PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie

Nr 2/1979 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

Barbara PLATYNOWICZ

O pewnych zadaniach ekstremalnych w specjalnych klasach funkcji holomorficznych przy dodatkowych warunkach

Streszczenie

W pracy tej otrzymano obszar wartości funkcjonału zespolonego $F(p) = p(z)$ w ustalonym punkcie z koła $|z| < 1$ określonego na podklasie rodziny $C_p(\rho)$ tych wszystkich funkcji, które mają ustalone dwa początkowe spółczynniki. W pracy tej otrzymano też pewne dokładne oszacowania w tej podklasie, a także pewne dokładne oszacowania w klasach $\Sigma_p^*(\rho)$, $S_p^0(\rho)$, $S_p^*(\rho)$ przy dodatkowych warunkach, którymi są odpowiednio ustalone dwa spółczynniki.

§1. Wstęp.

Niech M będzie klasą wszystkich funkcji rzeczywistych niemalejących μ określonych na przedziale $[-\pi, \pi)$, spełniających warunek

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(t) = 1.$$

Niech p będzie ustaloną liczbą naturalną, a ρ ustaloną liczbą rzeczywistą z przedziału $[0, 1)$.

Symbolem C_p oznaczymy klasę wszystkich funkcji postaci

$$w = \dot{p}(z) = 1 + b_p z^p + b_{2p} z^{2p} + \ldots, \tag{1.1}$$

holomorficznych w kole jednostkowym

$$K = \{z : |z| < 1\},$$

spełniających warunek

$$\mathrm{Re}\,\dot{p}(z) \geqslant 0 \qquad \text{dla każdego } z \in K$$

Wiadomo (por. [9] str. 16), że jeżeli funkcja $\dot{p} \in C_p$, to istnieje jednoznacznie określona funkcja $\mu \in M$ na przedziale $[-\pi, \pi)$, taka że

$$\dot{p}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+z^p e^{-it}}{1-z^p e^{-it}}\, d\mu(t). \tag{1.2}$$

Niech $C_p(\rho)$ $(C_p(0) = C_p)$ oznacza podklasę rodziny C_p funkcji postaci

(1.3) $$w = p(z) = 1+(1-\rho)b_p z^p+(1-\rho)b_{2p}z^{2p}+\ldots,$$

spełniających warunek

(1.4) $$\operatorname{Re} p(z) \geqslant \rho \qquad \text{dla wszystkich } z \in K.$$

Symbolem $S_p^*(\rho)$ oznaczymy klasę wszystkich funkcji postaci

(1.5) $$w = f(z) = z+c_{p+1}z^{p+1}+c_{2p+1}z^{2p+1}+\ldots,$$

holomorficznych i jednolistnych w kole jednostkowym K, spełniających warunek Robertsona (por. [8] str. 277)

(1.6) $$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geqslant \rho \qquad \text{dla każdego } z \in K..$$

Niech symbol $S_p^0(\rho)$ oznacza klasę wszystkich funkcji holomorficznych i jednolistnych w kole K, postaci

(1.7) $$w = g^0(z) = z+c_{p+1}^0 z^{p+1}+c_{2p+1}^0 z^{2p+1}+\ldots,$$

spełniających warunek

(1.8) $$\operatorname{Re}\left[1+\frac{zg^{0''}(z)}{g^{0'}(z)}\right] \geqslant \rho \qquad \text{dla każdego } z \in K.$$

Symbolem $\sum_p^*(\rho)$ oznaczymy klasę wszystkich funkcji postaci

(1.9) $$w = \Phi(z) = \frac{1}{z}+a_{p-1}z^{p-1}+a_{2p-1}z^{2p-1}+\ldots,$$

holomorficznych i jednolistnych w zbiorze

$$D = \{z : 0 < |z| < 1\},$$

spełniających warunek

(1.10) $$\operatorname{Re}\left[-\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right] \geqslant \rho \qquad \text{dla wszystkich } z \in K.$$

Dla klas $C_p(\rho)$, $S_p^*(\rho)$, $S_p^0(\rho)$ przyjmujemy topologię zbieżności niemal jednostajnej w kole K, a dla klasy $\sum_p^*(\rho)$ topologię zbieżności niemal jednostajnej w zbiorze D. Nie trudno wykazać, że opisane rodziny są zwarte w sensie tak przyjętej topologii.

Niech ζ będzie ustalonym punktem koła K. Przyporządkujemy każdej funkcji $p \in C_p(\rho)$ punkt $F(p)$, gdzie

(1.11) $$F(p) = p(\zeta).$$

Zbiór wszystkich punktów $F(p)$, gdy p przebiega klasę $C_p(\rho)$, będziemy nazywać obszarem wartości funkcjonału zespolonego postaci (1.11) określonego na klasie $C_p(\rho)$. Funkcjami brzegowymi względem tego funkcjonału będziemy nazywać takie funkcje $p \in C_p(\rho)$, którym odpowiadają punkty $F(p)$ należące do brzegu obszaru wartości funkcjonału.

