PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 3/1980 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

Zygmunt PACHULSKI

Oszacowanie funkcjonału $\mathrm{Re}\{-[1+zF''(z)/F'(z)]\}$ określonego w klasie $\sum_{\alpha}^{*}(\beta,m)$

STRESZCZENIE

Klasa $\sum_{\alpha}^{*}(\beta, m)$ zostałaa zdefiniowana w pracy „0 pewnej klasie funkcji meromorficznych w kole jednostkowym" [3]. W pracy powyższej omówiono także niektóre własności funkcji tej klasy.

Praca niniejsza stanowi kontynuację dabań na powyższy temat. Przedmiotem badań jest funkcjonał $\mathrm{Re}\{-[1+zF''(z)/F'(z)]\}$ określony na klasie $\sum_{\alpha}^{*}(\beta, m)$.

Wykorzystując związki między funkcjami klasy $\sum_{\alpha}^{*}(\beta, m)$ i klasy P funkcji o dodatniej części rzeczywistej otrzymano oszacowanie funkcjonału $\mathrm{Re}\{-[1+zF''(z)/F'(z)]\}$ w klasie $\sum_{\alpha}^{*}(\beta, m)$. Podane w twierdzeniach 1 i 2 dokładne oszacowania badanego funkcjonału zostały uzyskane przy pomocy metody V.A. Zmorowicza oraz rezultatów autora zawartych w pracy [1].

1. Oznaczmy przez P, klasę funkcji postaci

$$p(z)=1+p_1z+p_2z^2+\ldots$$

holomorficznych w kole $K=\{z : |z|<1\}$ i dla każdego $z \in K$ spełniających warunek $\mathrm{re}\, p(z) > 0$.

Niech Σ oznacza klasę funkcji F meromorficznych i jednolistnych w kole K i w otoczeniu $z=0$ mających rozwinięcie postaci:

$$w=F(z)=\frac{1}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$$

Przez $\sum^{*}$ oraz $\sum_{\alpha}^{*}$ oznaczać będziemy odpowiednio podklasy rodziny $\sum$ funkcji gwiaździstych i gwiaździstych rzędu α, $0 \leqslant \alpha < 1$.

Symbolami $P(m)$, $\sum(m)$, $\sum^{*}(m)$, $\sum_{\alpha}^{*}(m)$ oznaczać będziemy podklasy m — symetrycznych funkcji odpowiednio klas P, $\sum$, $\sum^{*}$, $\sum_{\alpha}^{*}$.

Niech wreszcie $\sum_{\alpha}^{*}(\beta, m)$ oznacza klasę funkcji $F \in \sum$ spełniających dla każdego $z \in K$ warunek

$$-\frac{zF''(z)}{F'(z)}=[(1-\alpha)\ p(z)+\alpha]^{\beta}, \tag{1.1}$$

gdzie $p \in P(m)$ oraz $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 < \beta \leqslant 1$ są dowolnie ustalonymi liczbami rzeczywistymi, m — dowolnie ustaloną liczbą naturalną a przez $[(1-\alpha)\ p(z)+\alpha]^{\beta}$ rozumiemy gałąź główną odpowiedniej potęgi.

Klasa $\sum_{\alpha}^{*}(\beta, m)$ została zdefiniowana w pracy [3], w której omówiono także niektóre własności funkcji tej klasy.

W niniejszej pracy otrzymano oszacowanie górne i dolne funkcjonału $\mathrm{Re}\{-[1+zF''(z)/F'(z)]\}$ określonego w klasie $\sum_{\alpha}^{*}(\beta, m)$.

