PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 2/1979 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

O UKŁADZIE DYNAMICZNYM NA PŁASZCZYŹNIE MANDELSTAMA GENEROWANYM PRZEZ FUNKCJĘ KIBBLE'A

Wojciech GRUHN

Streszczenie: Przeprowadzona jest klasyfikacja punktów krytycznych pola wektorowego, dla którego funkcja Kibble'a jest całką ruchu. Otrzymane wyniki mogą być zastosowane do fenomenologicznej analizy rozpraszania.

1. Wstęp

Będziemy rozpatrywać procesy, w których łącznie w stanie początkowym i końcowym obecne są cztery cząstki. Możliwe są wówczas następujące reakcje

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 1+2 \to 3+4 & \text{kanał s} \\ \text{II} & 1+\bar{3} \to \bar{2}+4 & \text{kanał t} \\ \text{III} & 1+\bar{4} \to \bar{2}+3 & \text{kanał u} \\ \text{IV} & 1 \to \bar{2}+3+3 & \text{kanał rozpadu} \end{array} \tag{1.1}$$

Wprowadzamy trzy inwarianty Lorentzowskie

$$\begin{aligned} s &= (q_1+q_2)^2 = (q_3+q_4)^2 \\ t &= (q_1+q_3)^2 = (q_2+q_4)^2 \\ u &= (q_1+q_4)^2 = (q_2+q_3)^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdzie

$q_i = q_i^\mu = (q_i^0, \bar{q}_i)$

$i = 1, 2, 3, 4$ numer cząstki

$\mu = 0, 1, 2, 3$ — indeks czasoprzestrzeny (Minkowskiego)

Inwarianty s,t,u powiązane są relacją

$$s+t+u = h \tag{1.3}$$

gdzie

$$h = \sum_{i=1}^{4} m_i^2 \tag{1.4}$$

m_i = masa i-ej cząstki

Zagadnienia kinematyczne powyższych procesów omówione są szczegółowo np.: w podręcznikach [1, 2, 3] lub monografiach [4,5]. Przy rozpatrywaniu amplitudy rozpraszania jako funkcji zmiennych s,t,u powiązanych relacją (1.3) powstaje konieczność rozróżnienia fizycznie dopuszczalnych i nie dopuszczalnych obszarów ich wartości. Na fizycznie dopuszczalne wartości zmiennych s, t, u narzucone są m.in. następujące warunki, wynikające z zasady zachowania czteropędu

$$\sum_{i=1}^{4} q_i = 0 \tag{1.5}$$

i faktu, że kwadrat każdego z czteropędów równy jest kwadratowi masy

$$q_i^2 = m_i^2, \quad \text{dla każdego } i = 1, 2, 3, 4 \tag{1.6}$$

gdzie czteropęd

$$q_i = \begin{cases} p_i & \text{dla cząstek padających} \\ -p_i & \text{dla cząstek rozproszonych} \end{cases}$$

Kibble wprowadził jednolity warunek na fizycznie dopuszczalne obszary dla wszystkich kanałów [6]

$$stu \geqslant as+bt+cu \tag{1.7}$$

gdzie

$$\begin{aligned} ah &= (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)(m_1^2+m_2^2-m_3^2-m_4^2) \\ bh &= (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)(m_1^2+m_3^2-m_2^2-m_4^2) \\ ch &= (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2+m_4^2-m_2^2-m_3^2) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Wprowadzamy funkcję Kibble'a

$$\omega(s,t,u) := stu-(as+bt+cu) \tag{1.9}$$

Dla graficznej ilustracji fizycznie dopuszczalnych wartości zmiennych s,t,u służą tzw. współrzędne trójkątowe na płaszczyźnie Mandelstama [1, 2, 3]. Szereg pięknych przykładów, dla różnych reakcji można znaleźć w [1]. Funkcja Kibble'a (1.9) wyznacza na płaszczyźnie Mandelstama obszary fizyczne. Oziewicz [7] badał jednoparametrową grupę transformacji płaszczyzny Mandelstama, dla której funkcja Kibble'a jest całką ruchu (niezmiennicza); wysunął także hipotezę, że być może grupa ta posiada wartość dynamiczną, tzn. może pozostawiać przybliżenie niezmienniczymi obserwable będące funkcjami na płaszczyźnie Mandelstama. Powstaje wówczas zagadnienie zbadania strumienia fazowego pola wektorowego związanego z funkcją Kibble'a [7]. W niniejszej pracy została przeprowadzona klasyfikacja punktów krytycznych tegoż pola wektorowego.