Obszary wartości pewnych zespolonych funkcjonałów przy pewnych dodatkowych warunkach badane były między innymi w pracach [1], [4], [6], [7], [5].

W pracy tej badany jest obszar wartości funkcjonału zespolonego postaci (1.11) określonego na klasie $C_p(\rho)$, przy dodatkowych warunkach, którymi są ustalone spółczynniki $(1-\rho)b_p$, $(1-\rho)b_{2p}$, funkcji postaci (1.3). Spółczynniki te oznaczymy symbolami b_1 i b_2. Symbolem $C_p(\rho, b_1, b_2)$ oznaczymy podklasę rodziny $C_p(\rho)$ tych wszystkich funkcji, które mają ustalone spółczynniki b_1 i b_2.

§2. Pewne zadania ekstremalne przy dodatkowych warunkach w klasach funkcji $C_p(\rho)$, $\sum_p^*(\rho)$, $S_p^0(\rho)$, $S_p^*(\rho)$.

Z twierdzenia Carathéodory'ego — Riesza (por. [2] str. 16) i z (1.2) wiadomo, że spółczynniki b_{kp}, $k = 1,2,\ldots$, funkcji $p \in C_p$ postaci (1.1) mają przedstawienie postaci

$$\frac{b_{kp}}{2} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} d\mu(t), \tag{2.1}$$

gdzie $\mu \in M$, $k = 1, 2, \ldots$. Wobec twierdzenia 3 (por. [3] str. 366) i wobec (2.1) współczynniki b_k, $k = 1, 2, \ldots$, funkcji p klasy $C_p(\rho)$ spełniają warunek

$$|b_k| \leqslant 2(1-\rho), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

Twierdzenie 2.1. Obszar wartości funkcjonału zespolonego postaci (1.11) w ustalonym punkcie $z \in K$, określonego na klasie $C_p(\rho, b_1, b_2)$, gdzie b_1, b_2 należą do zbioru określonego nierównościami

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad |b_1| < 2(1-\rho), \\ &\text{(ii)} \quad \left| b_2 - \frac{b_1^2}{2(1-\rho)} \right| < \left| \frac{|b_1|^2}{2(1-\rho)} - 2(1-\rho) \right| \end{aligned} \tag{2.3}$$

jest kołem domkniętym $\left| w - \frac{B+iC}{A} \right| \leqslant R$, gdzie

$$B = \operatorname{Re} E, \quad C = \operatorname{Im} E, \quad R = \sqrt{\frac{B^2+C^2}{A^2} - \frac{D}{A}},$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{2(1-\rho)} & \frac{b_2}{2(1-\rho)} & 1 \\ \frac{\bar{b}_1}{2(1-\rho)} & 1 & \frac{b_1}{2(1-\rho)} & \frac{1}{\bar{z}^p} \\ \frac{\bar{b}_2}{2(1-\rho)} & \frac{\bar{b}_1}{2(1-\rho)} & 1 & \frac{1}{\bar{z}^{2p}} \\ 1 & \frac{1}{z^p} & \frac{1}{z^{2p}} & 0 \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{2(1-\rho)} & \frac{b_2}{2(1-\rho)} & 1 \\ \frac{\bar{b}_1}{2(1-\rho)} & 1 & \frac{b_1}{2(1-\rho)} & \frac{1}{\bar{z}^p} \\ \frac{\bar{b}_2}{2(1-\rho)} & \frac{\bar{b}_1}{2(1-\rho)} & 1 & \frac{1}{\bar{z}^{2p}} \\ 0 & a & b & \frac{2\rho|z^p|^2-1-|z^p|^2}{1-|z^p|^2} \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

$$
(2.4)\qquad D=\begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{2(1-\rho)} & \frac{b_2}{2(1-\rho)} & 0 \\ \frac{\bar{b}_1}{2(1-\rho)} & 1 & \frac{b_1}{2(1-\rho)} & \bar{a} \\ \frac{\bar{b}_2}{2(1-\rho)} & \frac{\bar{b}_1}{2(1-\rho)} & 1 & \bar{b} \\ 0 & a & b & -\frac{4\rho(1-\rho)|z^p|^2}{1-|z^p|^2}-1 \end{vmatrix}
$$

$$
a=\frac{1}{z^p}+(1-2\rho)\frac{b_1}{2(1-\rho)},\ b=\frac{1}{z^{2p}}+\frac{b_1}{z^p}+(1-2\rho)\frac{b_2}{2(1-\rho)}.
$$

