E. Witten, Nucl. Phys. B223 433 (1983)
- [6] E. Witten, Nucl. Phys. B160 57 (1979)
- [7] S. Weinberg „Gravitation and Cosmology”, J. Wiley & Sons, New York 1972

ARKADIUSZ MANDOWSKI

EINSTEIN EQUATIONS FOR THE SKYRME MODEL

SUMMARY

Einstein equations for the Skyrme model [1] are obtained; for the model the energy-momentum tensor is calculated. Asymptotic solution of the equations, in the case of spherically symmetric space are discussed. It is shown, that this solution corresponds to equation describing a „star” with finite mass.