PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 5/82 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

Stefan CHAŁADUS

Funktor K_2 dla wybranych pierścieni

Część II

STRESZCZENIE

W części I udowodniliśmy, że $K_2(F_pC_{p^n})=1$, gdzie $F_pC_{p^n}$ jest pierścieniem grupowym nad ciałem p-elementowym z grupą cykliczną C_{p^n} a p jest liczbą pierwszą nieparzystą.

Teraz wyznaczamy grupę H_2F/H'_2F dla ciała $F=Q(\zeta_{p^r})$, gdzie ζ_{p^r} jest pierwiastkiem z jedynki stopnia p^r. Otrzymujemy stąd oszacowanie od dołu rzędu grupy $K_2(Z[\zeta_{p^r}])$, gdzie Z jest pierścieniem liczb całkowitych.

Rezultaty te wykorzystujemy do uzyskania od dołu rzędu grupy $K_2(ZC_{p^r})$.

Grupę H_2F/H'_2F wyznaczamy ponadto dla ciał postaci $F=Q(d^{\frac{1}{p}})$ oraz $F=Q(\zeta_p,d^{\frac{1}{p}})$.

Znane są oszacowania od dołu rzędu grupy $K_2(ZG)$, gdzie G jest p-grupą elementarną rangi n [5]. Mianowicie,

$$rz(K_2(ZG)) \geqslant \begin{cases} (n-1)2^n+2, & \text{jeżeli } p=2, \\ (n-1)(p^n-1)-\binom{p+n-1}{p}, & \text{jeżeli } p>2. \end{cases}$$

Jest to częściowe rozwiązanie problemu 22, postawionego w Lecture Notes in Math. 342 na str. 264. Dla $n=1$, jak widać, oszacowanie jest trywialne. W tym artykule rozpatrujemy właśnie ten przypadek i przypadek ogólniejszy, skończonej p-grupy cyklicznej G.

Dowodzimy, że jeżeli $G=C_{p^r}$ jest grupą cykliczną rzędu p^r, $r=1,2,...$, gdzie p jest liczbą pierwszą nieparzystą i 2 nie jest pierwiastkiem pierwotnym dla modułu p, to istnieje liczba naturalna $a \geqslant 2$ taka, że $rz(K_2(ZG)) \geqslant 2a^r$, dla $r=1,2,...$.

Oszacowanie to uzyskujemy z ciągu dokładnego Mayera-Vietorisa i z oszacowań od dołu rzędu grupy $K_2(Z[\zeta_{p^r}]$, gdzie ζ_{p^r} jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia p^r. Dowodzimy także, że rząd grupy $K_2(ZC_p)$ nie jest ograniczony z góry, gdy p przebiega liczby pierwsze.

Z drugiej strony, jeżeli 2 jest pierwiastkiem pierwotnym dla modułu p, to prezentowana metoda nie pozwala na ogół stwierdzić czy rząd grupy $K_2(ZC_p)$ jest większy od 2.

Opisy grup $K_2(ZG)$, dla grup G rzędu mniejszego od 7, znajdują się w [11]. Tam też, M. R. Stein stawia hipotezę:

$$K_2(ZG)=C_2 \oplus K_2(Z[\zeta_p]) \oplus H,$$

gdzie G jest grupą cykliczną rzędu pierwszego $p \geqslant 7$, natomiast H grupą cykliczną rzędu $\frac{p^2-1}{24}$.

Niniejszy artykuł jest kontynuacją Części I i jest z nią ściśle związany. Zachęcam więc czytelnika do lektury poprzedniego artykułu w nr 5 Zeszytów Naukowych.

Część wyników zawartych w obu artykułach, ze szkicami dowodów, ukazała się już w [4].

5. Związki między symbolami Hilberta a symbolami swojskimi

Niech od tego miejsca F będzie ciałem liczbowym, 0_F — pierścieniem liczb całkowitych ciała F. Ilość elementów ciała reszt $\bar{F}_v$ względem waluacji dyskretnej v ciała F nazywamy normą waluacji v i oznaczamy Nv. Niech $m(m_v)$ oznacza rząd grupy pierwiastków z jedynki zawartych w ciele $F(F_v)$ tzn. $m=rz(u(F))$ oraz $m_v=rz(u(F_v))$.