Obszar ten sprowadza się do punktu, gdy jest spełniony warunek (2.3) (i), oraz warunek

$$
(2.5)\qquad \left|b_2-\frac{b_1^2}{2(1-\rho)}\right|=\left|\frac{|b_1|^2}{2(1-\rho)}-2(1-\rho)\right|.
$$

Funkcjami brzegowymi względem tego funkcjonału są tylko funkcje postaci

$$
(2.6)\qquad p(z)=\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\left[(1-\rho)\frac{1+z^pe^{-it_k}}{1-z^pe^{-it_k}}+\rho\right],
$$

gdzie p, ρ są ustalonymi liczbami, $\rho\in[0,1)$, $p=1,2,\ldots$, oraz

$$
(2.7)\qquad \begin{gathered} 0\leqslant\lambda_k\leqslant 1,\ \sum_{k=1}^{3}\lambda_k=1,\qquad -\pi\leqslant t_1<t_2<t_3<\pi, \\ \frac{b_1}{2(1-\rho)}=\sum_{k=1}^{3}\lambda_k e^{-it_k},\qquad \frac{b_2}{2(1-\rho)}=\sum_{k=1}^{3}\lambda_k e^{-i2t_k}. \end{gathered}
$$

Dowód. W myśl (1.4) każda funkcja $p\in C_p(\rho)$ spełnia warunek $p(z)=(1-\rho)\dot{p}(z)+\rho$, gdzie $\dot{p}\in C_p$, $z\in K$.
Stąd wzór (1.2) dla klasy $C_p(\rho)$ przyjmuje postać

$$
p(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\left[(1-\rho)\frac{1+z^pe^{-it}}{1-z^pe^{-it}}+\rho\right]d\mu(t),\qquad \mu\in M.
$$

Zatem obszar wartości rozważanego funkcjonału jest zbiorem wszystkich punktów w postaci

$$
(2.8)\qquad w=\int_{-\pi}^{\pi}\left[(1-\rho)\frac{1+z^pe^{-it}}{1-z^pe^{-it}}+\rho\right]d\mu(t),\qquad \mu\in M,
$$

przy dodatkowych warunkach

$$
(2.9)\qquad \frac{b_k}{2(1-\rho)}=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}d\mu(t),\quad |b_k|\leqslant 2(1-\rho),\ k=1,2,\qquad \mu\in M.
$$

Zbiór ten oznaczymy symbolem $G(b_1, b_2)$. Z twierdzeń In i 9.6 (por. [2] str. 25 i 79) wynika, że $G(b_1, b_2)$ jest zbiorem ograniczonym, domkniętym i wypukłym oraz, że $w \in G(b_1, b_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego układu liczb zespolonych postaci $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3$, dla którego przy każdym $t \in [-\pi, \pi)$ spełniona jest nierówność

$$\begin{gathered}\mathfrak{L}_0+\bar{\mathfrak{L}}_0+\mathfrak{L}_1 e^{-it}+\bar{\mathfrak{L}}_1 e^{it}+\mathfrak{L}_2 e^{-2it}+\bar{\mathfrak{L}}_2 e^{2it}+\\ \mathfrak{L}_3\left[(1-\rho)\frac{1+z^p e^{-it}}{1-z^p e^{-it}}+\rho\right]+\bar{\mathfrak{L}}_3\left[(1-\rho)\frac{1+\bar{z}^p e^{it}}{1-\bar{z}^p e^{it}}+\rho\right] \geqslant 0,\end{gathered} \tag{2.10}$$

spełniona jest zawsze nierówność

$$\begin{gathered}\mathfrak{L}_0+\bar{\mathfrak{L}}_0+\mathfrak{L}_1\frac{b_1}{2(1-\rho)}+\bar{\mathfrak{L}}_1\frac{\bar{b}_1}{2(1-\rho)}+\mathfrak{L}_2\frac{b_2}{2(1-\rho)}+\\ \bar{\mathfrak{L}}_2\frac{\bar{b}_2}{2(1-\rho)}+\mathfrak{L}_3 w+\bar{\mathfrak{L}}_3\bar{w} \geqslant 0.\end{gathered} \tag{2.11}$$

W myśl twierdzenia Riesza-Fejéra (por. [2a] str. 14), istnieją liczby zespolone

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3, \tag{2.12}$$

takie, że lewa strona (2.10) jest równa

$$\left|\xi_0+\xi_1 e^{it}+\xi_2 e^{2it}+\xi_3\left[(1-\rho)\frac{1+z^p e^{-it}}{1-z^p e^{-it}}+\rho\right]\right|^2. \tag{2.13}$$

