PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 1/1978 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

O pewnym uogólnieniu wzorów dla systemu obsługi masowej z oczekiwaniem

Maria Fidytek

Rozpatruje się system obsługi masowej ze skończoną ilością miejsc dla oczekiwania, do którego wpływa niejednorodny proces zgłoszeń o intensywności $\lambda(t)$. Również intensywność obsługi jest funkcją czasu t. Zostało wykazane następujące twierdzenie.
Twierdzenie: Jeżeli funkcje $\lambda(t)$ i $v(t)$ spełniają warunki (a) i (b), to istnieją granice (2), które wyrażają się wzorami (3).

1. Do systemu obsługi masowej składającego się z n jednakowych kanałów obsługi i m miejsc oczekiwania, wpływa niejednorodny w czasie poissonowski proces zgłoszeń o intensywności $\lambda(t)$. Intensywność obsługi $v(t)$ jest też funkcją czasu t. Jeżeli pojawiające się w chwili t zgłoszenie zastaje chociaż jeden wolny kanał obsługi lub chociaż jedno wolne miejsce oczekiwania to zostaje przyjęte do systemu. W przeciwnym wypadku następuje strata zgłoszenia. Zakłada się, że pojawienia zgłoszeń i ich obsługę można opisać niestacjonarnym procesem urodzin i śmierci.

Niech $P_k(t)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że w chwili t w systemie znajduje się k zgłoszeń ($k = 0, 1, \dots n+m$). Wówczas $P_k(t)$ spełniają następujący układ równań różniczkowych:

$$P_0'(t) = -\lambda(t)P_0(t)+v(t)P_1(t)$$

$$P_k'(t) = \lambda(t)P_{k-1}(t)-[\lambda(t)+kv(t)]P_k(t)+(k+1)v(t)P_{k+1}(t) \quad \text{gdzie } 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

$$(1) \quad P_k'(t) = \lambda(t)P_{k-1}(t)-[\lambda(t)+nv(t)]P_k(t)+nv(t)P_{k+1}(t) \quad \text{gdzie } n \leqslant k \leqslant n+m-1$$

$$P_{n+m}'(t) = \lambda(t)P_{n+m-1}(t)-nv(t)P_{n+m}(t)$$

Oprócz tego dla dowolnego $t \geqslant 0$

$$\sum_{k=0}^{n+m} P_k(t) = 1$$

Celem pracy jest wykazanie następującego twierdzenia:
Twierdzenie: Jeżeli funkcje $\lambda(t)$ i $v(t)$ spełniają warunki

$$\text{(a)} \quad \int_0^\infty v(t)dt = \infty$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda(t)}{v(t)} = \varrho$$

to istnieją granice

$$p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t) \tag{2}$$

i wyrażają się wzorami

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{\varrho^k}{k!} p_0 & 1 \leqslant k \leqslant n \\ \dfrac{\varrho^k}{n!\, n^{k-n}} p_0 & n \leqslant k \leqslant n+m-1 \\ \left[\sum_{i=0}^{n} \dfrac{\varrho^i}{i!} + \dfrac{\varrho^n}{n!} \sum_{s=1}^{m} \left(\dfrac{\varrho}{n}\right)^s \right]^{-1} & k = 0 \end{cases} \tag{3}$$

2. W celu wykazania powyższego twierdzenia do układu (1) wprowadźmy nowy czas τ dany wzorem

$$\tau = \int_0^t v(z)\,dz$$

Jeżeli $q_k(\tau) = P_k(t)$, to układ (1) przyjmie postać

$$\begin{aligned} q_0'(\tau) &= -\varrho(\tau)\, q_0(\tau) + q_1(\tau) \\ q_k'(\tau) &= \varrho(\tau) q_{k-1}(\tau) - [\varrho(\tau)+k]\, q_k(\tau) + (k+1) q_{k+1}(\tau) \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1 \\ q_k'(\tau) &= \varrho(\tau) q_{k-1}(\tau) - [\varrho(\tau)+n]\, q_k(\tau) + n q_{k+1}(\tau) \quad n \leqslant k \leqslant n+m-1 \\ q_{n+m}'(\tau) &= \varrho(\tau)\, q_{n+m-1}(\tau) - q_{n+m}(\tau) \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie: $\varrho(\tau) = \dfrac{\lambda(t)}{v(t)}$.

Ponieważ $\varrho(\tau) = \varrho + \varepsilon(\tau)$, gdzie $\lim\limits_{\tau\to\infty} \varepsilon(\tau) = 0$, to układ (4) może być zapisany w następujący sposób

$$\begin{aligned} q_0'(\tau) &= -\varrho q_0(\tau) + q_1(\tau) - \varepsilon(\tau)\, q_0(\tau) \\ q_k'(\tau) &= \varrho q_{k-1}(\tau) - [\varrho+k]\, q_k(\tau) + (k+1)\, q_{k+1}(\tau) + \varepsilon(\tau)[q_{k-1}(\tau) - q_k(\tau)] \\ & \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1 \\ q_k'(\tau) &= \varrho q_{k-1}(\tau) - [\varrho+n] q_k(\tau) + n q_{k+1}(\tau) + \varepsilon(\tau)[q_{k-1}(\tau) - q_k(\tau)] \\ & \qquad n \leqslant k \leqslant n+m-1 \\ q_{n+m}'(\tau) &= \varrho q_{n+m-1}(\tau) - n q_{n+m}(\tau) + \varepsilon(\tau) q_{n+m-1}(\tau) \end{aligned} \tag{5}$$

