PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie

Nr 2/1979 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

O regularnych n-półgrupach

Wiesław A. DUDEK, Izabela GROŹDZIŃSKA

W tej pracy omówimy pewne własności uogólnienia półgrup regularnych na przypadek n-arny. Szczególną uwagę zwrócimy na rolę ideałów oraz pewne istotne różnice między przypadkiem binarnm a n-arnym.

Użyte pojęcia oraz oznaczenia pochodzą z pracy [4].

Przez *n-półgrupę regularną* rozumiemy n-półgrupę $<G, f>$ w której spełniony jest warunek

$$(1) \qquad (\forall a \in G)\,(\exists x_2, \ldots, x_{2n-2}) \quad f_{(2)}(a, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-2}, a) = a.$$

Kładąc w powyższej definicji $n = 2$ otrzymamy zwykłe półgrupy regularne.

Nietrudno zauważyć, że z warunku (1) wynika, iż

$$(2) \qquad (\forall a \in G)\,(\exists z_2, \ldots, z_{n-1} \in G) \quad f(a, z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}, a) = a.$$

Niepusty podzbiór $B_j \subset G$ nazywamy *j-ideałem* n-półgrupy $<G, f>$ jeśli z tego że $x_j \in B_j$ wynika, że $f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \in B_j$ dla wszystkich $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n \in G$. Jeśli $B = B_1 = B_2 = \ldots = B_n$, to nazywamy go krótko — *ideałem*. Natomiast *j-ideałem generowanym przez element* $a \in G$ nazywamy zbiór

$$(a)_j = \{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \ldots, x_n) : x_i \in G\} \cup \{a\}.$$

TWIERDZENIE 1. W n-półgrupie $<G, f>$ następujące warunki są równoważne:

(i) $<G, f>$ jest regularna,

(ii) $\bigcap_{j=1}^{n} B_j \subset f(B_1, B_{n-1}, B_{n-2}, \ldots, B_2, B_n)$ dla każdego zbioru j-ideałów,

(iii) $\bigcap_{n=j}^{n} (a_j)_j \subset f((a_1)_1, (a_2)_{n-1}, \ldots, (a_{n-1})_2, (a_n)_n)$ dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in G$,

(iv) $\bigcap_{j=1}^{n} (a)_j \subset f((a)_1, (a)_{n-1}, \ldots, (a)_2, (a)_n)$ dla każdego $a \in G$.

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii). Niech $a \in \bigcap_{j=1}^{n} B_j$. Ponieważ $<G, f>$ jest regularna, więc — na mocy poprzednich uwag — istnieją elementy $z_2, \ldots, z_{n-1} \in G$ takie, że

$$a = f(a, z_2, \ldots, z_{n-1}, a) = f(f(a, z_2, \ldots, z_{n-1}, a), z_2, \ldots, z_{n-1}, a) = \ldots =$$
$$= f(f(a, z_2, \ldots, z_{n-1}, a), f(z_2, \ldots, z_{n-1}, a, z_2), \ldots, f(z_{n-1}, a, z_2, \ldots, z_{n-1}),$$
$$f(a, z_2, \ldots, z_{n-1}, a)) \in f(B_1, B_{n-1}, B_{n-2}, \ldots, B_2, B_n),$$

gdyż $f(a, z_2, ..., z_{n-1}, a) \in B_1 \cap B_n$, zaś $f(z_i, ..., z_{n-1}, a, z_2, ..., z_i) \in B_{n-i+1}$ na mocy założenia o elemencie $a \in G$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Każdy element $a \in G$ należy oczywiście do $\bigcap_{j=1}^{n} (a)_j$. Zatem, na mocy założeń, dla każdego $a \in G$ istnieją elementy $b_i \in (a)_i$ takie, że $a = f(b_1, b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_2, b_n)$. Ale jeśli $b_i \in (a)_i$, to $b_i = a$ lub $b_i = f(x_1^i, ..., x_{i-1}^i, a, x_{i+1}^i, ..., x_n^i)$ dla pewnych $x_j^i \in G$. Jeśli $b_i = a$, to wtedy $b_i = a = f(b_1, b_{n-1}, ..., b_{i+1}, a, b_{i-1}, ..., b_2, b_n)$.

