PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 2/1979 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

Albina SŁOMSKA

Modele metodologiczne w nauczaniu matematyki

Streszczenie

Współczesne tendencje występujące w nauczaniu matematyki polegają na przekazywaniu wiedzy matematycznej z pomocą modeli metodologicznych. Proponowane przedstawienie modelu metodologicznego uwzględnia tak jego funkcjonowanie wewnętrzne i zewnętrzne, jak również hierarchię modeli metodologicznych. Takie przedstawienie modeli metodologicznych stwarza warunki do zwiększenia efektywności badań nad korelacją nauczania matematyki i innych przedmiotów.

Modernizacja struktury dydaktycznej procesu nauczania matematyki stała się obecnie jedną z najbardziej aktualnych potrzeb szkolnictwa a zarazem istotnym problemem dydaktyki matematyki. W obliczu dynamicznego rozwoju nauk matematycznych, w obliczu szybkiego wzrostu wiedzy matematycznej i ekspansji jej zastosowań, w obliczu konieczności zwiększania ilości przekazywanej informacji o treści matematycznej dotychczasowa struktura dydaktyczna procesu nauczania tego przedmiotu przeistacza się powoli w czynnik zacofania. Świadczą o tym trudności, z którymi borykają się autorzy programów nauczania matematyki przy doborze treści programowych na wszystkich szczeblach edukacji. Dylematowi: „umieścić w programie — nie umieścić", wziętemu w odniesieniu niemalże do każdego tematu, nawet po wielokrotnych zastanowieniach, konfrontacjach i wyważaniach celem uzyskania optymalnego w obecnych warunkach wariantu programu, towarzyszy często brak jednomyślności.

Za koniecznością modernizacji struktury dydaktycznej procesu nauczania matematyki przemawiają także trudności związane z dysponowaniem czasem, przeznaczonym na realizację poszczególnych tematów. Stwierdza się jednogłośnie, że czasu jest za mało, aby uczeń o przeciętnych zdolnościach — a takich jest najwięcej — mógł opanować materiał w wymaganym zakresie i w czasie, przeznaczonym na nauczanie tego materiału. Propozycje, mające na celu złagodzenie wspomnianych trudności, są różnorakie, a będąc uzasadniane odmiennie, w szczególności z różnych stanowisk — aczkolwiek rzeczowo — implikują sprzeczności. Jednak łatwo jest zauważyć, że nawet przy trafnym doborze treści programowych samo tylko zwiększanie ilości godzin, przeznaczonych na nauczanie-uczenie się matematyki — nawet znaczne — nie pomniejszy trudności, bowiem dynamika rozwoju nauk matematycznych wciąż wykazuje tendencję wzrastającą.

Ponieważ proces dydaktyczny nie może pozostawać w tyle za aktualnym stanem wiedzy matematycznej, potrzebne jest, oprócz dostatecznie często przeprowadzanych konfrontacji z aktualnym stanem wiedzy matematycznej i ustawicznego synchronizowania tego procesu z osiągnięciami nauki, także objęcie procesem dydaktycznym nowych odkryć matematycznych. Wobec takich potrzeb pomocniczymi będą badania naukowe, zmierzające do znalezienia warunków zapewniających optymalizację procesu kształcenia w zakresie matematyki i zwiększanie efektywności tego procesu. Jedna z płaszczyzn tych badań wiąże się z poszukiwaniem coraz skuteczniejszych metod nauczania-uczenia się matematyki, umożliwiających zarazem wprowadzenie ewentualnych zmian jakościowych do procesu kształcenia, umożliwiających przekazywanie treści matematycznych w sposób nie tylko zgodny z zasadami naukowości i nowoczesności, lecz także sprzyjający zwiększaniu komunikatywności przekazu i kondensowaniu gromadzących się nowych informacji z jednoczesnym zabezpieczeniem realizacji celu głównego nauczania matematyki — kształcenia poprawnego myślenia.

Poprawne myślenie matematyczne ma pewne specyficzne cechy, z których przede wszystkim można wymienić trzy następujące: 1) abstrahowanie od konkretów, 2) posługiwanie się wyrażeniami o ostrym, dokładnie określonym znaczeniu, 3) wewnętrzna spójność rozumowań.

Pierwsza z wymienionych cech jest oczywistą konsekwencją tego, że przedmioty matematyczne są z reguły przedmiotami abstrakcyjnymi, druga jest warunkiem koniecznym komunikatywności jej języka, trzecia ma bezpośredni związek z metodą matematyczną badania rzeczywistości obiektywnej.