Układ (5) rozpatruje się jako niejednorodny z prawymi stronami $f_k(\tau)$ ($k = 0, 1 \ldots n+m$), gdzie

$$\begin{aligned} f_0(\tau) &= -\varepsilon(\tau)\, q_0(\tau) \\ f_k(\tau) &= \varepsilon(\tau)[q_{k-1}(\tau) - q_k(\tau)] \quad 1 \leqslant k \leqslant n+m-1 \\ f_{n+m}(\tau) &= \varepsilon(\tau) q_{n+m-1}(\tau) \end{aligned}$$

Pierwiastki $r_1, r_2, \ldots r_{n+m}$ równania charakterystycznego układu (5) są rzeczywiste, ujemne i różne. Rozwiązanie szczególne układu (5) jest postaci

$$\pi_k(\tau) = e^{r_k\tau} \int_0^\tau f_k(z) e^{-r_k z} dz$$

Wobec tego $q_k(\tau) = A_k(\tau) + \pi_k(\tau)$ $(k = 0, 1, \ldots n+m)$ gdzie $A_k(\tau)$ jest rozwiązaniem jednorodnego układu otrzymanego z układu (5).

Przedstawmy $\pi_k(\tau)$ w postaci

$$\pi_k(\tau) = \frac{\int_0^\tau f_k(z) e^{-r_k z} dz}{e^{-r_k\tau}}.$$

Dla wyznaczenia granicy $\pi_k(\tau)$ przy $\tau \to \infty$ stosuje się regułę de l'Hôspitala.

$$\lim_{\tau\to\infty} \pi_k(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{f_k(\tau) e^{-r_k\tau}}{-r_k e^{-r_k\tau}} = 0.$$

Wiadomo, że

$$A_k = \lim_{\tau\to\infty} A_k(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\varrho^k}{k!} A_0 & 1 \leqslant k \leqslant n \\[2ex] \dfrac{\varrho^k}{n!\, n^{k-n}} A_0 & n \leqslant k \leqslant n+m \\[2ex] \left[\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\varrho^i}{i!} + \dfrac{\varrho^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\dfrac{\varrho}{n}\right) s\right]^{-1} & k = 0 \end{cases}$$

a zatem

$$p_k = \lim_{t} P_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\varrho^k}{k!} p_0 & 1 \leqslant k \leqslant n \\[2ex] \dfrac{\varrho^k}{n!\, n^{k-n}} p_0 & n \leqslant k \leqslant n+m \\[2ex] \left[\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\varrho^i}{i!} + \dfrac{\varrho^n}{n!} \sum\limits_{s=1}^{m} \left(\dfrac{\varrho}{n}\right) s\right]^{-1} & k = 0 \end{cases}$$

tym samym twierdzenie zostało wykazane.

Powyższe twierdzenie może być uogólnione na szereg podobnych przypadków dla systemów masowej obsługi. W szczególności, będzie słuszne dla dowolnego systemu równań różniczkowych, w których macierz współczynników jest taka, że pierwiastki równania charakterystycznego będą posiadały różne, ujemne części rzeczywiste.

Wykazane twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia rozpatrywanego w [3]. Wystarczy przyjąć $m = 0$.

W przypadku $\lambda(t) = \lambda$, $v(t) = v$, otrzymuje się klasyczne wzory dla systemu obsługi masowej np. w [1] i [2].

Literatura

1. B. W. Gniedenko, J. N. Kowalenko — *Wstęp do teorii obsługi masowej*, Warszawa 1971.
2. B. Z. Beneš — *Matematičeskie osnovy telefonnych soobščenij*, Moskwa 1968.
3. D. B. Gnedenko — *Ob odnom obobščenii formul Erlanga*, Applicationes Mathematicae XII, 3 1971.

М. Фидитек

Об одном обобщении формул для системы массового обслуживания с очередью

Содержание

В работе рассматривается систему массового обслуживания с ограниченой очередью, на которою поступает неоднородный процесс требований с интенсивностью $\lambda(\tau)$ также интенсивность $v(\tau)$ обслуживания является функцей τ. Доказано теорему. Теорема: Если функции $\lambda(\tau)$ и $v(\tau)$ выполняют условия (a) и (b), то существуют пределя (2) выражающиеся формулами (3).

M. Fidytek

On Certain Generalization of Formulas for Mass Service System with Queuing

Summary

A mass service system with n- channels and m- queuing places, into which flows signalling proces of $\lambda(t)$ intensity in time, is discussed in this paper. Also service intensity $v(t)$ in each channel is a function of time t.

The following theorem has been prooved n this work. Theorem: If the functions $\lambda(t)$ and $v(t)$ satisfy conditiones (a) and (b), then there exist boundaries (2) which can be calculated form formula (3).