2. Definicje.

A. Punkty krytyczne funkcji Kibble'a.

Wprowadzamy nowe zmienne:

$$\begin{aligned} s &:= s, \\ \Phi &:= u-t, \\ \Sigma &:= s+t+u. \end{aligned} \tag{2.1}$$

W obszarach fizycznie dopuszczalnych

$$\Sigma = h \tag{2.2}$$

i

$$t = \frac{1}{2}(h-s-\Phi). \tag{2.3}$$

Po podstawieniu (2.3) do funkcji Kibble'a i skorzystaniu z (2.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \omega(s, t(s, \Phi,)\, u(s, \Phi)) = \omega(s, \Phi) = \frac{1}{4}\Big\{ s^3 - 2hs^2 + h^2 s - \\ - s\Phi^2 - 4\left(a - \frac{1}{2}(b+c)\right)s + 2(b-c)\Phi - 2(b+c)h \Big\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Definicja: Punktem krytycznym funkcji nazywamy punkt, w którym zeruje się różniczka zupełna funkcji. Wartość funkcji w takim punkcie nazywa się wartością krytyczną [8].
Mamy zatem równanie

$$d\omega = 0, \tag{2.5}$$

z którego otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} 2\partial_s\omega &= \frac{1}{2}\left\{3s^2 - 4hs - \Phi^2 + h^2 - 4\left(a - \frac{1}{2}(b+c)\right)\right\} = 0, \\ 2\partial_\Phi\omega &= -s\Phi + b - c = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

W rozdziale 3 przeprowadzimy analizę otrzymanych rozwiązań powyższego układu równań dla różnych przypadków konfiguracji mas.

B. Hesjan funkcji Kibble'a.

Definicja: Punkt krytyczny p funkcji $\omega(s, \Phi)$ jest nieosobliwy jeżeli wyznacznik hesjanu

$$\begin{gathered} \det H_p(\omega) = \det\left(\frac{\partial^2\omega(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_p \neq 0, \\ i, j = 1, 2,\ x_1 = s,\ x_2 = \Phi \quad [8, 9, 11] \end{gathered} \tag{2.7}$$

Hesjan funkcji $\omega(s, \Phi)$ jest postaci

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3s-2h, & -\Phi \\ -\Phi, & -s \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Punkty krytyczne funkcji ω są charakteryzowane wartościami własnymi hesjanu (2.8). Pociąga to za sobą konieczność zbadania tych że wartości własnych. W tym celu rozwiązujemy równanie charakterystyczne

$$\det(H(\omega) - \lambda I) = 0, \tag{2.9}$$

którego pierwiastkami są

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\{s-h\pm\sqrt{(2s-h)^2+\Phi^2}\} \tag{2.10}$$

W rozdziale 3 przeprowadzimy klasyfikację otrzymanych rozwiązań równania (2.9) w punktach krytycznych funkcji ω dla różnych przypadków konfiguracji mas.

C. Pole wektorowe (układ dynamiczny).

Jednoparametrowa grupa przekształceń płaszczyzny Mandelstama badana przez Oziewicza [7] określa pole wektorowe

$$X:=X^s\partial_s+X^t\partial_t+X^u\partial_u \tag{2.11}$$

Jak pokazał Oziewicz [7] pole wektorowe X spełniające warunki:

$$\begin{aligned} X\omega &= 0 \\ X\Sigma &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

można wybrać tak aby

$$\begin{aligned} X^s &= (\partial_t-\partial_u)\omega, \\ X^t &= (\partial_u-\partial_s)\omega, \\ X^u &= (\partial_s-\partial_t)\omega. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Podstawiając (1.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} X^s &= s(u-t)-(b-c), \\ X^t &= t(s-u)-(c-a), \\ X^u &= u(t-s)-(a-b). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Obecnie udowodnimy następujące stwierdzenie

Stwierdzenie: Układ dynamiczny (2.13) po zredukowaniu do płaszczyzny Mandelstama jest układem Hamiltonowskim.