Zauważmy, że myśleć matematycznie można nie tylko wtedy, gdy ktoś zawodowo uprawiając matematykę, buduje na przykład abstrakcyjną teorię matematyczną, lecz także przy rozwiązywaniu rozmaitych konkretnych zadań z zakresu nauk tak przyrodniczych, jak i humanistycznych i w wielu różnych zgoła życiowych sytuacjach. I nie jest to przypadek, że obecnie, w dobie rewolucji technicznej, obserwujemy wciąż wzrastającą tendencję do matematyzacji wszystkich gałęzi nauki. Zjawisko to jest owocem nagromadzenia przez nauki szczegółowe tak znacznych zasobów wiadomości konkretnych, że opanowanie wiedzy, wypracowanej przez ludzkość w ciągu jej wielowiekowej historii, wymaga już stosowania metod innych niż te, którymi posługuje się dana nauka szczegółowa. Metodami, z których pomocą można przeprowadzić analizę i syntezę uzyskanej obszernej wiedzy, są metody matematyczne.

Chociaż metody matematyczne były stosowane w badaniach od zarania dziejów ludzkości, to były one stosowane najczęściej żywiołowo, praktyka zaś była głównym sprawdzianem ich słuszności i poprawności. Obecnie żywiołowe stosowanie metod matematycznych już nie wystarcza, a umiejętność myślenia matematycznego potrzebna jest nie tylko specjalistom różnych dziedzin naukowych, lecz także każdemu twórczo pracującemu członkowi społeczeństwa.

Celem podniesienia ogólnej kultury matematycznej całego społeczeństwa należy szukać takich metod przekazywania niezbędnej wiedzy matematycznej, aby bez zanurzania się w przytłaczającą ilość szczegółów bardzo specjalistycznych rozważań towarzyszących, wymagających z reguły uprzedniego opanowania znacznej i nieelementarnej wiedzy pomocniczej, skrócić drogę do myślenia matematycznego. Szkolnictwo powszechne musi przy tym mieć na uwadze ogół uczących się celem podniesienia kultury matematycznej całego społeczeństwa. Realizacja tego zadania-celu wymaga stosowania niekonwencjonalnych metod nauczania-uczenia się matematyki, zwłaszcza wobec zjawiska powiększania się zasobów wiedzy, którego skutkiem ubocznym jest przeładowywanie programów treściami szczegółowymi, czego wynikiem nieuniknionym jest spłycanie tych treści. Okoliczność ta nie przyczynia się do kształcenia myślenia matematycznego, wręcz przeciwnie, utrudnia ukazywanie istoty metody matematycznej, więc wtórnie niejako sprzyja zanikowi zainteresowania matematyką, bowiem uzyskane wiadomości matematyczne często przy tym nabierają charakteru encyklopedycznych, sukces zaś na polu matematycznym uzależnia się w dużej mierze od posiadanej przez ucznia pamięci mechanicznej. Nowych możliwości przekazywania informacji o treści matematycznej należy szukać w postępie dydaktycznym, w związku z czym zwracają na siebie uwagę modele metodologiczne w nauczaniu matematyki.

Analiza naukowa ogólnego pojęcia modelu metodologicznego staje się bardzo ważną dla dalszego przedstawienia problemu modelowania w nauczaniu matematyki.

Modelami metodologicznymi w uprawianiu nauki i w nauczaniu nazywają się te wszystkie przedmioty, które są konstruowane w celu uproszczonego przedstawienia problemu, z pominięciem szczegółów uznanych dla zagadnienia modelowanego za nieistotne, zarazem w celu zwiększenia szans rozwiązywania tego problemu. Modele metodologiczne mogą być różnorodne, tak pod względem ich roli w procesie poznania, jak i pod względem sposobu ich realizacji i ich funkcjonowania, lecz wszystkie je łączy wspólna cecha a mianowicie: na podstawie badań własności modelu wnioskuje się o własnościach zupełnie innego przedmiotu. Jednakże tak ogólna charakterystyka, unifikując pojęcie modelu, nie odróżnia modeli metodologicznych od innych przedmiotów matematycznych (od liczby, układu równań, figury geometrycznej itp.), dlatego konstruowanie modeli metodologicznych powinno opierać się nie tylko na analizie pojęć i relacji, lecz na wykrywaniu głębokich podobieństw pomiędzy układami elementów wiedzy matematycznej, co wymaga uprzedniej jej strukturyzacji.

