PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 1/1978 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

System masowej obsługi z priorytetami

Henryk Fidytek

Wykazano, że dla systemu masowej obsługi z priorytetami istnieją prawdopodobieństwa stacjonarne $p_k = \lim\limits_{t\to\infty} P\{\xi(t) = k\}$, gdzie $\xi(t)$ proces markowski opisujący pracę systemu. Wyrażają się one wzorami

$$p_0 = \prod_{j=0}^{m} (1+\alpha_j^{(0)})^{-1}$$

$$p_k = \alpha_k^{(0)} \prod_{j=1}^{k} (1+\alpha_j^{(0)})^{-1} \quad k = 1, 2, \dots m$$

Do systemu masowej obsługi składającego się z $n = 1$ przyrządu wpływa m — niezależnych poissonowskich procesów zgłoszeń o intensywnościach odpowiednio równych λ $(i = 1, 2, \dots m)$. Długość czasu obsługi zgłoszeń i — tego procesu posiada rozkład wykładniczy z parametrem v $(i = 1, 2, \dots m)$ Pojawiające się w chwili t zgłoszenie i — tego procesu zostaje stracone, gdy w chwili t obsługiwane jest zgłoszenie j — tego procesu $(j \leqslant i)$ które przybyło do chwili t. Natomiast gdy w chwili t pojawia się zgłoszenie i — tego procesu. i w tym samym momencie jest obsługiwane zgłoszenie j — tego procesu $(i < j)$ to wówczas przerywa się obsługę zgłoszenia j — tego procesu które opuszcza urządzenie i zostaje stracone a zaczyna się obsługa zgłoszenia i — tego procesu Tak więc zgłoszenia i — tego procesu posiadają priorytet nad zgłoszeniami j — tego procesu $(i < j)$, (preemptive priority)
Praca tego systemu jest opisana przez markowski proces $\xi(t)$,
gdzie:

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 \text{ gdy w chwili } t \text{ przyrząd jest wolny} \\ k \text{ gdy w chwili } t \text{ przyrząd jest zajęty obsługą zgłoszenia } k\text{ — tego pro-} \\ \quad \text{cesu } (k = 1, 2, \dots m). \end{cases}$$

Niech $P_k(t) = P\{\xi(t) = k\}$, wówczas $P_k(t)$ spełniają następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} &P_0'(t) = -(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m)P_0(t)+V_1P_1(t)+\dots+V_mP_m(t) \\ (1)\quad &P_1'(t) = \lambda_1 P_0(t)-V_1P_1(t)+\lambda_1P_2(t)+\dots+\lambda_1P_m(t) \\ &P_k'(t) = \lambda_k P_0(t)-\left(V_k+\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\right)P_kt+\lambda_k\sum_{i=k+1}^{m}P_i(t) \end{aligned}$$

dla $k = 2, 3, \dots m-1$

$$P_m'(t) = \lambda_m P_0(t)-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{m-1}+V_m)P_m(t)$$

Oprócz tego dla dowolnego $t \geqslant 0$ mamy

$$\sum_{k=1}^{m} P_k(t) = 1. \tag{2}$$

Zauważmy, że układ (1) jest układem jednorodnym równań różniczkowych liniowych. Pierwiastki charakterystyczne macierzy tego układu wynoszą odpowiednio:

$$x_0 = 0$$

$$x_k = -\left(V_k + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \quad k = 1, 2, \ldots m$$

Niech

$$\alpha_j^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{V_1 + X_k} & \text{dla } j = 0, k = 0, 1, 2, \ldots m \\[2ex] V_j + X_k + \sum\limits_{i=1}^{j-1} \lambda_i & \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots m \\ k = 0, 1, 2, \ldots m. \end{array} \end{cases}$$

Wówczas rozwiązanie układu (1) jest postaci

$$P_j(t) = \sum_{k=0}^{m} C_j^{(k)} e^{X_k t} \quad \text{dla} \quad j = 0, 1, \ldots m$$

gdzie: $C_1^{(k)} = \alpha_1^{(k)}(1+\alpha_2^{(k)}) \ldots (1+\alpha_m^{(k)}) C_0^{(k)}$

$C_2^{(k)} = \alpha_2^{(k)}(1+\alpha_3^{(k)}) \ldots (1+\alpha_m^{(k)}) C_0^{(k)}$

. . . .