Dowód: W zmiennych (2.1) mamy

$$X=X^s\partial_s+X^\Phi\partial_\Phi+X^\Sigma\partial_\Sigma \tag{2.15}$$

gdzie

$$\begin{aligned} X^s &= s\Phi-(b-c), \\ X^\Phi &= \frac{1}{2}\left\{3s^2-4hs-\Phi^2+h^2-4\left(a-\frac{1}{2}(b-c)\right)\right\}, \\ X^\Sigma &= 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Porównując (2.16) z (2.6) otrzymujemy kanoniczny układ równań Hamiltona

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -2\partial_\Phi\omega, \\ \dot{\Phi} &= 2\partial_s\omega. \end{aligned} \tag{2.17}$$

W bardziej zwartej formie przyjmie on postać [10]

$$d\omega = X \lrcorner \gamma \tag{2.18}$$

gdzie

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Definicja: Punktem krytycznym pola wektorowego X nazywamy punkt w którym zeruje się wektor pola [8].

D. Linearyzacja pola wektorowego.

Punkty krytyczne pola wektorowego X są te same co punkty krytyczne funkcji ω. Ciekawym jest porównanie klasyfikacji punktów krytycznych funkcji ω z klasyfikacją punktów krytycznych pola wektorowego X. Wymaga to zlinearyzowania pola wektorowego X.

Linearyzację przeprowadzamy rozwijając pole wektorowe X w szereg Taylora, w otoczeniu punktu krytycznego i pozostawiając tylko wyrazy liniowe [8]

$$X(s, \Phi) = X(s_0, \Phi_0) + dX(s_0, \Phi_0) + \frac{1}{2!} d^2x(s_0, \Phi_0) + \ldots \tag{2.19}$$

gdzie

s_0, Φ_0 — współrzędne punktu krytycznego,
$X(s_0, \Phi_0) = 0$.

Dla składowych X^s, X^Φ pola wektorowego otrzymujemy

$$\begin{aligned} dX^s &= \partial_s X^s d_s + \partial_\Phi X^s d\Phi, \\ dX^\Phi &= \partial_s X^\Phi ds + \partial_\Phi X^\Phi d\Phi. \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$dX := \begin{pmatrix} \partial_s X^s & \partial_\Phi X^s \\ \partial_s X^\Phi & \partial_\Phi X_\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds \\ d\Phi \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} ds \\ d\Phi \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Macierz L zlinearyzowanego pola wektorowego X ma zatem postać

$$L(X(s,\Phi)) = \begin{pmatrix} \Phi & s \\ 3s-2h, & -\Phi \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Równanie na wartości własne macierzy L jest postaci

$$\det(L(X) - \lambda I) = 0 \tag{2.23}$$

Stąd

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3s^2 - 2hs + \Phi^2} \tag{2.24}$$

Analizę wartości własnych (2.24) macierzy L w punktach krytycznych funkcji ω przeprowadzimy w następnym punkcie.

3. Klasyfikacja punktów krytycznych.

A. Przypadek dwóch więzów na masy cząstek.

Położenie we wzorze (1.8) $a = b = c$ oznacza ustanowienie dwóch więzów na masy cząstek biorących udział w reakcjach (1.1).
Układ równań (2.6) przyjmie wówczas postać

$$\begin{aligned} &3s^2-4hs-\Phi^2+h^2 = 0 \\ &s\Phi = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Punkty krytyczne funkcji ω podane w Tabeli I.

Tabela I. Punkty krytyczne i wartości krytyczne funkcji $\omega(s, \Phi)$ dla $a = b = c$.