Strukturą matematyki jako przedmiotu nauczania nazywa się określony układ elementów-wyróżnionych treści matematycznych (przede wszystkim praw i pojęć), powiązanych ze sobą pewnymi stosunkami, stanowiącymi o jego całościowym charakterze. Jest to struktura dydaktyczna, będąca agregatem[1)], której jednakże nie można poprawnie zbudować bez uwzględnienia struktury wykładanej teorii matematycznej, różniącej się zasadniczo od struktury dydaktycznej matematyki jako przedmiotu nauczania.

Struktura teorii matematycznej wzięta w postaci abstrakcyjnej, formalnologicznej buduje się współcześnie w oparciu o teorię mnogości, operującej pojęciem zbioru w sensie dystrybutywnym[2], wychodząc od formalizacji języka tej teorii. Można wtedy wyróżniać struktury algebraiczne, porządkowe, topologiczne a także struktury bogatsze, otrzymane w szczególności przez krzyżowanie struktur podstawowych. Z pomocą różnych funkcji interpretacji można otrzymywać różne modele semantyczne tej samej struktury. Będą to wszakże modele języka pewnego systemu sformalizowanego, więc zasięg takiego modelu będzie ograniczony ramami systemu sformalizowanego. Do koncentracji wiadomości matematycznych na tym etapie mogą przyczyniać się modele izomorficzne. Jednakże ze względu na najdalej posunięty formalizm modele semantyczne w szkole powszechnej nie mogą być wykorzystywane, mimo iż są to modele najbardziej zaawansowane metodologicznie.

Konkretyzację abstrakcyjnej struktury, prowadzącą do modeli semantycznych, można uznać za krok pierwszy na drodze do konkretyzacji wybranej teorii. Dalszym krokiem byłoby potraktowanie otrzymanego wcześniej modelu semantycznego jako zbioru założeń upraszczających, tj. jako modelu metodologicznego. Punktem wyjścia do strukturyzacji dalszej nie będzie już język formalny, konkretyzacja dalsza będzie wymagała strukturyzacji nieformalnej wiedzy o przedmiocie. Wtedy strukturyzacja będzie polegała na wyróżnieniu treści podstawowych, treści pochodnych oraz stosunków koordynacji, subordynacji a także na wyjaśnieniu związków logicznych między wyróżnionymi elementami. Jest to etap analizy fragmentu wiedzy, dla którego chcemy skonstruować model metodologiczny, etap łączący cechy charakterystyczne metody analitycznej Kartezjusza i ,,nici Ariadny'' Leibniza.

Oznaczymy symbolem S_{ti} strukturę pojęciową, realizowaną w czasie ti w ramach określonej jednostki metodycznej; symbolem S_{mi} — strukturę logiczną, realizowaną w ramach tejże jednostki metodycznej; S_z — strukturę zasad uniwersalnych; S_1 — strukturę operacji logicznych. Wtedy stukturę ogólną, otrzymaną w wyniku strukturyzacji wstępnej, możemy zapisać następująco:

$$S = (S_{t1} \wedge S_{m1} \vee S_{t2} \wedge S_{m2} \vee \ldots \vee S_{tn} \wedge S_{mn}) \wedge S_z \wedge S_1,$$

Struktura S_z pozwala odpowiednio interpretować strukturę cząstkową S_{ti}, zaś S_1 pełni rolę operacyjną względem S_{ti}. Zauważmy, że w zapisie tym znajduje swój wyraz postulat dydaktyki: dobór i układ treści nauczania zgodnie z zakładanymi stosunkami logicznymi wymaga doboru materiału faktograficznego w postaci pewnych całości—zbiorów w sensie kolektywnym obiektów[3]. Wyjaśnia się przy tym rola poszczególnych elementów wiedzy, ich udział w jednostce metodycznej, czyli funkcjonowanie wewnętrzne konstruowanego modelu.

Otrzymany w ten sposób układ przedmiotów matematycznych nie może pozostać ,,sam dla siebie'', należy pokazać, iż jest to całościowy układ otwarty. Jest to następny etap konstruowania modelu, etap syntezy wiedzy matematycznej oparty na zasadzie nieaddytywności, tj. na zasadzie niesprowadzalności własności układu jako całości do własności jego części składowych.