2. Z warunku (1.1) wynika, że dla każdej funkcji $F \in \sum_{\alpha}^{*}(\beta, m)$ istnieje funkcja $p \in P(m)$ taka, że dla każdego $z \in K$ zachodzi równość

$$(2.1) \qquad -\left[1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right]=[(1-\alpha)\,p(z)+\alpha]^{\beta}-\frac{\beta(1-\alpha)\,zp'(z)}{(1-\alpha)\,p(z)+\alpha}$$

Aby uzyskać oszacowanie z dołu rozważanego funkcjonału oznaczmy:

$$(2.2) \quad \omega(r)=\min\left\{\mathrm{re}\left[-\left((1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right)\right]: |z|=r<1,\ F\in\sum_{\alpha}^{*}(\beta, m)\right\}.$$

Stąd i z równości (2.1) na podstawie [4] mamy:

$$(2.3) \quad \omega(r)=\min\left\{\mathrm{re}\left[((1-\alpha)\,p^{*}(z)+\alpha)^{\beta}-\frac{\beta(1-\alpha)\,zp'^{*}(z)}{(1-\alpha)\,p^{*}(z)+\alpha}\right]: |z|=r<1,\ p^{*}\in P_2(m)\right\}$$

gdzie $P_2(m)$ jest klasą funkcji postaci

$$(2.4) \qquad p^{*}(z)=\frac{1+\lambda}{2}\cdot\frac{1+\varepsilon_1 z^m}{1-\varepsilon_1 z^m}+\frac{1-\lambda}{2}\cdot\frac{1+\varepsilon_2 z^m}{1-\varepsilon_2 z^m}$$

przy czym $-1\leqslant\lambda\leqslant 1$, $|\varepsilon_1|=|\varepsilon_2|=1$.

Korzystając z lematów 1 i 2 (por. [1] str. 70) i przyjmując $h=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ otrzymujemy:

$$(2.5) \quad \omega(r)=\min\left\{\mathrm{re}\left[\left(\frac{p^{*}(z)+h}{1+h}\right)^{\beta}-m\beta\frac{(p^{*}(z))^2-1}{2(p^{*}(z)+h)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{m\beta(\varrho^2-|p^{*}(z)-c|^2)\eta}{2(p^{*}(z)+h)}\right]: |z|=r<1,\ p^{*}\in P_2(m)\right\}$$

gdzie $z=re^{i\varphi}$, $0\leqslant r<1$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$

$$(2.6) \qquad c=\frac{1+r^{2m}}{1-r^{2m}},\quad \varrho=\frac{2r^m}{1-r^{2m}} \qquad \text{natomiast } \eta=\eta_1\cdot\eta_2, \text{ przy czym}$$

$$(2.7) \qquad \eta_k=\varepsilon_k\cdot e^{im\varphi}\cdot\frac{1-\bar{\varepsilon}_k e^{-im\varphi}r^m}{1-\varepsilon_k e^{im\varphi}r^m},\quad k=1,2.$$

Podstawiając:

$$(2.8) \qquad p^{*}(re^{i\varphi})+h=se^{it}$$

gdzie $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $c+h-\varrho\leqslant s\leqslant c+h+\varrho$ i korzystając z nierówności $\mathrm{re}(e^{-it}\eta)\geqslant -1$ oraz z równości $\varrho^2-|se^{it}-h-c|^2=2cs\cos t+2hs\cos t-s^2-h^2-2hc-1$ otrzymujemy z (2.5) nierówność:

$$\omega(r)\geqslant\min_{s,t} W(s,t)$$

gdzie funkcja

$$(2.9)\qquad W(s,t)=\frac{s^{\beta}\cos(\beta t)}{(1+h)^{\beta}}+\beta m\,\frac{1-h^2-s^2}{2s}\cos t+\beta hm-$$

$$-\beta m(h+c)\cos t+\beta m\,\frac{s^2+h^2+2hc+1}{2s}$$

jest określona w kole D_r, przy czym

$$(2.10)\qquad D_r=\{(s,t):s^2-2s(c+h)\cos t+h^2+2hc+1\leqslant 0:-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant$$

$$\frac{\pi}{2},\ c+h-\varrho\leqslant s\leqslant c+s+\varrho\}.$$

Można wykazać (por. np. [5] str. 524), że funkcja W (s, t) może osiągnąć minimum w kole D_r tylko na średnicy $t=0$.

Zagadnienie wyznacza minimum funkcji $\omega(r)$ sprowadza się więc do wyznaczenia minimum funkcji $W_1(s)=W(s,0)$ na przedziale $[c+h-\varrho,\ c+h+\varrho]$.