Pisząc (2.13) w postaci sumy wyrażeń zależnych od e^{ikt}, $k=0, \pm 1, \pm 2$, oraz $(1-\rho)\frac{1+\bar{z}^p e^{it}}{1-\bar{z}^p e^{it}}+\rho$, $(1-\rho)\frac{1+z^p e^{-it}}{1-z^p e^{-it}}+\rho$, które wobec (2.8), (2.9) są całkowalne w sensie Stieltjesa względem dowolnej funkcji $\mu \in M$ przy każdym $z \neq 0$ koła K, wnosimy, iż warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby z nierówności (2.10) wynikała zawsze nierówność (2.11) jest, aby dla dowolnych liczb zespolonych postaci (2.12) spełniona była nierówność

$$\begin{gathered}|\xi_0|^2+\xi_0\bar{\xi}_1\frac{b_1}{2(1-\rho)}+\xi_0\bar{\xi}_2\frac{b_2}{2(1-\rho)}+\xi_0\bar{\xi}_3\bar{w}+\xi_1\bar{\xi}_0\frac{\bar{b}_1}{2(1-\rho)}+\\ |\xi_1|^2+\xi_1\bar{\xi}_2\frac{b_1}{2(1-\rho)}+\xi_1\bar{\xi}_3\left[\frac{\bar{w}}{\bar{z}^p}-\bar{a}\right]+\xi_2\bar{\xi}_0\frac{\bar{b}_2}{2(1-\rho)}+\\ \xi_2\bar{\xi}_1\frac{\bar{b}_1}{2(1-\rho)}+|\xi_2|^2+\xi_2\bar{\xi}_3\left[\frac{\bar{w}}{\bar{z}^{2p}}-\bar{b}\right]+\xi_3\bar{\xi}_0 w+\xi_3\bar{\xi}_1\left[\frac{w}{z^p}-a\right]\\ +\xi_3\bar{\xi}_2\left[\frac{w}{z^{2p}}-b\right]+|\xi_3|^2\left[\frac{1+|z^p|^2-2\rho|z^p|^2}{1-|z^p|^2}(w+\bar{w})-\right.\\ \left.\frac{4\rho|(1-\rho)|z^p|^2}{1-|z^p|^2}-1\right] \geqslant 0,\end{gathered} \tag{2.14}$$

gdzie a, b są określone wzorami (2.4). Zatem, punkt w postaci (2.8) należy do zbioru $G(b_1, b_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb zespolonych postaci (2.12) spełniona jest nierówność (2.14). Wiadomo (por. [6] str. 106), że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby forma Hermite'a (2.14) była nieujemna, jest aby były nieujemne przy dowolnych liczbach zespolonych postaci (2.12) wszystkie główne minory macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \bar{A}_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ \bar{A}_{13} & \bar{A}_{23} & A_{33} & A_{34} \\ \bar{A}_{14} & \bar{A}_{24} & \bar{A}_{34} & A_{44} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1, \quad A_{12} = A_{23} = \frac{b_1}{2(1-\rho)}, \quad A_{13} = \frac{b_2}{2(1-\rho)},$$

$$A_{14} = \bar{w}, \quad A_{24} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}^p} - \bar{a}, \quad A_{34} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}^{2p}} - \bar{b},$$

$$A_{44} = \frac{1+|z^p|^2 - 2\rho|z^p|^2}{1-|z^p|^2}(w+\bar{w}) - \frac{4\rho(1-\rho)|z^p|^2}{1-|z^p|^2} - 1,$$

oraz a, b są określone wzorami (2.4).
Stąd otrzymujemy układ nierówności

$$\text{(2.15)} \qquad \begin{aligned} &\text{(i)} \quad |b_1| \leqslant 2(1-\rho), \\ &\text{(ii)} \quad \left| b_2 - \frac{b_1^2}{2(1-\rho)} \right| \leqslant \left| \frac{|b_1|^2}{2(1-\rho)} - 2(1-\rho) \right|, \\ &\text{(iii)} \quad \left| w - \frac{B+iC}{A} \right| \leqslant R, \end{aligned}$$

gdzie R, A, B, C są określone wzorami (2.4). Punkt w postaci (2.8) należy więc do zbioru $G(b_1, b_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest układ nierówności (2.15). Tym samym nierówności (2.15) określają obszar wartości rozważanego funkcjonału. Nie trudno wykazać (por. [2] str. 79, 83), że $G(b_1, b_2)$ jest kołem domkniętym $\left| w - \frac{B+iC}{A} \right| \leqslant R$, gdzie R, A, B, C są określone wzorami (2.4), gdy spełnione są warunki (2.3) (i), (ii). $G(b_1, b_2)$ sprowadza się do punktu, gdy spełniony jest warunek (2.3) (i) oraz warunek (2.5). Analogicznie dowodzi się, że nierówności (2.15) (i), (ii) określają zbiór G wartości, jakie przyjmuje spółczynnik b_2, gdy jest ustalony spółczynnik b_1. Nie trudno wykazać, że z twierdzenia Carathéodory'ego (por. [2] str. 12) i z twierdzenia 9.6 (por. [2] str. 79) wynika, że funkcjami brzegowymi względem tego funkcjonału są tylko funkcje postaci (2.6). Tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