$C_m^{(k)} = \alpha_m^{(k)} C_0^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, \ldots m$

Ponieważ dla $k = 1, 2, \ldots m$

$$\lim_{t \to \infty} e^{X_k t} = 0 \quad \text{a więc}$$

istnieją granice $p_k = \lim\limits_{t \to \infty} P_k(t)$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots m$ i wynoszą one

$p_0 = \lim\limits_{t \to \infty} P_0(t) = C_0^{(0)}$

$p_1 = \lim\limits_{t \to \infty} P_1(t) = \alpha_1^{(0)}(1+\alpha_2^{(0)}) \ldots (1+\alpha_m^{(0)}) C_0^{(0)}$

. . . .

$p = \lim\limits_{t \to \infty} P_m(t) = \alpha_m^{(0)} C_m^{(0)}$

Stałą $C_0^{(0)}$ wyznaczamy z warunku (2) i otrzymujemy

$$\begin{aligned} p_0 &= \prod_{j=1}^{m} (1+\alpha_j^{(0)})^{-1} \\ p_k &= \alpha_k^{(0)} \prod_{j=1}^{k} (1+\alpha_j^{(0)})^{-1} \end{aligned} \tag{3}$$

Tym samym zostało wykazane.

Twierdzenie: Dla systemu masowej obsługi składającego się $n = 1$ przyrządu i m — strumieni zgłoszeń z priorytetami istnieją prawdopodobieństwa stacjonarne i wyrażają się one wzorami (3). Warto zwrócić uwagę że wzorów (3) wynika, że zgłoszenia k-tego procesu są obsługiwane tak jakby nie było zgłoszeń $k+1, \ldots m$ procesu. Wykazane twierdzenie jest uogólnieniem przypadku dla $m = 1$ rozważanego w [1] — str. 383 i przypadku dla $m = 2$ rozważanego w [2] — str. 92.

Zadanie powyższe możemy traktować jako zadanie uwzględniające uszkodzenia się przyrządu obsługującego. Rzeczywiście, wystarczy uważać strumień uszkodzeń jako strumień zgłoszeń 1-go procesu. Uszkodzenie urządzenia przerywa obsługę zgłoszeń pozostałych procesów. Możemy to zadanie również traktować jako model opisujący pracę np.: stanowiska naprawy samochodów z różnych zakładów o różnym priorytecie.

Literatura

1. W. Feller — *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Warszawa 1966.
2. B. W. Gnięndenko, I. N. Kowalenko — *Wstęp do teorii obsługi masowej*, Warszawa 1971.

Х. Фидытек

Содержание

Для системы массово обслуживания с приоритетами существуют стационарные вероятности $p_k = \lim_{t\to\infty} P\{\xi(t) = k\}$ где $\xi(t)$ марковский процесс, описывающий действие системы и имеет следующий вид:

$$P_0 = \prod_{j=1}^{m} \left(1+\alpha_j^{(0)}\right)^{-1}$$

$$P_k = \alpha_k^{(0)} \prod_{j=1}^{k} \left(1+\alpha_i^{(0)}\right)^{-1} \quad k = 1, \ldots m$$

H. Fidytek

Summary

The stationary probabilities $p_k = \lim_{t\to\infty} p\{\xi(t) = k\}$ occur for mass service system with priorities where $\xi(rt)$ is the Markov process describing the functioning of the where system. The probabilities are expresed by equations:

$$P_0 = \prod_{i=1}^{m} \left(1+\alpha_i^{(0)}\right)^{-1}$$

$$P_k = \alpha_k^{(0)} \prod_{i=1}^{k} \left(1+\alpha_i^{(0)}\right)^{-1} \quad k = 1, \ldots m$$