Określmy homomorfizmy $t_v:K_2F \to \bar{F}^{\cdot}_v$, gdzie v jest waluacją dyskretną i $n_v:K_2F \to u(F_v)$, gdzie v jest waluacją dyskretną albo rzeczywistą, wzorami

$$t_v(\{a, b\})=(a, b)_v \text{ i } n_v(\{a, b\})=[a, b]_v.$$

Dla waluacji dyskretnej v mamy diagram

$$\begin{tikzcd} K_2F \arrow[r, "n_v"] \arrow[d, "t_v"'] & u(F_v) \arrow[d, "l_v"] \\ \bar{F}^{\cdot}_v \arrow[r, "i_v"'] & C_{Nv-1} \end{tikzcd} \tag{4}$$

w którym $l_v:a_v \to a_v^c$, gdzie $a_v \varepsilon\, u(F_v)$ i $c=\frac{m_v}{Nv-1}$; natomiast C_{Nv-1} to grupa cykliczna rzędu $Nv-1$. Homomorfizmy n_v oraz t_v są epimorfizmami, na mocy końcowej uwagi Części I. Stąd $n_v^c=n_v{}^\circ l_v$ jest również epimorfizmem. Wykażemy, że $\mathrm{Ker}\, n_v^c \subset \mathrm{Ker}\, t_v$, co razem z powyższą uwagą implikuje równość Ker n_v^c = Ker t_v, która z kolei pociąga za sobą znany wzór

(5) $$n_v^c = i_v \circ t_v,$$

gdzie i_v jest odpowiednio dobranym izomorfizmem. Tak więc diagram (4) jest przemienny.

Niech $\{a, b\} \in \operatorname{Ker} n_v^c$. Pokażemy, że $\{a, b\} \in \operatorname{Ker} t_v$.

Przypadek a). $v(a) = v(b) = 0$. Z definicji symbolu swojskiego otrzymujemy natychmiast $(a, b)_v = 1$.

Przypadek b). $v(a) = 0$, $v(b) \neq 0$ (możemy założyć, że $v(b) > 0$ ponieważ $(a, b)_v = 1 \Leftrightarrow (a, b^{-1})_v = 1$). Na mocy własności 1 symbolu Hilberta, a jest normą elementu z ciała $E = F_v(d)$, gdzie $d = b^{\frac{1}{Nv-1}}$, tzn. $a = N_{E/F_v}(a_0 + a_1 d + \ldots + a_{Nv-2} d^{Nv-2}) = \prod_{j=0}^{Nv-2} (a_0 + a_1 \zeta^j d + \ldots + a_{Nv-2} (\zeta^j d)^{Nv-2}) = a_0^{Nv-1} + bx$, gdzie x, $a_i \in F_v$ oraz ζ jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia $Nv - 1$. Stąd $a \equiv a_0^{Nv-1} \equiv 1 \pmod{\beta}$. Teraz łatwo widać, że $(a, b)_v = 1$.

Przypadek c). $v(a) > 0$, $v(b) = 0$. Stosujemy własność 5 symbolu Hilberta. Wtedy $[b, a]_v^c = 1$. Postępując dalej jak w przypadku b) otrzymujemy $(b, a)_v = 1$, co po wykorzystaniu własności 3 symbolu swojskiego daje $(a, b)_v = 1$.

Przypadek d). $v(a)v(b) \neq 0$ (możemy założyć bez zmniejszania ogólności, że $0 < v(a) \leqslant v(b)$). Z założenia, $[a, b]_v^c = 1$. Na mocy własności 4 i 5, $[a, -a^{-1}]_v^c = 1$. Po pomnożeniu stronami obu równości mamy $[a, -a^{-1}b]_v^c = 1$, przy czym $v(-a^{-1}b) < v(b)$. Kontynuując to postępowanie, dochodzimy w końcu do sytuacji, w której $[a', b']_v^c = 1$ oraz ($v(a') = 0$ i $v(b') > 0$) albo ($v(a') > 0$ i $v(b') = 0$), tzn. do przypadku b) albo c) odpowiednio. Zatem $(a', b')_v = 1$ a więc również $(a, b)_v = 1$.

T w i e r d z e n i e 9 [7]. Niech v będzie waluacją dyskretną ciała liczbowego F. Homomorfizm
$\tau\colon K_2F \to \bigoplus_v F^{\cdot}_v$, w którym $\tau(\{a, b\}) = ((a, b)_v)_v$, jest epimorfizmem.