Podstawiając oba wyrażenia na b_i do $a = f(b_1, b_{n-1}, ..., b_2, b_n)$ mamy

$$a = f(f(a, x_2^1 ..., x_n^1), ..., f(x_1^n, ..., x_{x-1}^n, a)) =$$
$$= f_{(2)}(a, x_2^1, ..., x_{n-1}^1, f_{(n-1)}(x_n^1, ..., x_1^n), x_2^n, ..., x_{n-1}^n, a).$$

Zatem n-półgrupa spełniająca warunek (iv) jest regularna.

Pozostałe dwie implikacje są oczywiste.

Z pierwszej części dowodu wynika następujący

WNIOSEK. Jeśli $<G, f>$ jest n-półgrupą regularną, to $\bigcap_{j=1}^{n} B_j \subset f(B_n, B_{n-1}, B_{n-2}, ..., B_2, B_1)$ dla każdego zbioru j-ideałów.

TWIERDZENIE 2. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na regularność n-półgrupy jest idempotentność każdego jej ideału.

Dowód. Kładąc $B = B_1 = B_2 = ... = B_n$ w twierdzeniu 1 otrzymamy $B \subset f(B, ..., B)$. Ponieważ $f(B,...,B) \subset B$ dla każdego ideału, więc regularność n-półgrupy implikuje idempotentność każdego ideału.

Odwrotnie, jeśli wszystkie B_j są j-ideałami w n-półgrupie $< G, f>$, to $\bigcap_{j=1}^{n} B_j$ jest ideałem zawartym w każdym B_j. Razem z założeniem daje to

$$\bigcap_{j=1}^{n} B_j = f\left(\bigcap_{j=1}^{n} B_j, ..., \bigcap_{j=1}^{n} B_j\right) \subset f(B_1, B_{n-1}, ..., B_2, B_n)$$

dla każdego zbioru j-ideałów. Zatem n-półgrupa $<G, f>$ jest regularna.

Tymi samymi metodami można pokazać, że n-półgrupy spełniające warunek Siosona

$$(3) \quad \begin{cases} (\forall\, a \in G)\ (\exists x_j^i \in G)\ (1 \leqslant i, j \leqslant n) \\ a = f(f(a, x_1^1, ..., x_n^1), f(x_1^2, a, x_2^2, ..., x_n^2), ..., f(x_1^n, ..., x_{n-1}^n, a)) \end{cases}$$

mają podobne własności.

TWIERDZENIE 3. (Sioson [7]) Dla n-półgrupy poniższe warunki są równoważne:

(i) n-półgrupa spełnia (3),

(ii) $f(B_1, B_2, B_3,...,B_n) = \bigcap_{j=1}^{n} B_j$ dla każdego zbioru j-ideałów,

(iii) $f((a_1)_1, (a_2)_2, ..., (a_n)_n) = \bigcap_{j=1}^{n} (a_j)_j$ dla wszystkich $a_1, ..., a_n \in G$,

(iv) $f((a)_1, (a)_2, ..., (a)_n) = \bigcap_{j=1}^{n} (a)_j$ dla każdego $a \in G$,

(v) każdy ideał jest idempotentny.

Warunek (v) w pracy Siosona jest pokazany przy założeniu przemienności n-półgrupy. Jednak założenie to jest zbędne.

Z powyższych rozważań wynika

TWIERDZENIE 4. W n-półgrupie warunki (1), (2), (3) oraz

$$(4) \qquad (\forall a \in G)\,(\exists y_2, \ldots, y_n \in G) \quad f_{(2)}(a, y, a, y_3, a, \ldots, a, y_n, a) = a$$

są równoważne.

TWIERDZENIE 5. Regularna 3-półgrupa jest 3-grupą wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi w niej prawo skreśleń.

Dowód. Oczywiście w każdej n-grupie zachodzi prawo skreśleń [3]. Każda n-grupa jest również n-półgrupą regularną.

Odwrotnie, w 3-półgrupie regularnej dla każdego elementu $a \in G$ istnieje $x \in G$ taki, że $f(a, x, a) = a$. Zatem dla dowolnego $b \in G$ mamy $f(b, x, a) = f(b, x, f(a, x, a)) = f_{(2)}(b, x, a, x, a)$, co na mocy prawa skreśleń daje $b = f(b, x, a)$. Podobnie pokazujemy, że $b = f(a, x, b)$. Teraz wystarczy zastosować twierdzenie 2 z pracy [4].