Nr.	s	t	u	Φ	Wartości krytyczne
1	0	0	h	h	$-ah$
2	0	h	0	$-h$	$-ah$
3	h	0	0	0	$-ah$
4	$\frac{1}{3}h$	$\frac{1}{3}h$	$\frac{1}{3}h$	0	$\frac{1}{27}h^3-ah$

Podstawiając do wzoru (2.10) wartości na s, Φ z Tabeli I otrzymujemy wartości własne λ_H hesjanu $H(\omega)$ w punktach krytycznych funkcji ω dla przypadku dwóch więzów. Wyniki podane są w Tabeli II.

Tabela II. Wartości własne λ_H hesjanu $H(\omega)$ w punktach krytycznych funkcji ω dla $a = b = c$.

Nr.	Wartości własne λ_H hesjanu $H(\omega)$
1	$\pm\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)h$
2	$\pm\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)h$
3	$\pm\frac{1}{2}h$
4	$-\frac{1}{2}h, -\frac{1}{6}h$

Wszystkie otrzymane wartości własne λ_H są rzeczywiste. W przypadkach 1, 2, 3 mamy rozwiązania o przeciwnych znakach i punkt krytyczny funkcji ω jest **siodłem** [12, 13, 14].

W przypadku 4 oba rozwiązania mają te same znaki i punkt krytyczny jest **węzłem** [12, 13, 14]. Podstawiając współrzędne punktów krytycznych (Tabela I) do wzoru (2,24) otrzymujemy wartości własne λ_L macierzy L(X) zlinearyzowanego pola wektorowego X. Wyniki podane są w Tabeli III.

Tabela III. Wartości własne λ_L macierzy L(X) w punktach krytycznych funkcji ω dla a = b = c.

Nr.	Wartości własne λ_L macierzy linearyzacji L(X)
1	$\pm h$
2	$\pm h$
3	$\pm h$
4	$\pm \frac{i}{\sqrt{3}} h$

W przypadkach 1, 2, 3 otrzymane wartości własne są rzeczywiste, o przeciwnych znakach i punkt krytyczny jest **siodłem**. W przypadku 4 rozwiązania są czysto urojone i punkt krytyczny jest **wirem** (12, 13, 14].

B. Przypadek jednego więzu na masy cząstek.

Jeżeli położymy b = c we wzorze (1.8), to jest to ekwiwalentne ustanowieniu jednego więzu na masy cząstek biorących udział w reakcjach (1.1). Układ równań (2.6) przyjmie wówczas postać

$$\begin{aligned} &3s^2 - 4hs - \Phi^2 + h^2 - 4(a-b) = 0 \\ &s\Phi = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Współrzędne punktów krytycznych podane są w Tabeli IV.

Tabela IV. Punkty krytyczne i wartości krytyczne funkcji $\omega(s, \Phi)$ dla b = c.

Nr.	s	t	u	Φ	Wartości krytyczne
1	0	$\frac{1}{2}(h-\sqrt{A})$	$\frac{1}{2}(h+\sqrt{A})$	$\sqrt{A}$	$-bh$
2	0	$\frac{1}{2}(h+\sqrt{A})$	$\frac{1}{2}h(-\sqrt{A})$	$-\sqrt{A}$	$-bh$
3	$\frac{1}{6}(4h+2\sqrt{B})$	$\frac{1}{6}(h-\sqrt{B})$	$\frac{1}{6}(h-\sqrt{B})$	0	$\frac{1}{4}C^3-\frac{1}{2}hC^2+\frac{1}{4}h^2C-(a-b)C-bh$
4	$\frac{1}{6}(4h-2\sqrt{B})$	$\frac{1}{6}(h+\sqrt{B})$	$\frac{1}{6}(h+\sqrt{B})$	0	$\frac{1}{4}D^3-\frac{1}{2}hD^2+\frac{1}{4}h^2D-(a-b)D-bh$

gdzie

$$A = h^2 - 4(a-b),$$
$$B = h^2 + 12(a-b),$$
$$C = \frac{1}{3}(2h + \sqrt{B}),$$
$$D = \frac{1}{3}(2h - \sqrt{B}).$$

Podstawiając do wzoru (2.10) współrzędne z Tabeli IV otrzymujemy wartości własne λ_H hesjanu $H(\omega)$ w punktach krytycznych funkcji ω dla przypadku jednego więzu na masy cząstek. Wyniki podane są w Tabeli V. Podstawiając do wzoru (2.24) współrzędne z Tabeli IV otrzymujemy wartości własne λ_L macierzy $L(X)$ zlinearyzowanego pola wektorowego X. Wyniki podane są w Tabeli VI.