T w i e r d z e n i e 10 (C. Moore [1]). Następujący ciąg homomorfizmów grup

$$1 \to \operatorname{Ker} \eta \to K_2F \xrightarrow{\eta} \bigoplus_v u(F_v) \xrightarrow{\psi} u(F) \to 1,$$ w którym $\eta(\{a, b\}) = ([a, b]_v)_v$,

$\psi((a_v)_v) = \prod_v (a_v)^{\frac{m}{m_v}}$, dla $a_v \in u(F_v)$ oraz v jest waluacją dyskretną albo rzeczywistą, jest dokładny.

Z (5) wynika, że $\mathrm{Ker}\eta \subset \mathrm{Ker}\tau$. H. Garland [6] udowodnił, że $\mathrm{Ker}\tau$ jest skończone, natomiast D. Quillen [10], że jest izomorficzne z grupą $K_2 0_F$.

Niech $v_1, v_2, \dots, v_k$ będą walucjami rzeczywistymi, $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots$ — waluacjami dyskretnymi. Niech $a_j = a_{v_j} \in u(F_{v_j})$, $j=1,2\dots$. Określmy homomorfizm λ na elementach grupy

$\bigsqcup\limits_{v \text{ nie zesp.}} u(F_v)$ wzorem ($l_j = l_{v_j}$ jest określone jak w diagramie (4))

$\lambda(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots) = (l_{k+1}(a_{k+1}), l_{k+2}(a_{k+2}), \dots)$.

Niech $\iota = \bigsqcup\limits_{v \text{ dyskr.}} i_v$. Wówczas diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathrm{Ker}\eta & \to & K_2F & \xrightarrow{\eta} & \mathrm{Im}\eta & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \tau\downarrow & & \downarrow\lambda & & \\ 1 & \to & 1 & \to & \bigsqcup\limits_{v \text{ dyskr.}} \overline{F}^{\cdot}_v & \xrightarrow{\iota} & \bigsqcup\limits_{v \text{ dyskr.}} C_{Nv-1} & \to & 1 \end{array}$$

ma dokładne wiersze. Jest również przemienny na mocy (5). Z lematu węża i twierdzenia 10 otrzymujemy

$$\mathrm{Ker}\tau/_{\mathrm{Ker}\eta} = \mathrm{Im}\eta \cap \mathrm{Ker}\lambda = \mathrm{Ker}\psi \cap \mathrm{Ker}\lambda.$$

Stąd otrzymuje się, pochodzące od J. Browkina [3].

T w i e r d z e n i e 11. Grupa $^{\mathrm{Ker}\tau}/_{\mathrm{Ker}\eta}$ jest izomorficzna z grupą abelową, określoną za pomocą generatorów q_v, gdzie v przebiega waluacje rzeczywiste i dyskretne ciała F oraz relacji

$q_v^2 = 1$, dla v rzeczywistych

$q_v^c = 1$, dla v dyskretnych, $c = \dfrac{mv}{Nv-1}$

$\prod\limits_{v \text{ rzecz.}} q_v \cdot \prod (q_v)^{\frac{m_v}{m}} = 1$, gdzie drugi iloczyn przebiega takie waluacje dyskretne v, że $\zeta_l \in F$ dla $v(l) > 0$, l — pierwsze.

6. Oszacowanie od dołu rzędu grupy $K_2(ZC_pr)$.

Niech v będzie waluacją dyskretną ciała liczbowego F i niech $l = \mathrm{char.}\ \overline{F}_v$. Na mocy wniosku 2 do Lematu Hensela [2] mamy $m_v = n(Nv-1)$, gdzie n jest liczbą naturalną. Wykażemy, że $n = l^s$. Rzeczywiście, gdyby n było podzielone przez liczbę pierwszą $l' \neq l$, to wielomian $g(X) = X^{l'(Nv-1)} - 1$ byłby iloczynem wielomianów liniowych w $F_v[X]$ a więc również w $\overline{F}_v[X]$. Ilość czynników byłaby większa od Nv, stąd wielomian g(X) posiadałby pierwiastki wielokrotne w F_v, co jest niemożliwe, ponieważ jego pochodna $g'(X) \neq 0$ dla $X \in \overline{F}^{\cdot}_v$. Zatem $m_v = l^s(Nv-1) = l^s(l^f-1)$, gdzie f nazywa się stopniem rozgałęzienia ciała reszt $\overline{F}_v$ względem Q_l. Stąd na mocy twierdzenia o stopniu rozszerzenia skończonego ciała zupełnego względem waluacji dyskretnej oraz na mocy [8] mamy

WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA BIBLIOTEKA Gł. W CZĘSTOCHOWIE

$(Q_l(\zeta):Q_l)=\varphi(l^s\cdot f$, gdzie ζ jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia m_v. Otrzymujemy więc

$(F:Q)\geqslant ef=(F_v:Q_l)=(F_v:Q_l(\zeta))(Q_l(\zeta):Q_l)=k\cdot\varphi(l^s)\cdot f.$

Widać stąd, że $s=0$ dla prawie wszystkich v. Ponadto,

(6) $e=k\cdot\varphi(l^s)$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Ponieważ potrafimy obliczyć e (stopień rozgałęzienia waluacji v względem ciała Q_l) dla rozszerzenia $F_v=Q_l(\zeta_{p^r})$, więc równość (6) pozwoli nam na wyznaczenie wykładnika s a tym samym na obliczenie m_v. Otóż, dla liczby pierwszej nieparzystej p, możliwe są następujące przypadki:

a) $l=2\Rightarrow e=1\Rightarrow\varphi(2^s)=1\Rightarrow(s=1$ albo $s=0)$. Ale pierwiastek pierwotny stopnia 2 z jedynki (-1) należy do Q_2 czyli $s=1$. A zatem $m_v=2(2^f-1)$.

b) $l=p\Rightarrow e=\varphi(p^r)\Rightarrow s\leqslant r$. Nierówność przeciwna wynika z faktu, że $F_v=Q_p(\zeta_{p^r})$ zawiera pierwiastek pierwotny z jedynki stopnia p^r, tzn. p^r dzieli $m_v=p^s(p^f-1)$. Wobec tego $s=r$ czyli $m_v=p^r(p^f-1)$.

c) $l\neq p,2\Rightarrow e=1\Rightarrow\varphi(l^s)=1\Rightarrow s=0$.
A zatem $m_v=l^f-1$.

Ustalmy $i\in\{1,2,\ldots,r\}$. Niech $F=Q(\zeta_{p^i})$, p — liczba pierwsza nieparzysta. Mamy $0_F=Z[\zeta_{p^i}]$, $m=2p^i$. Niech $v_1, v_2,\ldots, v_{g_i}$ będą waluacjami dyskretnymi, odpowiadającymi dzielnikom pierwszym ideału (2) w ciele F.

Liczby f_i, g_i są określone przez rozkład ideału (2). Mianowicie, $f_ig_i=p^{i-1}(p-1)$, gdzie f_i jest najmniejszą liczbą naturalną, spełniającą kongruencję $2^{f_i}\equiv1\pmod{p^i}$ [8] Niech v_0 będzie waluacją odpowiadającą jedynemu dzielnikowi pierwszemu ideału (p) w F. Mamy

$m_{v_j}=2(2^{f_i}-1)$, $Nv_j=2^{f_i}$, dla $1\leqslant j\leqslant g_i$;

$m_{v_0}=p^i(p-1)$, $Nv_0=p$.

Relacje w twierdzeniu 11 przyjmują teraz postać

$$q_1^2=q_2^2=\ldots=q_{g_i}^2=1,$$

$$q_0^{p^i}=1,$$

$$q_0^{\frac{p-1}{2}}\cdot\prod_{j=1}^{g_i}(q_j)^{p^{-i}(2^{f_i}-1)}=1.$$

Ponieważ liczba $p^{-i}(2^{f_i}-1)$ jest nieparzysta, ostatnia równość daje się zapisać w postaci

$$q_0^{-\frac{1}{2}(p-1)}\cdot q_1\cdot\ldots\cdot q_{g_i}=1.$$

Podnosząc obie strony do kwadratu i wykorzystując $q_0^{p^i}=1$ otrzymamy $q_0=1$. Wobec tego grupa $\mathrm{Ker}\tau/\mathrm{Ker}\eta$, dla ciała $F=Q(\zeta_{p^i})$, jest wyznaczona przez generatory $q_1, \dots, q_{g_i}$ oraz relacje

$$q_1^2 = \dots = q_{g_i}^2 = 1, \quad q_1 \cdot \ldots \cdot q_{g_i} = 1.$$

Oznacza to, że jest izomorficzna z 2-grupą elementarną rangi $g_i - 1$, skąd w szczególności, dla $F = Q(\zeta_{p^i})$, dostajemy

$$(7)\quad rz(\mathrm{Ker}\,\tau) = rz(K_2 0_F) = rz(K_2(Z[\zeta_{p^i}])) \geqslant 2^{g_i - 1}.$$