Zachodzi następujący lemat.

Lemat 1. Funkcja

$$(2.11)\qquad W_1(s)=\frac{s^{\beta}}{(1+h)^{\beta}}+\beta m\,\frac{1+hc}{s}-\beta mc$$

osiąga w punkcie

$$(2.12)\qquad s_1=c+h+\varrho$$

minimum na przedziale $[c+h-\varrho,\ c+h+\varrho]$, jeśli spełniona jest nierówność $s_1<s_2$, gdzie

$$(2.13)\qquad s_2=(1+h)^{\frac{\beta}{1+\beta}}\cdot(1+hc)^{-\frac{1}{1+\beta}}\cdot m^{\frac{1}{1+\beta}}$$

Jeżeli natomiast $s_2\leqslant s_1$, to funkcja $W_1(s)$ osiąga swoje minimum w punkcie s_2. Minimum to wynosi odpowiednio:

$$(2.14)\qquad M_1(r)=M_1(r;\beta,h,m)=\left(\frac{c+h+\varrho}{1+h}\right)^{\beta}+\beta m\left(\frac{1+hc}{c+h+\varrho}\right)-\beta mc$$

$$(2.15)\qquad M_2(r)=M_2(r;\beta,h,m)=(1+\beta)\left[\frac{m(1+hc)}{1+h}\right]^{\frac{\beta}{1+\beta}}-\beta mc$$

Dowód. Z (2.11) wynika, że $W_1'(s)=0$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$s=s_2=[m(1+hc)(1+h)^{\beta}]^{\frac{1}{1+\beta}}\ \text{i}\ W_1'(s)<0\ \text{dla}\ 0<s<s_2,\ W_1'(s)>0$$

$$\text{dla}\ s>s_2\ \text{oraz}\ W''(s_2)>0.$$

Można wykazać, że dla $h\geqslant 0$, $0<\beta\leqslant 1{,}0\leqslant r<1$ zachodzi nierówność $s_2\geqslant s+h-\varrho$. Tym samym dla $s_2\leqslant c+h+\varrho$ funkcja $W_1(s)$ przyjmuje

minimum w punkcie s_2, natomoast gdy $c+h+\varrho < s_2$ funkcja przyjmuje minimum w punkcie $s_1=c+h+\varrho$.

Twierdzenie 1. Dla każdej funkcji $F \in \sum_{\alpha}^{*}(\beta, m)$ i dla każdego ustalonego z, $|z|=r<1$ oraz przy ustalonych α, β i m zachodzi dokładne oszacowanie:

$$\text{(2.16)} \qquad \operatorname{re}\left\{-\left[1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right]\right\} \geqslant \begin{cases} M_1(r), & \text{gdy } s_1 < s_2 \\ M_2(r), & \text{gdy } s_2 \leqslant s_1 \end{cases}$$

gdzie s_1, s_2, $M_1(r)$, $M_2(r)$ określone są odpowiednio wzorami (2.12), (2.13), (2.14) i (2.15). Równości w oszacowaniu (2.16) realizują odpowiednio funkcje postaci:

$$\text{(2.17)} \qquad F_1(z)=\frac{1}{z}\exp\int_0^z\left[1-\left(\frac{1+(1-2\alpha)\,e^{-im\varphi}x^m}{1-e^{-im\varphi}x^m}\right)^{\beta}\right]\frac{dx}{x}$$

$$\text{(2.18)} \qquad F_2(z)=\frac{1}{z}$$

$$\cdot\exp\int_0^z\left[1-\left(\frac{1+2\lambda(1-\alpha)\,e^{-im\varphi}x^m+(1-2\alpha)\,e^{-2im\varphi}x^{2m}}{1-e^{-2im\varphi}x^{2m}}\right)^{\beta}\right]\frac{dx}{x}$$

gdzie $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, natomiast

$$\text{(2.19)} \qquad \lambda=\frac{(s_2-h)(1-r^{2m})-(1+r^{2m})}{2r^m}$$

Dowód. Oszacowanie (2.16) wynika z lematu 1. Wykażemy, że oszacowanie (2.16) jest dokładne. Oznaczmy przez p^* funkcję rodziny $P_2(m)$, dla której zachodzi równość

$$\text{(2.20)} \qquad p^*(re^{i\varphi})+h=s_1$$

gdzie $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $s_1=c+h+\varrho$.