Dla $p = 1$ i $\rho = 0$ wynik ten uzyskała w roku 1974 Slusarowa [6].

Z twierdzenia 2.1 otrzymujemy następujące wnioski:

Wniosek 2.1. Dla każdej funkcji $p \in C_p(\rho, b_1, b_2)$ i dla każdego ustalonego punktu $z \in K$, prawdziwe są następujące dokładne oszacowania

$$\frac{B}{A}-R \leqslant \operatorname{Re}p(z) \leqslant \frac{B}{A}+R,$$

$$\frac{C}{A}-R \leqslant \operatorname{Im}p(z) \leqslant \frac{C}{A}+R,$$

$$\sqrt{\frac{B^2+C^2}{A^2}}-R \leqslant |p(z)| \leqslant \sqrt{\frac{B^2+C^2}{A^2}}+R, \tag{2.16}$$

$$\operatorname{Arg}\frac{B+iC}{A}-\arcsin\frac{R}{\sqrt{\frac{B^2+C^2}{A^2}}} \leqslant \operatorname{Arg}p(z) \leqslant \operatorname{Arg}\frac{B+iC}{A}+\arcsin\frac{R}{\sqrt{\frac{B^2+C^2}{A^2}}},$$

gdzie R, A, B, C są określone wzorami (2.4), a gałęzie argumentów są tak wybrane, że dla $z = 0$ $\operatorname{Arg}1 = 0$. Równości są realizowane przez funkcje postaci (2.6) dla odpowiednio dobranych wartości parametrów t_k, λ_k, $k = 1, 2, 3$, spełniających warunki (2.7).

Wniosek ten otrzymujemy bezpośrednio z twierdzenia 2.1.

Niech symbol $\sum_p^*(\rho, a_1, a_2)$ oznacza podklasę rodziny $\sum_p^*(\rho)$ wszystkich funkcji postaci (1.9), które mają ustalone spółczynniki a_{p-1}, a_{2p-1}. Spółczynniki te oznaczymy symbolami a_1, a_2.

Wniosek 2.2. Dla każdej funkcji $\Phi \in \sum_p^*(\rho, a_1, a_2)$ i dla każdego ustalonego punktu $z \in D$ prawdziwe są następujące dokładne oszacowania:

$$\frac{1}{|z|}\exp\int_0^{|z|}\frac{1}{|z|}\left(1-\frac{B}{A}-R\right)d|z| \leqslant |\Phi(z)| \leqslant \frac{1}{|z|}\exp\int_0^{|z|}\frac{1}{|z|}\left(1-\frac{B}{A}+R\right)d|z|,$$

$$\int_0^{|z|}-\frac{1}{|z|}\left(\frac{C}{A}+R\right)d|z| \leqslant \operatorname{Arg}(z\Phi(z)) \leqslant \int_0^{|z|}-\frac{1}{|z|}\left(\frac{C}{A}-R\right)d|z|,$$

gdzie R, A, B, C są określone wzorami (2.4) dla

$$b_1 = -pa_1, \quad b_2 = -p(2a_2-a_1^2). \tag{2.17}$$

$\operatorname{Arg}(z\Phi(z))$ oznacza taką gałąź jednoznaczną, że dla $z = 0$ $\operatorname{Arg}1 = 0$. Całki rozumiemy jako krzywoliniowe, niezorientowane wzdłuż odcinka $\zeta = re^{iQ}$, gdzie $0 \leqslant r \leqslant |z|$, $|z| < 1$, a Q jest dowolnie ustaloną liczbą z przedziału $[-\pi, \pi)$. Równości są realizowane przez funkcje postaci

$$\Phi(z) = \frac{\prod_{k=1}^{3}(1-z^pe^{-it_k})^{\frac{2(1-\rho)\lambda_k}{p}}}{z}$$

dla odpowiednio dobranych wartości parametrów t_k, λ_k, $k = 1, 2, 3$, spełniających warunki (2. 7) dla b_1, b_2 określonych wzorami (2.17); p i ρ są tu ustalonymi liczbami, $\rho \in [0, 1)$, $p = 1, 2, \ldots$. Wybrana jest taka jednoznaczna gałąź funkcji

$$L_k = (1 - z^p e^{-it_k})^{\frac{2(1-\rho)\lambda_k}{p}}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{2.18}$$

że dla $z = 0$ $L_k = 1$.