Już przy $i = 1$, dla odpowiednich liczb pierwszych p, rząd grupy $K_2(Z[\zeta_p])$ okaże się nie mniejszy od potęgi liczby 2 z wykładnikiem naturalnym, większym od jedynki. Pozwoli to na nietrywialne oszacowanie rzędu $K_2(ZC_{p^r})$, dla tych właśnie p.

Przyjmijmy w twierdzeniu 4

$$A = ZC_{p^r}, \quad \alpha = \beta = (a_1), \quad B = A/(a_2),$$

gdzie (a_1) i (a_2) są ideałami określonymi w twierdzeniu 3. Wówczas

$$A' = A/(a_1) = Z[\zeta_{p^r}], \quad B = A/(a_2) = ZC_{p^{r-1}}, \quad B' = B/(a_1) = F_p C_{p^{r-1}}.$$

Dla tak określonych A, A', B, B', na mocy twierdzenia 3, diagram homomorfizmów naturalnych

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

jest kwadratem kartezjańskim (ponieważ $(a_1) \cap (a_2) = 0$, więc $B' = A/(a_1)+(a_2)$). Wobec tego spełnione są założenia twierdzenia 4.
Z tezy tego twierdzenia dostajemy następujący fragment ciągu dokładnego Mayera-Vietorisa:

$$(8)\quad K_2(ZC_{p^r}) \to K_2(Z[\zeta_{p^r}]) \oplus K_2(ZC_{p^{r-1}}) \to K_2(F_p C_{p^{r-1}}).$$

Ale na mocy wniosku do twierdzenia 7 mamy, $K_2(F_p C_{p^{r-1}}) = 1$. Stąd oraz z (8)

$$rz(K_2(ZC_{p^r})) \geqslant rz(K_2(ZC_{p^{r-1}}))\, rz(K_2(Z[\zeta_{p^r}])), \text{ dla } r \geqslant 1.$$

Proste rozumowanie indukcyjne oraz znana równość $rz(K_2 Z) = 2$, dają oszacowanie

$$(9)\quad rz(K_2(ZC_{p^r})) \geqslant 2 \prod_{i=1}^{r} rz(K_2(Z[\zeta_{p^i}])).$$

Na mocy oszacowania (7) mamy zatem

Twierdzenie 12. Niech g_i będzie ilością różnych czynników pierwszych ideału (2) w ciele $Q(\zeta_{p^i})$, gdzie p jest liczbą pierwszą nieparzystą. Prawdziwa jest nierówność

$$rz(K_2(ZC_{p^r})) \geqslant 2^{g_1 + g_2 + \dots + g_r - r + 1}.$$

Wniosek. Oczywiście, $g_{i+1} \geqslant g_i$ [8]. Zatem

$$rz(K_2(ZC_{p^r})) \geqslant 2^{rg_1 - r+1}$$

Ponadto, $g_1=1$ wtedy i tylko wtedy gdy 2 jest pierwiastkiem pierwotnym dla modułu p, tzn. gdy $f_1=p-1$.

Uwaga 1. Jeżeli $2^{p-1} \not\equiv 1$ mod. p^2), to $f_{i+1}=pf_i$ oraz $g_1=\ldots=g_r$. Wiadomo, że dla p nie większych od 200183 jedynie p=1093 i p=3511 spełniają kongruencję $2^{p-1}\equiv 1$ (mod. p^2) [9]. Tak więc oszacowanie we wniosku jest na ogół równoważne z oszacowaniem w twierdzeniu 12.

Uwaga 2. Jeżeli p=2, to na mocy [8], $g_i=1$ dla każdego $i=1,2,\ldots,r$. Twierdzenie 12 jest więc również w tym przypadku prawdziwe w sposób trywialny.

Uwaga 3. Jeżeli $G=G_1 \oplus G_2$, to

$$rz(K_2(ZG)) \geqslant \frac{1}{2} \cdot rz(K_2(ZG_1)) \cdot rz(K_2(ZG_2)).$$

Dowód. Wykorzystamy znany w teorii grup lemat: Jeżeli H, K są podgrupami grupy Y, to $rz(H \cap K) rz(HK) = rz(H) rz(K)$.