Otrzymany wynik można uogólnić na przypadek $n > 3$. Jednakże dowód w tym przypadku jest znacznie trudniejszy i wymaga zastosowania znacznie subtelniejszych metod. Zostanie on opublikowany w pracy [5].

Jak wiadomo autodystrybutywne n-półgrupy ze skracaniem są regularne [3]. Wynika stąd następujący

WNIOSEK. Autodystrybutywna 3-półgrupa jest 3-grupą wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi w niej prawo skreśleń.

Mówimy, że elementy $x_2, x_3, \ldots, x_n \in G$ są *regularnie stowarzyszone* jeśli $f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_2, \ldots, x_i) = x_i$ dla wszystkich $i \in \{2, \ldots, n\}$. Element x_k nazywamy elementem regularnie stowarzyszonym z ciągiem $x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$. W n-półgrupie regularnej dla każdego elementu istnieje ciąg elementów regularnie stowarzyszonych z nim. Jeśli w pewnej n-półgrupie wszystkie elementy regularnie stowarzyszone z danym ciągiem pokrywają się, to jest ona n-półgrupą inwersyjną [6]. Stąd n-półgrupy regularne ze skracaniem są inwersyjne.

Stosując kilka prostych przekształceń otrzymujemy

WNIOSEK. Jeśli w n-półgrupie dane są dwa ciągi elementów regularnie stowarzyszonych $y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ oraz $y_2, \ldots, y_{n-1}, a$, to ciągi $y_2, \ldots, y_{n-1}, f(a, y_2, \ldots, y_n)$ oraz $y_2, \ldots, y_{n-1}, f(y_n, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, a)$ są również regularnie stowarzyszone.

Zupełnie inaczej niż w przypadku binarnym zachowują się idempotenty w n-półgrupach przy $n \geqslant 3$. Przytoczymy teraz kilka istotnych różnic. Wiadomo, że niektóre klasy półgrup binarnych mają ściśle określoną ilość idempotentów o zadanych własnościach [1]. Natomiast ich n-arne analogony mogą mieć różne ilości dempotentów o tych samych lub podobnych własnościach. Na przykład: n-grupy mogą mieć dowolną ilość idempotentów, ale mogą też nie mieć ich wcale. Idempotenty n-grupy wcale nie muszą być elementami neutralnymi. Jednakże istnieją n-grupy złożone z samych elementów neutralnych oraz n-grupy cykliczne bez idempotentów [3].

W n-półgrupie inwersyjnej — inaczej niż w przypadku binarnym — iloczyn idempotentów może nie być idempotentem, nie musi też być przemienny ani nawet półprzemienny. Aby się o tym przekonać wystarczy wziąć 3-grupę pochodną od grupy S_4. Wtedy elementy

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

są idempotentami, ale nie mają wyżej wymienionych własności.

Zachodzi jednak następujące, łatwe do udowodnienia,

TWIERDZENIE 6. Niech a będzie elementem danej n-półgrupy takim, że $a = f(a, x_3, ..., x_n, a)$ dla pewnych $x_3, ..., x_n$. Jeśli a jest idempotentem, to $f(x_i, ..., x_n, a, a, x_3, ..., x_{i-1})$ też jest idempotentem dla każdego $i \in \{3, 4, ..., n+1\}$. Implikacja odwrotna jest prawdziwa w n-półgrupach ze skracaniem.

G. Crombez [2] pokazał, że zbiór addytywnych idempotentów każdego (m, n) — pierścienia tworzy ideał, o ile nie jest zbiorem pustym. Każdy inny ideał takiego (m, n) — pierścienia zawiera co najmniej jeden idempotent. Jeśli zaś w (m, n) — pierścieniu zachodzi prawo skreśleń, to nie ma on wcale addytywnych idempotentów, albo ma dokładnie jednego (zero), albo każdy jego element jest addytywnym idempotentem [3].

Zazwyczaj addytywne idempotenty nie są multiplikatywnymi i odwrotnie, multiplikatywne nie są addytywnymi. W pewnych klasach (m, n) — pierścieni multiplikatywne idempotenty są addytywnymi. Pokażemy, że przy dodatkowych założeniach, jeśli element nie jest addytywnym idempotentem, to żadna jego multiplikatywna potęga nie może być addytywnym idempotentem.