Oznaczymy symbolem C_1 operator ekstrapolacji struktury pojęciowej; C_z — operator ekstrapolacji zasad uniwersalnych, C_t — operator ekstrapolacji praw transformacji logiki formalnej. Wówczas zewnętrzne funkcjonowanie konstruowanego modelu wyrazimy następująco:

$$C_1 C_z C_t (S).$$

Dalsze korzystanie z modelu skonstruowanego wymaga zbadania jego własności i ukazania analogii pomiędzy modelem a obiektem, przy czym informacje o własnościach modelu, uzyskane w wyniku badania modelu, są przenoszone na obiekt badany przez analogię.

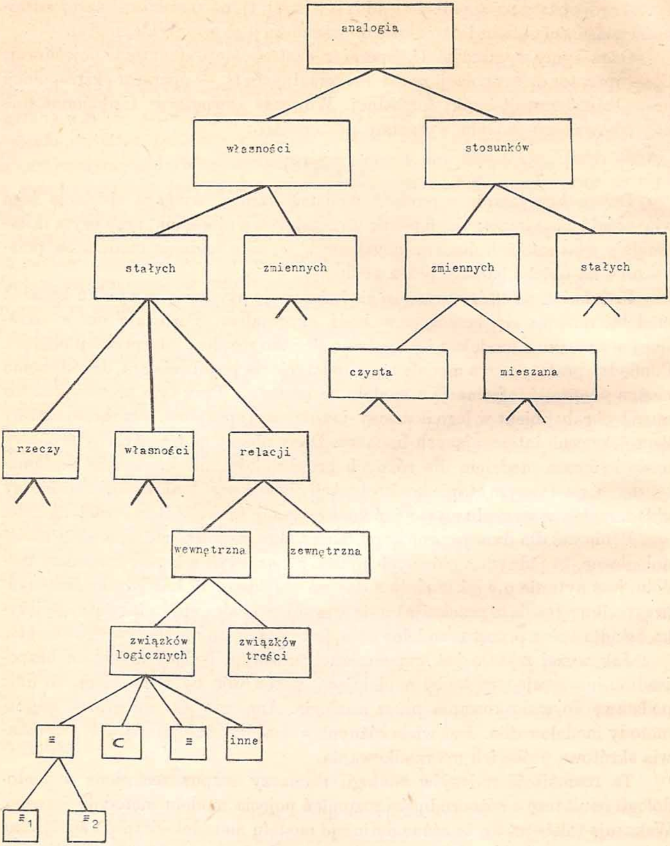
Przedmiot, na który przenosi się informację uzyskaną w wyniku badania modelu, nazywa się prototypem bądź oryginałem. Pozostaje on w określonym związku z modelem i rozpatruje się jako rezultat interpretacji modelu. Pomiędzy prototypem a modelem zachodzi relacja podobieństwa, dzięki czemu można przenosić informację z modelu na prototyp. Przy tym prototypem nie musi być cały obiekt w jego ilościowo-jakościowej specyfice, lecz raczej obrany kompleks cech interesujących badacza. Dany obiekt matematyczny-prototyp może być sam modelem dla różnych przedmiotów, nie koniecznie matematycznych, na dalszym etapie konkretyzacji, można więc budować hierarchiczny układ modeli ze względu na stopień konkretyzacji funkcji interpretacji modelu.

Ponieważ dla danego prototypu można skonstruować różne modele metodologiczne, to jednym z głównych pytań, związanych z konstruowaniem modelu, jest pytanie o więź modelu z danym obiektem. W każdym konkretnym przypadku pytanie to przekształca się w problem znalezienia adekwatnego języka tak dla opisu procesu modelowania, jak i dla opisu modelowanego obiektu.

Jak wyżej zostało już wspomniane, prototyp, będący obiektem bezpośrednio interesującym osobę modelującą, porównuje się z modelem, co daje podstawę do wnioskowania przez analogię. Analogia jest integralną częścią metody modelowania. Jest wiele różnych rodzajów analogii Rys. 1 przedstawia skrótową próbę ich uporządkowania.