Podstawmy $H=K_2(ZG_1)$, $K=K_2(ZG_2)$. Oczywiście, H, K są podgrupami grupy $Y=K_2(ZG)$ a więc również HK jest podgrupą w $K_2(ZG)$.

Dalej, $H \cap K = K_2Z = C_2$, co kończy dowód.

7. Grupa ilorazowa H_2F/H'_2F dla pewnych ciał liczbowych F.

Niech g(l) będzie ilością różnych czynników pierwszych ideału (l) w ciele liczbowym F. Grupy Kerτ, Kerη oznacza się zwykle przez H_2F, H'_2F odpowiednio.

T w i e r d z e n i e 13. Niech p będzie liczbą pierwszą nieparzystą, $d > 1$ — liczbą naturalną, niepodzielną przez p-tą potęgę liczby naturalnej różnej od jedynki.

(i) Jeżeli $F=Q(\zeta_{p^r})$, to $H_2F/H'_2F = C_2^{g(2)-1}$.

(ii) Jeżeli $F=Q(d^{\frac{1}{p}})$, to

$$H_2F/H'_2F = \begin{cases} C_2^{g(2)}, \text{ gdy } (p)=\beta^p, \ \beta \text{ — ideał pierwszy,} \\ C_2^{g(2)} \oplus C_p, \text{ gdy } (p)=\beta_1\beta_2^{p-1}, \ \beta_1 \neq \beta_2. \end{cases}$$

(iii) Jeżeli $F=Q(\zeta_p, d^{\frac{1}{p}})$, to $H_2F/H'_2F = C_2^{g(2)-1} \oplus C_p^{g(p)-1}$.

Dowód części (i) znajduje się w punkcie 6.

Zauważmy, że w pozostałych przypadkach liczba k występująca we wzorze (6) jest równa

$$k=(F_v:Q_l(\zeta))=(Q_l(\zeta, d^{\frac{1}{p}}):Q(\zeta)),$$

gdzie ζ jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia m_v. Wobec tego k może przyjmować tylko dwie różne wartości, 1 albo p.
Liczbę s wyznaczymy z (6) oraz ze znajomości rozkładu ideału (l) w danych ciałach.

Dowód (ii). Możliwe są następujące przypadki (por. przypadki a), b), c) rozpatrzone w punkcie poprzednim).

a_1) $l=2 \mid d \Rightarrow e=p \Rightarrow k=p,\ s=1.$

a_2) $l=2 \nmid d \Rightarrow e=1 \Rightarrow k=1,\ s=1.$

Jeśli $l=p$, to na mocy nierówności $p=(F:Q) \geqslant ef$ otrzymujemy

b_1) $l=p,\ k=p \Rightarrow e=p,\ s=0.$

b_2) $l=p,\ k=1 \Rightarrow e_1=1,\ s_1=0$

oraz $e_2=p-1,\ s_2=1.$

c_2) $2, p \neq l \mid d \Rightarrow e=1 \Rightarrow k=1,\ s=0.$

c_1) $2, p \neq l \mid d \Rightarrow e=p \Rightarrow k=p,\ s=0.$

(Jednocześnie pokazaliśmy, że przypadki rozkładu ideału (p) wymienione w (ii) są jedyne. Dla $p=3$ pierwszy rozkład ma miejsce gdy $d \not\equiv \pm 1$ (mod. 9), natomiast drugi gdy $d \equiv \pm 1$ (mod. 9).

Ciało $Q(d^{\frac{1}{p}})$ ma jedną waluację rzeczywistą, zatem na mocy twierdzenia 11, grupa $H_2F/_{H'_2F}$ jest zadana przez relacje

$$q_\infty^2 = 1$$

$$q_{v_i}^2 = 1, \text{ gdzie } v_i(2) > 0,\ i=1,2,\ldots,\ g(2)$$

$$q_v^2 = 1, \text{ gdzie } v \text{ odpowiada ideałowi } \beta_2 \text{ (tylko w przypadku } b_2))$$

$$q_\infty \prod_{i=1}^{g(2)} q_{v_i} = 1.$$

Druga część twierdzenia została tym samym udowodniona.