Mówimy, że (m, n) — pierścień $<G; g, f>$ jest *regularny*, jeśli jego multiplikatywna n-półgrupa $<G, f>$ jest regularna. Otrzymane przez nas wyniki bez trudu przenoszą się na (m,n) — pierścienie regularne. Co więcej, j-ideały) n-półgrupy można zastąpić j-ideałami odpowiedniego (m, n) — pierścienia.

TWIERDZENIE 7. Jeśli pewien element nie jest addytywnym idempotentem przemiennego i regularnego (m.n) — pierścienia $<G; g, f>$, to żadna jego multiplikatywna potęga nie może być addytywnym idempotentem.

Dowód. Oznaczmy przez N zbiór wszystkich addytywnych idempotentów (m, n) — pierścienia $<G; g, f>$. Przypadek $N = \emptyset$ jest oczywisty. Niech więc będzie $N \neq \emptyset$ oraz $a \in G \setminus N$. Pokażemy indukcyjnie, że dla żadnego naturalnego s nie może być $f_{(s)}(a, a, ..., a) = a^{<s>} \in N$. Rzeczywiście, gdyby $a^{<1>} \in N$, to z regularności i przemienności mielibyśmy, dla pewnych elementów $x_2, ..., x_n \in G$,

$$a = f_{(2)}(a, x_2, a, x_3, a, ..., a, x_n, a) = f(f(a, ..., a), x_2, ..., x_n) \in N,$$

co jest sprzeczne z założeniem o elemencie a. Zatem $a^{<1>} \notin N$.

Jeśli $a^{<s_1>}, ..., a^{<s_n>} \notin N$, to również $f(a^{<s_1>}, ..., a^{<s_n>}) \notin N$. Dla wykazania tego faktu załóżmy, że s_1 jest największą liczbą spośród wykładników $s_1, s_2, ..., s_n$. Wtedy dla pewnych $y_2, ..., y_n \in G$ mamy

$$a^{<s_1>} = f_{(2)}(a^{<s_1>}, y_2, a^{<s_2>}, y_3, a^{<s_1>}, \ldots, a^{<s_1>}, y_n, a^{<s_1>}) =$$
$$= f(f(a^{<s_1>}, \ldots, a^{<s_1>}), y_2, \ldots, y_n)$$
$$= f(f(a^{<s_1>}, a^{<s_2>}, \ldots, a^{<s_n>}), f(a^{<k>}, a^{<n-3>}, a, \ldots, a, y_2), y_3, \ldots, y_n),$$

gdzie $k = n \cdot s_1 - (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) - (n-2)$.

Gdyby teraz $f(a^{<s_1>}, \ldots, a^{<s_n>}) \in N$, to wtedy również $a^{<s_1>} \in N$, co jest niemożliwe na mocy założenia indukcyjnego.

Tak więc żadna multiplikatywna potęga elementu $a \notin N$ nie może być addytywnym idempotentem.

Literatura

[1] A. CLIFFORD, G. PRESTON, *The Algebraic Theory of Semigroups*, vol. I, AMS, Providence, Rhode Island, 1964.

[2] G. CROMBEZ, *On (n, m)-rings*, Abhandlungen Math. Sem. Univer. Hamburg, vol. 37 (1972), str. 180—199.

[3] W. A. DUDEK, *Autodistributive n-groups*, Commentationes Math., 23 (1983), str. 1—11.

[4] W. A. DUDEK, K. GŁAZEK and B. GLEICHGEWICHT, *A note on the axioms of n-groups*, Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, Esztergom 1977, str. 195—202.

[5] W. A. DUDEK, I. GROŹDZIŃSKA, *On ideals in regular n-semigroups*, Математички Билтен (Skopje) 3—4 (1979—1980), str. 35—44.

[6] O. B. КОЛЕСНИКОВ, *Инверсные n-полугруппы*, Commentationes Math., 21 (1979) str. 101—108.

[7] F. M. SIOSON, *On regular algebraic systems*, Proc. Japan Academy, vol. 39(1963), str. 283—286.

W.A. DUDEK and I. GROŹDZIŃSKA — **„On REGULAR n-SEMIGROUPS"**

Summary

In this paper we prove some properties concerned with ideals of regular n-semigroups. We prove also that the conditions (1)—(4) are equivalent. We described idempotent elements in regular n-semigroups and (m, n)-rings. In regular and commutative (m, n)-rings, the set of all additive idempotents forms an ideal N such that, if $a \notin N$, then $a^{<s>} \notin N$ for every s.