Dowód. Z tożsamości

$$-\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)} = -z\frac{d}{dz}\log(z\Phi(z)) + 1,$$

$$-z\frac{d}{dz}\log(z\Phi(z)) = -|z|\frac{\partial}{\partial|z|}\log(z\Phi(z)),$$

gdzie $\frac{\partial}{\partial|z|}\log(z\Phi(z)) = \frac{d}{dz}\log(z\Phi(z))\cdot\frac{\partial z}{\partial|z|}$ dla $z = |z|e^{iQ}$, prawdziwych dla każdej wybranej jednoznacznej gałęzi logarytmu funkcji $z\Phi(z)$, $\Phi \in \sum_p^*(\rho)$ w kole K, otrzymujemy

$$-\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)} = -|z|\frac{\partial}{\partial|z|}[\log|z\Phi(z)| + i\,\mathrm{Arg}(z\Phi(z)) + i2k\pi] + 1,$$

gdzie $k = 0, \pm 1, \ldots$. $\mathrm{Arg}(z\Phi(z))$ oznacza taką jednoznaczną gałąź, że dla $z = 0$ $\mathrm{Arg}\,1 = 0$. Stąd

$$\mathrm{Re}\left[-\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right] = -|z|\frac{\partial}{\partial|z|}\log|z\Phi(z)| + 1,$$

$$\mathrm{Im}\left[-\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right] = -|z|\frac{\partial}{\partial|z|}\mathrm{Arg}(z\Phi(z)).$$

Mamy więc

$$\frac{\partial}{\partial|z|}\log|z\Phi(z)| = \frac{1}{|z|}\left[1 - \mathrm{Re}\left(-\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right)\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial|z|}\mathrm{Arg}(z\Phi(z)) = -\frac{1}{|z|}\mathrm{Im}\left[-\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right].$$

Całkując te tożsamości w przedziale $[0, |z|]$ otrzymujemy

$$|z\Phi(z)| = \exp\int_0^{|z|}\frac{1}{|z|}\left[1 - \mathrm{Re}\left(-\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right)\right]d|z|,$$

$$\mathrm{Arg}(z\Phi(z)) = \int_0^{|z|} -\frac{1}{|z|}\mathrm{Im}\left[-\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right]d|z|, \tag{2.19}$$

rozumiemy tu, iż są to całki krzywoliniowe, niezorientowane wzdłuż odcinka $\zeta = re^{iQ}$, gdzie $0 \leqslant r \leqslant |z|$, $|z| < 1$, a Q jest dowolnie ustaloną liczbą z przedziału $[-\pi, \pi)$. Stąd dla $z \neq 0$ otrzymujemy

$$(2.20) \qquad |\Phi(z)| = \frac{1}{|z|}\exp\int_0^{|z|}\frac{1}{|z|}\left[1-\mathrm{Re}\left(-\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right)\right]d|z|.$$

Z (1.10) otrzymujemy zależności między pierwszymi spółczynnikami funkcji klas $C_p(\rho)$, $\sum_p^*(\rho)$ określone wzorami (2.17). Stąd oraz z (1.4), (1.10), (2.16), (2.19), (2.20) i z twierdzenia 2.1 wynika prawdziwość tego wniosku.

Niech symbol $S_p^0(\rho, c_1^0, c_2^0)$ oznacza podklasę rodziny $S_p^0(\rho)$ wszystkich funkcji postaci (1.7), które mają ustalone spółczynniki c_{p+1}^0, c_{2p+1}^0. Spółczynniki te oznaczymy symbolami c_1^0, c_2^0.

Wniosek 2.3. Dla każdej funkcji $g^0 \in S_p^0(\rho, c_1^0, c_2^0)$ i dla każdego ustalonego punktu $z \in K$ prawdziwe są następujące dokładne oszacowania

$$(2.21) \qquad \begin{gathered} \exp\int_0^{|z|}\frac{1}{|z|}\left(\frac{B}{A}-R-1\right)d|z| \leqslant |g^{0\prime}(z)| \leqslant \exp\int_0^{|z|}\frac{1}{|z|}\left(\frac{B}{A}+R-1\right)d|z|, \\ \int_0^{|z|}\frac{1}{|z|}\left(\frac{C}{A}-R\right)d|z| \leqslant \mathrm{Arg}(g^{0\prime}(z)) \leqslant \int_0^{|z|}\frac{1}{|z|}\left(\frac{C}{A}+R\right)d|z|, \end{gathered}$$

gdzie R, A, B, C są określone wzorami (2.4) dla

$$(2.22) \qquad b_1 = p(p+1)c_1^0, \quad b_2 = p[2(2p+1)c_2^0-(p+1)^2c_1^{02}],$$