Dowód (iii). Odpowiednie przypadki są następujące

a_1) $l=2 \mid d \Rightarrow e=p \Rightarrow k=p,\ s=1.$

a_2) $l=2 \nmid d \Rightarrow e=1 \Rightarrow k=1,\ s=1.$

Aby otrzymać dwa następne przypadki wystarczy porównać możliwe rozkłady ideału (p) w poprzednio rozpatrywanych ciałach.

b_1) $l=p,\ k=p \Rightarrow e=p(p-1),\ s=1.$

b_2) $l=p,\ k=1 \Rightarrow e=p-1,\ s=1.$

c_1) $2,p \neq l \mid d \Rightarrow e=p \Rightarrow k=p,\ s=0.$

c_2) $2,p \neq l \nmid d \Rightarrow e=1 \Rightarrow k=1,\ s=0.$

Ciało $Q(\zeta_p, d^{\frac{1}{p}})$ nie posiada waluacji rzeczywistych. Z twierdzenia 11 otrzymujemy więc relacje

$$q_{v_i}^2 = 1, \text{ gdzie } v_i(2) > 0, \; i=1,2,\ldots, g(2)$$

$$q_{w_j}^p = 1, \text{ gdzie } w_j(p) > 0, \; j=1,2,\ldots, g(p)$$

$$\prod_{i=1}^{g(2)} q_{v_i} \cdot \prod_{j=1}^{g(p)} (q_{w_j})^{\frac{p-1}{2}} = 1.$$

Podnosząc ostatnią równość obustronnie do kwadratu i wykorzystując poprzednie mamy

$$\prod_{j=1}^{g(p)} q_{wj} = 1 \text{ a więc również } \prod_{i=1}^{g(2)} q_{vi} = 1,$$

co kończy dowód części (iii) twierdzenia.
Przypadek rozszerzenia kwadratowego ciała liczb wymiernych został rozpatrzony w artykule [3].

Uwaga. Analiza poszczególnych przypadków pozwala stwierdzić, że m_v jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb m oraz Nv — 1, dla wybranych w twierdzeniu 13 ciał.

LITERATURA

[1] H. Bass, K_2 des corps globaux, Sèm. Bourbaki, 1970/71, nr 394, Lecture Notes 244 (str. 237).

[2] J. Browkin, Teoria ciał, Warszawa 1977.

[3] J. Browkin, Funktor K_2 w algebraicznej teorii liczb, Prace Matematyczne T. 10, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego nr 332, 1980.

[4] S. Chaładus, Lower bounds of the order of $K_2(ZG)$ for a cyclic p-group G, Biuletyn PAN nr 27, 1979, (661—669).

[5] P.K. Dennis, M.E. Keating, M.R. Stein, Lower bounds for the order of $K_2(ZG)$ and $Wh_2(G)$, Math. Ann. nr 223, 1976, (97—103).

[6] H. Garland, A finiteness theorem for K_2 of a number field, Ann. of Math., nr 2(94), 1971, (534—548).

[7] J. Milnor, Introduction to algebraic K-theory, Princeton 1971, (Wniosek 16.2).

[8] W. Narkiewicz, Elementary and analytic theory of algebraic numbers, Warszawa 1974, (Twierdzenie 4.14).

[9] E.H. Pearson, Math. Comp. 17, nr 82, 1963, (194—195).

[10] D. Quillen, Higher K-theory for categories with exact sequences, Proc. of the Symp. „New developments in topology", Oxford 1972.

[11] M.R. Stein, Excision and K_2 of group rings, Journal of Pure and Applied Algebra, nr 18, 1980, (213—224).

THE FUNCTOR K_2 FOR SELECTED RINGS
Part II

Summary

In part I, we have proved that $K_2(F_pC_{p^n})=1$, where $F_pC_{p^n}$ is the group ring over the field of p-elements F_p with the cyclic group C_{p^n} and p is an odd prime.

Now we determine the group ${}^{H_2F}/_{H'_2F}$ for the field $F=Q(\zeta_{p^r})$, where ζ_{p^r} is the primitive p^r — th root of unity. Thus we obtain the lower bound of the order of $K_2(Z[\zeta_{p^r}])$, where Z is the ring of integers.

Then we use these results to get lower bounds of the order of $K_2(ZC_{p^r})$.

Moreover, we determine the group ${}^{H_2F}/_{H'_2F}$ for the fields of the form

$$F=Q(d^{\frac{1}{p}}) \text{ and } F=Q(\zeta_p, d^{\frac{1}{p}}).$$