Tabela V. Wartości własne λ_H hesjanu $H(\omega)$ w punktach krytycznych funkcji ω dla $b = c$.

Nr.	Wartości własne λ_H hesjanu $H(\omega)$
1	$-\frac{1}{2}(h+\sqrt{E})$
2	$-\frac{1}{2}(h-\sqrt{E})$
3	$\frac{1}{2}\sqrt{B};\ -\frac{1}{2}C$
4	$-\frac{1}{2}\sqrt{B};\ -\frac{1}{2}D$

gdzie

$$E = h^2 + A = 2h^2 - 4(a-b).$$

Tabela VI. Wartości własne λ_L macierzy $L(X)$ zlinearyzowanego pola wektorowego X w punktach krytycznych funkcji ω dla $b = c$.

Nr.	Wartości własne λ_L macierzy linearyzacji $L(X)$
1	$\pm\sqrt{A}$
2	$\pm\sqrt{A}$
3	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}(B+2h\sqrt{B})}$
4	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}(B-2h\sqrt{B})}$

Podziękowanie

Prof. dr. hab. J. Mozrzymasowi dziękuję bardzo za krytyczne przejrzenie rękopisu oraz słowa zachęty przy pisaniu powyższej pracy.

Dr. Z. Oziewiczowi pragnę wyrazić gorące podziękowanie za szereg owocnych dyskusji, wiele cennych rad i za udostępnienie wyników pracy [7] przed jej opublikowaniem.

Literatura

[1] W.B. Bierestecki, E.M. Lifszyc, L.P. Pitajewski **„Relatywistyczna teoria kwantów"** tom 1 PWN Warszawa 1972

[2] G. Białkowski, R. Sosnowski **„Cząstki ebementarne"** PWN Warszawa 1970

[3] W. J. Nowożiłow **„Wwiedenie w fizyku elementarnych czastic"** Nauka Moskwa 1973

[3] P.D.B. Collins, E.J. Squires **„Regge Poles in Particle Physics"** Springer Verlag New York 1968

[5] E. Bycling, K. Kajantie **"Particle Kinematics"** John Wiley and Sons London 1973

[6] T. W. Kibble Phys. Rev. **117(4)**, 1159 (1960)

[7] Z. Oziewicz **„The Physical Regions on the Mandelstam Plane as the Lie Group Space"** Hadronic Journal Vol. 3, Nr. 4 (1980)

[8] W.I. Arnold **„Równania różniczkowe zwyczajne"** PWN Warszawa 1975

[9] J.W. Milnor **"Topology from the Differentialle Viewpoint"** The University Press of Virginia 1965

[10] J. Sławianowski **„Geometria przestrzeni fazowych"** PWN Warszawa 1975

[11] A.H. Wallace **"Differential Topology"** First Steps, W.A. Beniamin New York 1968

[12] W. Bronsztajn, K.A. Siemiendajew **„Matematyka Poradnik encyklopoedyczny"** PWN Warszawa 1976

[13] N.N. Bałutin, E.W. Leontowicz **„Mietody i prijemy kaczestwiennowo issledowania dynamiczeskich system na płoskosti"** Nauka. Moskwa 1978

[14] M. Golubitsky, V. Guillemin **"Stable mappings and their Singularities"** Springer Verlag New York 1973

W. GRUHN

Summary

Classification of the critical points of vector field on the Mandelstam plane has been presented. The Kibble function has been the first integral of this vector field. The results can be applied for a phenomenological analysis of the scattering data.