Ta rozmaitość rodzajów analogii tłumaczy rozpowszechnioną w metodologii nauk tezę o różnorodności rozumień pojęcia modelu metodologicznego. Wskazuje także na to, że różne definicje modelu metodologicznego spotykane w literaturze, różniąc się w szczegółach, mają tę wspomnianą wyżej cechę wspólną, że informację uzyskaną w wyniku badania modelu przenosi się na prototyp. Ta cecha stanowi podstawę do unifikacji pojęcia modelu metodologicznego z jednej strony, z drugiej zaś — do wyodrębniania różnych typów logicznych modeli metodologicznych.

Aby można było określić typ logiczny modelu metodologicznego, należy uprzednio zbadać własności tego modelu. Biorąc pod uwagę modele metodologiczne najczęściej spotykane w nauczaniu matematyki w szkole, wymienię tylko niektóre z ważniejszych cech.



Rys. 1

1. Model jest modelem swobodnym wtedy, gdy istnieje możliwość przenoszenia na prototyp dowolnej informacji uzyskanej przy pomocy modelu. Jeżeli tak nie jest, model nazywa się związanym.

2. Model jest modelem relatywnym wtedy, gdy istotną cechą charakterystyczną stosunku zachodzącego pomiędzy modelem a prototypem jest izomorfizm. Jeżeli tak nie jest, model nazywamy nierelatywnym.

3. Model jest modelem atrybutywnym wtedy, gdy posiada on cechy wspólne z prototypem. Jeżeli tak nie jest model nazywa się nieatrybutywnym.

Ze względu na posiadanie bądź nieposiadanie wymienionych cech otrzymamy sześć różnych typów logicznych modeli metodologicznych (zauważmy, że nie wszystkie zestawy są możliwe). Widzimy, (patrz rys. 1), że modele swobodne są oparte na analogii zmiennych (własności albo stosunków); integralną częścią modeli relatywnych jest analogia stosunków, zaś modeli atrybutywnych — analogia własności. Rozpatrzmy przykłady.

Przykład 1. Układ nierówności

$$\begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2 &\leqslant c_1 \\ b_1x_1+b_2x_2 &\leqslant c_2 \\ x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

może być ukazany w nauczaniu matematyki jako model algebraiczny, dla którego prototypem jest następujący stan rzeczy, zaistniały przy budowie bloków mieszkalnych.

Z elementów rodzaju A i elementów rodzaju B buduje się bloki mieszkalne typów I i II. Dla wybudowania bloku typu I potrzeba a_1 elementów rodzaju A oraz b_1 elementów rodzaju B. Dla wybudowania bloku typu II potrzeba a_2 elementów rodzaju A oraz b_2 elementów rodzaju B. Buduje się x_1 bloków typu I oraz x_2 bloków typu II. Zapasy elementów, z których buduje się bloki są ograniczone; elementów typu A jest c_1, zaś elementów typu B jest c_2.

Przytoczona treść jest konkretyzacją danego modelu algebraicznego, zarazem jest jedną z możliwych interpretacji tego modelu. Łatwo zauważyć, że tak zinterpretowany model jest modelem swobodnym, relatywnym i atrybutywnym.

Zauważmy ponadto, że prototyp można było opisać przy pomocy tabeli.

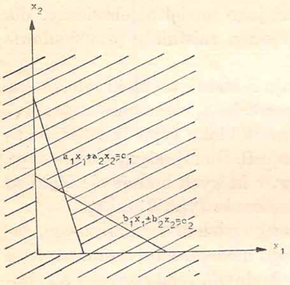
Typy bloków i ich ilość / Elementy i ich ilość		I	II
		x_1	x_2
A	c_1	a_1	a_2
B	c_2	b_1	b_2

Rys. 2

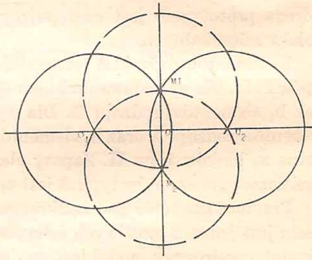
Inną interpretacją tegoż modelu jest następująca konkretyzacja. Przedsiębiorstwo wytwarza dwa typy produkcji P_1 i P_2 z surowców dwóch rodzajów. Zapas surowca pierwszego rodzaju wynosi c_1, drugiego $-c_2$. Normy zużycia surowców przy produkcji P_1 wynoszą: pierwszego — a_1, drugiego — a_2 na każdą jednostkę produkcyjną. Normy zużycia przy produkcji P_2 wynoszą: dla pierwszego rodzaju surowca b_1, dla drugiego — b_2 na każdą jednostkę produkcyjną. W rozważanym okresie czasu wytwarza się x_1 jednostek produkcji P_1 oraz x_2 jednostek produkcji P_2.