Z lematu 1 (por. [1] str. 70) oraz z (2.20) wynika, że:

$$d=\varrho \text{ oraz } \gamma=1.$$

Stąd i z lematu 1 (por. [1] str. 70) wynika, że $\lambda_1=0$ lub $\lambda_2=0$ lub $\beta_1=\beta_2$, gdzie $\eta_k=e^{i\beta_k}$, $k=1,2$.

Jeżeli $\lambda_1=0$ lub $\lambda_2=0$, gdzie $\lambda_1=\frac{1+\lambda}{2}$, $\lambda_2=\frac{1-\lambda}{2}$, to z (2.4) mamy

$$\text{(2.21)} \qquad p^*(z)=\frac{1+\varepsilon z^m}{1-\varepsilon z^m}, \quad |\varepsilon|=1.$$

Jeżeli natomiast $\beta_1=\beta_2$, to wobec $\eta_k=e^{i\beta_k}$, $k=1,2$ mamy $\eta_1=\eta_2$ a stąd z lematu 1 (por [1] str. 70) mamy $\varepsilon_1=\varepsilon_2$. Uwzględniając ostatnią równość w (2.4) mamy znów (2.21). Z (2.20) i (2.21) dla $z=re^{i\varphi}$ otrzymujemy $\varepsilon=e^{-im\varphi}$.

Funkcja (2.21) przyjmuje więc postać

$$p^*(z)=\frac{1+e^{-im\varphi}z^m}{1-e^{-im\varphi}z^m} \tag{2.22}$$

Niech F_1 będzie funkcją klasy $\sum_\alpha^*(\beta, m)$ postaci (2.1) (por. lemat 2,1 [3]) gdzie na miejsce p podstawiona została funkcja p^* określona wzorem (2.22). W rezultacie otrzymujemy funkcję postaci (2.17).

Oznaczmy następnie przez p^{**} funkcję rodziny P_2 (m) dla której zachodzi równość

$$p^{**}(re^{i\varphi})+h=s_2 \tag{2.23}$$

gdzie $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, s_2 określona wzorem (2.13). Ponieważ s_2 jest punktem w którym funkcja W_1 (s) osiąga minimum absolutne na przedziale $(0, \infty)$, więc z nierówności $re\,(e^{-it}\eta)\geqslant -1$, wobec $t=0$ otrzymujemy $\eta=-1$ a stąd $\eta_1\cdot\eta_2=-1$. Z (2.23) i z lematu 1 (por [1] str. 70) wynika, że $\gamma=\bar{\gamma}$. Stąd z kolei mamy $\eta_1+\eta_2=0$. Rozwiązaniem układu: $\eta_1\cdot\eta_2=-1$ i $\eta_1+\eta_2=0$ są dwie pary liczb: $\eta_1=1$ $\eta_2=-1$ oraz $\eta_1=-1$, $\eta_2=1$. Stąd i z lematu 1 (por. [1] str. 70) otrzymujemy

$$\varepsilon_1=e^{-im\varphi},\quad \varepsilon_2=-e^{-im\varphi}.$$

Uwzględniając ostatnie równości w (2.4) otrzymujemy:

$$p^{**}(z)=\frac{1+2\lambda e^{-im\varphi}z^m+e^{-2im\varphi}z^{2m}}{1-e^{-2im\varphi}z^{2m}} \tag{2.24}$$

Z (2.23) i 2.24) wyznaczamy

$$\lambda=\frac{(s_2-h)(1-r^{2m})-(1+r^{2m})}{2r^m}$$

Niech z kolei F_2 będzie funkcją klasy $\sum_\alpha^*(\beta, m)$ określoną wzorem (2.1) (por. lemat 2.1 [3]) gdzie na miejsce p podstawiona została funkcja p^{**} określona wzorem (2.24). W konsekwencji otrzymujemy funkcję postaci (2.18).