$\mathrm{Arg}(g^{0\prime}(z))$ oznacza taką jednoznaczną gałąź, że dla $z = 0$ $\mathrm{Arg}1 = 0$. Całki względem $d|z|$ oznaczają tu całki krzywoliniowe, niezorientowane wzdłuż odcinka $\zeta = re^{iQ}$, gdzie $0 \leqslant r \leqslant |z|$, $|z| < 1$, a Q jest dowolnie ustaloną liczbą z przedziału $[-\pi, \pi)$. Równości są realizowane przez funkcje postaci

$$(2.23) \qquad g^{0\prime}(z) = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{k=3}(1-z^pe^{-it_k})^{\frac{2(1-\rho)\lambda_k}{p}}}$$

dla odpowiednio dobranych wartości parametrów t_k, λ_k, $k = 1, 2, 3$, spełniających warunki (2.7) dla b_1, b_2 określonych wzorami (2.22); p i ρ są tu ustalonymi liczbami, $\rho \in [0, 1)$, $p = 1, 2, \ldots$, a gałąź funkcji L_k, $k = 1, 2, 3$, postaci (2.18) jest tak wybrana, że dla $z = 0$ $L_k = 1$.

Dowód. Z tożsamości

$$1+\frac{zg^{0\prime\prime}(z)}{g^{0\prime}(z)} = 1+|z|\frac{\partial \log g^{0\prime}(z)}{\partial|z|},$$

gdzie $\frac{\partial}{\partial|z|}\log g^{0\prime}(z) = \frac{d}{dz}\log g^{0\prime}(z)\frac{\partial z}{\partial|z|}$ dla $z = |z|e^{iQ}$, prawdziwej dla dowolnie wybranej gałęzi logarytmu funkcji $g^{0\prime}(z)$, $g^0 \in S_p^0(\rho)$ w kole K, otrzymujemy

$$\mathrm{Re}\left[1+\frac{z\,g^{0\prime\prime}(z)}{g^{0\prime}(z)}\right] = 1+|z|\frac{\partial \log|g^{0\prime}(z)|}{\partial|z|},$$

$$\mathrm{Im}\left[1+\frac{z\,g^{0\prime\prime}(z)}{g^{0\prime}(z)}\right] = |z|\frac{\partial \operatorname{Arg}(g^{0\prime}(z))}{\partial|z|},$$

gdzie $\operatorname{Arg}(g^{0\prime}(z))$ oznacza taką jednoznaczną gałąź, że dla $z=0$ $\operatorname{Arg}1=0$ Stąd

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial|z|}\log|g^{0\prime}(z)| = \frac{1}{|z|}\left[\mathrm{Re}\left(1+\frac{z\,g^{0\prime\prime}(z)}{g^{0\prime}(z)}\right)-1\right], \\ &\frac{\partial}{\partial|z|}\operatorname{Arg}(g^{0\prime}(z)) = \frac{1}{|z|}\,\mathrm{Im}\left[1+\frac{z\,g^{0\prime\prime}(z)}{g^{0\prime}(z)}\right]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Jeżeli $g^0 \in S_p^0(\rho)$, to w myśl (1.8)

$$1+\frac{z\,g^{0\prime\prime}(z)}{g^{0\prime}(z)} = p(z), \qquad p\in C_p(\rho), \qquad z\in K.$$

Stąd otrzymujemy wzory (2.22). Stąd też oraz z (2.16), (2.24) i z twierdzenia 2.1 wynika prawdziwość tego wniosku.

Niech symbol $S_p^*(\rho, c_1, c_2)$ oznacza podklasę rodziny $S_p^*(\rho)$ wszystkich funkcji postaci (1.5), które mają ustalone spółczynniki c_{p+1}, c_{2p+1}. Spółczynniki te oznaczymy symbolami c_1, c_2.