I przy tej interpretacji dany model jest modelem swobodnym, relatywnym i atrybutowym.

Z drugiej strony, dla obydwóch podanych konkretyzacji można znaleźć inny model, na przykład model geometryczny Rys. 3.



Rys. 3



Rys. 4

Drugi przykład modelu dla wielu konkretnych sytuacji matematycznych stanowi figura-wzorzec Rys. 4.

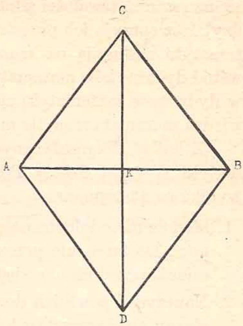
Proste O_1O_2 i M_1M_2 są osiami symetrii całej figury. Figura ta może być modelem dla wszystkich zadań, dla których rozwiązania niezbędna jest umiejętność posługiwania się pojęciami: 1) prostopadłej do danej prostej, przechodzącej przez dany punkt, nie należący do tej prostej; 2) prostopadłej do danej prostej, przechodzącej przez punkt, należący do tej prostej; 3) symetralnej odcinka; 4) dwusiecznej kąta, itp. Każde z takich zadań, podając jedną z możliwych interpretacji modelu jakim jest figura-wzorzec (Rys. 4), opisuje zarazem prototyp dla tego modelu. Zauważmy jednakże, że dla obiektów, opisanych w poszczególnych zadaniach, można wskazać także inny model, na przykład figurę wzorzec, przedstawioną na Rys 5.

gdzie CD jest dwusieczną kąta ACB a także kąta ADB, prosta CD zaś jest symetralną odcinka AB.

Z omówieniem własności powyższych figur, rozumianych jako modele metodologiczne, można związać pierwsze, podstawowe konstrukcje geometryczne.

Przykładami modeli metodologicznych w rachunku prawdopodobieństwa są schematy urnowe[4]. Przy interpretacji tych modeli z powodzeniem wykorzystuje się język grafów, w szczególności język tzw. drzew.

Występując w zadaniach bardziej złożonych, modele proste o charakterze podstawowym funkcjonują jako podmodele, jako całości-operatory, będące elementami modelu wyższego rzędu. Znajomość własności modeli podstawowych umożliwia dostrzeganie określonej struktury zadania złożonego, ułatwia tym samym zaprojektowanie logicznego ciągu wnioskowań, prowadzących do rozwiązania oraz wykonanie zadania. Koncentracja wiedzy matematycznej, osiągana z pomocą skonstruowanego modelu, polega na uchwyceniu cech istotnych wielu różnych sytuacji konkretnych, mianowicie cech takich, od których dostrzegania i interpretacji zależy w dużej mierze przebieg i skuteczność rozwiązywania problemu, wynikającego z tej sytuacji konkretnej. Natomiast elastyczność wiedzy przejawia się w umiejętności dokonywania różnych interpretacji tego samego modelu.



Rys. 5

Kształcenie myślenia matematycznego wymaga zatem takiego przekazu informacji o treści matematycznej, aby podczas przekazu uzasadnione zostały te walory przekazywanych wiadomości, które podnoszą je do rangi modeli albo podmodeli, z jednoczesnym ukazywaniem możliwości różnych interpretacji owych modeli.

Nie wystarczy przy tym rozwiązywanie ,,serii'' zadań tego samego typu, jak to się robi obecnie, bowiem potrzebny model kształtuje się wówczas żywiołowo, o ile w ogóle się kształtuje, często jednakże nawet nauczający nie zdaje sobie jasno sprawy z tego, co mianowicie ma się ukształtować w myśleniu uczącego się w wyniku przerobienia takiej ,,serii''. W sytuacji, kiedy nie wystarcza podręcznikowa ,,seria'' zadań i uczeń wciąż nie umie rozwiązywać dowolnych zadań tego typu, wydłuża ,,serie'', przeciążając tym samym bilans czasu ucznia i najczęściej nie osiąga pożądanego rezultatu. Co gorsza, przy tego rodzaju metodach zamiast myślenia matematycznego kształtuje się odruch mechanicznego a w skrajnych przypadkach bezmyślnego postępowania.