Bezpośrednie wyliczenia pozwalają stwierdzić, że funkcje postaci (2.17) i (2.18) realizują równości w oszacowaniu (2.16) dla $z=re^{i\varphi}$ $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, co kończy dowód.

3. Na drodze analogicznych rozważań jak wyżej wyznaczymy

$$\Omega(r)=\max\left\{re\left[-\left(1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right)\right]:|z|=r<1,\ F\in\sum_\alpha^*(\beta, m)\right\} \tag{3.1}$$

Zachowując przyjęte wyżej oznaczenia oraz tok postępowania i korzystając z lematów 1 i 2 (por. [1] str. 70 i 71) oraz z nierówności

$$re\,(e^{-it}\eta)\leqslant 1 \tag{3.2}$$

otrzymujemy:

$$\Omega(r)\leqslant\max_{(s,t)\in D_r} B(s, t) \tag{3.3}$$

gdzie

$$B(s,t)=\frac{s^{\beta}\cos(\beta t)}{(1+h)^{\beta}}+\beta m\frac{1-s^2-h^2}{2s}\cos t+\beta m(c+h)\cos t+ \tag{3.4}$$

$$+\beta mh-\beta m\frac{s^2+h^2+2hc+1}{2s}$$

natomiast D_r określone jest wzorem (2.10). Bezpośrednie wyliczenia (por. [5] str. 524) pozwalają stwierdzić, że funkcja $B(s,t)$ może osiągnąć maximum w obszarze domkniętym D_r tylko na średnicy $t=0$.

Wyznaczenie maximum funkcji $\Omega(r)$ sprowadza się więc do wyznaczenia maximum funkcji $B_1(s)=B(s,0)$ na przedziale $[c+h-\varrho, c+h+\varrho]$.

Zachodzi następujący lemat.

Lemat 2. Funkcja

$$B_1(s)=\frac{s^{\beta}}{(1+h)^{\beta}}-m\beta\frac{s^2+h^2+hc}{s}+m\beta(2h+c) \tag{3.5}$$

w przypadku gdy $\beta=1$ i $h=0$ osiąga w punkcie

$$s^*_1=c+h-\varrho \tag{3.6}$$

maximum na przedziale $[c+h-\varrho, c+h+\varrho]$.
Natomiast dla $0<\beta<1$ lub $h>0$ funkcja $B_1(s)$ osiąga w punkcie s^*_1 maximum jeśli spełniona jest nierówność $s^*_1\geqslant s^*_2$, gdzie s^*_2 jest jedynym na przedziale $(0, c+h+\varrho)$ pierwiastkiem równania

$$s^{\beta+1}-m(1+h)^{\beta}(s^2-h^2-hc)=0, \tag{3.7}$$

jeżeli natomiast $s^*_2>s^*_1$, to funkcja ta osiąga wówczas maximum w punkcie s^*_2. Maximum to wynosi odpowiednio:

$$N_1(r)=N_1(r;\beta,h,m)=\left(\frac{c+h-\varrho}{1+h}\right)^{\beta}+\frac{m\beta\varrho(c-\varrho)}{c+h-\varrho} \tag{3.8}$$

$$N_2(r)=N_2(r;\beta,h,m)=B_1(s^*_2) \tag{3.9}$$

Dowód. W przypadku $\beta=1$ i $h=0$ z (3,5) otrzymujemy $B_1(s)=s(1-m)+mc$ a stąd wynika teza. W przypadku $0<\beta<1$ lub $h>0$ można wykazać że równanie (3.7) ma w przedziale $(0, c+h+\varrho)$ dokładnie jeden pierwiastek $s=s^*_2$ oraz $B_1'(s)>0$ dla $s\in(0,s^*_2)$ i $B_1'(s)<0$ dla $s\in(s^*_2, c+h+\varrho)$.
Tym samym funkcja $B_1(s)$ przyjmuje w przypadku gdy $s^*_2\leqslant c+h-\varrho$ maximum na przedziale $[c+h-\varrho, c+h+\varrho]$ w punkcie $s^*_1=c+h-\varrho$, natomiast gdy $s^*_2>c+h-\varrho$, to funkcja ta osiąga swoje maximum w punkcie s^*_2.

Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. Dla dowolnej funkcji $F\in\sum^*_{\alpha}(\beta,m)$ i dla każdego ustalonego z, $|z|=r<1$ oraz przy ustalonych α, β i m zachodzi dokładne oszacowanie

$$(3.10)\qquad \mathrm{re}\left\{-\left[1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\begin{cases} c+(m-1)\varrho, \text{ gdy } \beta=1 \text{ i } h=0 \\ \left(\dfrac{c+h-\varrho}{1+h}\right)^{\beta}+\dfrac{m\beta\varrho(c-\varrho)}{c+h-\varrho}, \text{ gdy } 0<\beta<1 \text{ lub } h>0 \text{ oraz } s^*_2\leqslant s^*_1 \\ B_1(s^*_2), \text{ gdy } 0<\beta<1 \text{ lub } h>0 \text{ oraz } s^*_1<s^*_2 \end{cases}$$

gdzie s^*_1 i B_1 określone są odpowiednio wzorami (3.6) i (3.5) natomiast s^*_2 jest jedynym w przedziale $(0, c+h+\varrho)$ pierwiastkiem równania (3.7). Znaki równości w oszacowaniu (3.10) realizują odpowiednio funkcje postaci

$$(3.11)\qquad F^*_1(z)=\frac{(1+e^{-im\varphi}z^m)^{\frac{2}{m}}}{z}$$

$$(3.12)\qquad F^*_2(z)=\frac{1}{z}\exp\int_0^z\left[1-\left(\frac{1-(1-2\alpha)\,e^{-im\varphi}x^m}{1+e^{-im\varphi}x^m}\right)^{\beta}\right]\frac{dx}{x}$$

$$(3.13)\qquad F^*_3(z)=\frac{1}{z}\exp\int_0^z\left[1-\left(\frac{1-2K\alpha e^{-im\varphi}x^m-(1-2\alpha)e^{-2im\varphi}x^{2m}}{1-2Ke^{-im\varphi}x^m+e^{-2im\varphi}x^{2m}}\right)^{\beta}\right]\frac{dx}{x}$$

gdzie

$$(3.14)\qquad K=\frac{(s^*_2-h)\,(1+r^{2m})-(1-r^{2m})}{2r^m\,(s^*_2-h)}$$

Dowód. Oszacowanie (3.10) wynika z lematu 2. Wykażemy, że oszacowanie to jest dokładne. Oznaczmy przez p^*_1 funkcję rodziny $P_2(m)$, dla której zachodzi równość

$$(3.15)\qquad p^*_1(re^{i\varphi})+h=s^*_1$$

gdzie $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $s_1=c+h-\varrho$.
Z lematu 1 (por. [1] str. 70) wynika wówczas, że $d=\varrho$ oraz $\gamma=-1$. Stąd z kolei mamy: $\lambda_1=0$ lub $\lambda_2=0$ lub $\beta_1=\beta_2$, co w konsekwencji daje

$$(3.16)\qquad p^*_1(z)=\frac{1+\varepsilon z^m}{1-\varepsilon z^m},\ |\varepsilon|=1$$

Z (3.15) i (3.16) otrzymujemy $\varepsilon=-e^{-im\varphi}$.
Po podstawieniu do (3.16) otrzymujemy

$$(3.17)\qquad p^*_1(z)=\frac{1-e^{-im\varphi}z^m}{1+e^{-im\varphi}z^m}$$

Niech F^*_2 będzie funkcją klasy $\sum^*_c(\beta, m)$ postaci (2.1) (por. lemat 2.1 [3]), gdzie na miejsce p podstawiamy funkcję p^*_1 określoną wzorem (3.17). W konsekwencji otrzymujemy funkcję postaci (3.12). Podstawiając w (3.12) $\beta=1$ i $h=0$ otrzymamy (3.11).