Wniosek 2.4. Dla każdej funkcji $l \in S_p^*(\rho, c_1, c_2)$ i dla każdego ustalonego punktu $z\in K$, prawdziwe są następujące dokładne oszacowania:

$$\begin{aligned} &|z|\exp\int_0^{|z|}\frac{1}{|z|}\left(\frac{B}{A}-R-1\right)d|z| \leqslant |f(z)| \leqslant |z|\exp\int_0^{|z|}\frac{1}{|z|}\left(\frac{B}{A}+R-1\right)d|z|, \\ &\int_0^{|z|}\frac{1}{|z|}\left(\frac{C}{A}-R\right)d|z| \leqslant \operatorname{Arg}\frac{f(z)}{z} \leqslant \int_0^{|z|}\frac{1}{|z|}\left(\frac{C}{A}+R\right)d|z|, \end{aligned} \tag{2.25}$$

gdzie R, A, B, C są określone wzorami (2.4) dla

$$b_1 = pc_1, \qquad b_2 = p(2c_2-c_1^2). \tag{2.26}$$

$\operatorname{Arg}\dfrac{f(z)}{z}$ oznacza taką jednoznaczną gałąź, że dla $z=0$ $\operatorname{Arg}1=0$, a całki rozumiemy jako krzywoliniowe, niezorientowane wzdłuż odcinka $\zeta = re^{iQ}$, gdzie $0\leqslant r\leqslant |z|$, $|z|<1$, a Q jest dowolnie ustaloną liczbą z przedziału $[-\pi, \pi)$. Równości są realizowane przez funkcje postaci

$$f(z) = \frac{z}{\prod\limits_{k=1}^{k=3}(1-z^p e^{-it_k})^{\frac{2(1-\rho)\gamma_k}{p}}} \tag{2.27}$$

dla odpowiednio dobranych wartości parametrów t_k, λ_k, $k = 1, 2, 3$, spełniających warunki (2.7) dla b_1, b_2 określonych wzorami (2.26); p i ρ są ustalonymi liczbami, $\rho \in [0, 1)$, $p = 1,2,\ldots$, a jednoznaczna gałąź funkcji L_k, $k = 1, 2, 3$, postaci (2.18) jest tak wybrana, że dla $z = 0$ $L_k = 1$.

Dowód. Wiadomo (por. [8] str. 279), że między funkcjami klas $S_p^*(\rho)$ i $S_p^0(\rho)$ istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość określona przez relację

(2.28) $$zg^{0'}(z) = f(z) \qquad \text{dla każdego } z \in K.$$

Stąd i z (2.22) otrzymujemy wzory (2.26). Oszacowania (2.25) i funkcje brzegowe postaci (2.27) otrzymujemy z (2.28), (2.21) i (2.23).

Dla $p = 1$ i $\rho = 0$ dokładne oszacowania postaci (2.25) uzyskała Slusarowa [6].

BIBLIOGRAFIA

[1] С.А. Касьянюк, В.Г. Финогенова, Об областях значений типичновещкственных Функций с фиксированными коэффициентами и об областях значений систем их коэффициентов, Изв. вузов., Математика, № 4, (1968), 39—47.

[2] М.Г. Крейн, Идеи П.Л. Чебышева и А.А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие, Успехи матем. наук, Т. 6, вып. 4, (1951), 3—97.

[2a] Н.И. Ахиезер и М.Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, Харков, 1938.

[2b] Ф.Р. Гантмахер и М.Г. Крейн, Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Москва 1950, Гостехиздат, 1—359.

[3] F. Leja, Teoria funkcji analitycznych, Warszawa 1957.

[4] О.С. Носенко, Про области значень стільтьэсових функціоналів з обмеженнями типу рівностей, Доповіді А.Н.У.Р.С.Р. № 12, (1963), 1563—1567.

[5] К.М. Слюсарова, Про область значень С-функцій з дійсними фіксованими коефіціэнтами, Доп. А.Н.У.Р.С.Р. № 3, (1974), 222—225.

[6] К.М. Слюсарова, Деякі оцінки С-функцій і зірчатих функцій з фіксованими тейлорівськими коефіціэнтами, Вісн. К. Ун., № 16, (1974), 105—108.

[7] S. Walczak, Metoda badania ekstremów warunkowych w pewnych rodzinach funkcji zespolonych, Łódź 1974.

[8] Wu-Zwao-Jen, Some classes of starlike functions, Acta Math. Sinica 7(1957), 277—289.

[9] В.А. Зморович, Об одном классе экстремальных задач, связанных с регулярными функциями с положительной вещественной частью в круге $|z| < 1$, У.М.Ж. Т. 17, № 4, (1965), 12—20.

B. PLATYNOWICZ

On some extremal problems in special classes of holomorphic functions at additional conditions

Summary

In this paper the region of values of the complex functional $F(p) = p(z)$ have been investigated in the fixed point $z \in K$, defined on the subclass of the family $C_p(\varrho)$ of all functions, which have the first fixed two coefficients. In this paper also some exact estimations have been investigated in this subclass, and some exact estimations in the classes $\Sigma_p^*(\varrho)$, $S_p^0(\varrho)$, $S_p^*(\varrho)$ at additional conditions, which are appropriately fixed coefficients.