Obecnie stosowane i naukowo uzasadnione metody nauczania matematyki, kierujące myśleniem ucznia od konkretów do uogólnień, nie wypełniają wszakże luki pomiędzy konkretami a uogólnieniami (abstrakcjami). Luka ta, jeżeli wypełnia się, to na ogół żywiołowo, jeżeli zaś nie wypełnia się, to staje się barierą nie do przebycia w dalszej nauce matematyki. Metoda modelowania polegająca na świadomym kształtowaniu przez nauczyciela określonego modelu metodologicznego, uzupełniając metody stosowane współcześnie, może przyczynić się do podniesienia efektywności nauczania matematyki. Warto zauważyć, że metoda ta nie tylko nie stoi w sprzeczności z wypracowanymi przez dydaktykę zasadami nauczania (przede wszystkim z takimi zasadami jak zasada poglądowości, świadomego i aktywnego udziału uczniów w procesie uczenia się-nauczania, trwałości zdobytej wiedzy oraz operatywności posiadanej wiedzy), lecz sprzyja ich przestrzeganiu. Modele metodologiczne w nauczaniu matematyki zasługują na szczególną uwagę wobec szeroko rozpowszechnionej wśród dydaktyków matematyki opinii, iż obecnie można uważać za ustaloną w dydaktyce matematyki zasadę, że rozwija i kształci ucznia nie tyle sama wiedza matematyczna, ile metody i sposoby jej wykładania.

Z badań diagnostycznych, prowadzonych w Zakładzie Dydaktyki Matematyki Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie w latach 1977—78 wynika co następuje.

1. Modele metodologiczne odgrywają rolę decydującą w nauczaniu matematyki. Dostrzeganie przez ucznia modelu stanowi pierwszy krok do rozumienia przedmiotów abstrakcyjnych.
2. Nauczyciel powinien dostrzegać kształcony przez siebie model metodologiczny, znać wszystkie jego własności, eksponować model przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień. W przeciwnym przypadku kształcenie ma cechy żywiołowości i przypadkowości.
3. W nauczaniu matematyki funkcjonują modele metodologiczne różnych rzędów. Każdy obiekt matematyczny może występować w charakterze modelu dla innych obiektów matematycznych, bądź może być prototypem modeli wyższych rzędów.
4. Przy obecnie stosowanych metodach nauczania modele semantyczne nie funkcjonują w nauczaniu matematyki.
5. Z pomocą modeli metodologicznych można osiągnąć znaczną koncentrację wiedzy. Przyczynia się to do podnoszenia efektywności nauczania matematyki.
6. Niedostrzeganie hierarchii modeli metodologicznych powoduje, że często na lekcjach matematyki pomiędzy uczniem a nauczycielem zachodzi nieporozumienie, spowodowane odmienną interpretacją przedmiotu, który w danym momencie się rozpatruje. Nieporozumienia tego rodzaju przyczyniają się do niezrozumienia zagadnienia przez uczniów.
7. Nie tylko modele relatywne występują w nauczaniu matematyki i nie tylko one przyczyniają się do kształcenia myślenia matematycznego.
8. W modelowaniu, również w zakresie nauczania matematyki, proces wyprowadzania logicznych wniosków jest całkowicie oparty na teorii podobieństw.
9. Stosowanie metody modelowania przyczynia się do zwiększania komunikatywności języka matematycznego ucznia.
10. Stosowanie powszechne metody modelowania w nauczaniu matematyki wymagałoby pewnych modyfikacji tak programów nauczania matematyki, jak i metodyki nauczania tego przedmiotu.

11. Ze względu na ważną funkcję dydaktyczną modeli metodologicznych przyszły nauczyciel matematyki nie tylko powinien być wprowadzony podczas studiów w to zagadnienie, lecz także powinien próbować sam konstruować nowe modele metodologiczne.

A. SŁOMSKA

Summary

Modern tendencies in teaching mathematics consist of giving mathematical knowledge with the help of methodological models. The proposed showing of methodological model takes into consideration its inner and external functioning and also the hierarchy of methodological models. This way of showing methodological models creates situation for increasing effectiveness of investigations concerning correlation teaching mathematics and other subjects.

Odsyłacze

1) Agregatem nazywa się system elementów.
2) Zbiorami w sensie dystrybutywnym są zbiory spełniające aksjomat ekstensjonalności.
3) System obiektów.
4) Patrz L.T. Kubik, Prawdopodobieństwo a częstość, „Matematyka" 1/1979.