Oznaczmy następnie przez p_1^{**} funkcję rodziny $P_2(m)$ dla której zachodzi równość

$$(3.18)\qquad p_1^{**}(re^{i\varphi})+h=s_2^*$$

gdzie $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, s_2^* określone jest w tezie twierdzenia. W punkcie s_2^* funkcja $B_1(s)$ osiąga maximum, więc z nierówności $\operatorname{re}(e^{-it}\eta) \leqslant 1$ wobec $t=0$ otrzymujemy $\eta=1$ czyli $\eta_1 \cdot \eta_2 = 1$. Z (3.18) i lematu 1 (por. [1] str. 70) wynika, że $\gamma = \bar{\gamma}$. Stąd z kolei mamy

$$(\eta_1 - \eta_2) \cdot \lambda = 0 \tag{3.19}$$

Można wykazać, że w tym przypadku równość $\eta_1 = \eta_2$ nie może zachodzić. Z (3.19) mamy więc $\lambda = 0$ co pociąga za sobą na podstawie (2.4)

$$p_1^{**}(z) = \frac{1 - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 z^{2m}}{1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) z^m + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 z^{2m}} \tag{3.20}$$

Z równości $\eta_1 \cdot \eta_2 = 1$ otrzymujemy $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = e^{-2im\varphi}$. Oznaczając: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2K e^{-im\varphi}$ otrzymujemy z (3.20)

$$p_1^{**}(z) = \frac{1 - e^{-2im\varphi} z^{2m}}{1 - 2Ke^{-im\varphi} z^m + e^{-2im\varphi} z^{2m}} \tag{3.21}$$

Stąd i z (3.18) wyznaczamy K określone wzorem (3.14). Oznaczmy następnie przez F_3^* funkcję klasy $\sum_\alpha^*(\beta, m)$ postaci (2.1) (por. lemat 2.1 [3]) i podstawiając za p funkcję p_1^{**} określoną w (3.20) otrzymujemy funkcję postaci (3.13). Można pokazać, że funkcje postaci (3.11), (3.12) i (3.13) dla $z = re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ realizują równości w oszacowaniu (3.10), co kończy dowód.

Wniosek. W przypadku $\alpha = 0$ z twierdzenia 1 i 2 otrzymujemy wyniki [wzór (16) i (22)] zawarte w pracy [1], natomiast w przypadku $m=1$ otrzymujemy z twierdzenia 1 wzór (2.10) z pracy [2].

BIBLIOGRAFIA

1. Z. Pachulski: On extremal problems of some family of meromorphic functions, Acta Univ. Lod., Seria II, Nr 17 (1977) 63—84.
2. Z. Pachulski: On the radius of convexity for certain family of functions meromorphic in unit disc, Dem. Math., Vol 12, Nr 1 (1979) 281—287.
3. Z. Pachulski: Prace Naukowe WSP w Częstochowie S. Mat.-Przyr. Nr 1/1978, 5—10.
4. V. A. Zmorovič: Ob odnom klasse ekstremalnych zadač zwjazannych s reguljarnymi funkcijami s položitelnoj veščestvennoj častju v kruge $|z| < 1$, Ukr. Mat Žur., T. 17, N — 4 (1965) 12—21.
5. V.A. Zmorovič: O granicach vypuklosti zvezdnych funkcji poriadka α v kruge $|z| < 1$ i krugovoj oblasti $0 < |z| < 1$, Mat. Sb, T. 68 (110), Nr 4 (1965) 518—528.

Z. Pachulski

THE ESTIMATE OF THE FUNCTIONAL $\operatorname{RE}\{-[1+zF''(z)/F'(z)]\}$ DEFINED IN THE $\sum_\alpha^*(\beta, m)$ CLASS

The class of $\sum_\alpha^*(\beta, m)$ functions defined by condition (1,1) is discussed in this paper.

Utilizing the relation between the $\sum_\alpha^*(\beta, m)$ class and class P of functions with positive real part the estimate of the functional $\operatorname{Re}\{-[1+zF''(z)/F'(z)]\}$ in the $\sum_\alpha^*(\beta, m)$ class has been determined.