PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 5/82 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

Tomasz M. ZIMNY

Miary zgodności porządków liniowych

1. Porządek liniowy elementów

1.1. Definicja

Relacja porządkująca oznaczana zwykle przez „$\leqslant$", to taka relacja dwuczołowa, która jest jednocześnie:

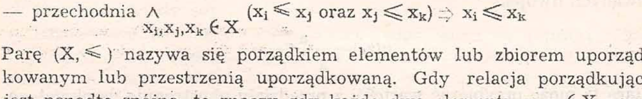
— zwrotna $\bigwedge_{x_i \in X} x_i \leqslant x_i$

— identytywna $\bigwedge_{x_i, x_j \in X} (x_i \leqslant x_j \text{ oraz } x_j \leqslant x_i) \Rightarrow x_i = x_j$

— przechodnia $\bigwedge_{x_i, x_j, x_k \in X} (x_i \leqslant x_j \text{ oraz } x_j \leqslant x_k) \Rightarrow x_i \leqslant x_k$

Parę $(X, \leqslant)$ nazywa się porządkiem elementów lub zbiorem uporządkowanym lub przestrzenią uporządkowaną. Gdy relacja porządkująca jest ponadto spójna, to znaczy gdy każde dwa elementy $x_i, x_j \in X$ pozostają w relacji $x_i \leqslant x_j$ lub $x_j \leqslant x_i$, nazywamy ją liniowo porządkującą, a parę $(X, \leqslant)$ łańcuchem lub porządkiem liniowym (por. Maurin K., 1971, s. 23).

Niech będzie dany zbiór elementów materialnych $E = \{e_i\}$, gdzie $i = 1, \ldots, n$, badanych ze względu na dwie właściwości X i Y. Niech zbiory własności tych elementów $\{x_i\}$ oraz $\{y_i\}$ wraz z relacją „$\leqslant$" będą dwoma porządkami liniowymi, takimi że para (x_i, y_i) jest parą własności badanych właściwości X i Y i-tego elementu e_i należącego do zbioru E (rys. 1).



Rys. 1. Zbiór E elementów e_i oraz pary (x_i, y_i) własności elementów e_i ze względu na właściwości X oraz Y.

W konsekwencji zbiór dwójek par własności $\{[(x_i,y_i);\ (x_j,y_j)]\}$ dla kolejnych dwójek elementów (e_i,e_j), gdzie $i \neq j$ należących do zbioru E pozwala wyróżnić następujące przypadki relacji pomiędzy własnościami elementów dwójki (e_i,e_j).

I. $x_i \leqslant x_j$ oraz $y_i \leqslant y_j$
II. $x_i \leqslant x_j$ oraz $y_j \leqslant y_i$
III. $x_j \leqslant x_i$ oraz $y_i \leqslant y_j$
IV. $x_j \leqslant x_i$ oraz $y_j \leqslant y_i$

Oznaczmy przez:
a^* — liczbę wszystkich przypadków I oraz IV,
c^* — liczbę wszystkich przypadków II oraz III.

Ze względu na obie właściwości X oraz Y elementy i-ty oraz j-ty są uporządkowane w przypadkach I oraz IV zgodnie (tak samo), natomiast w przypadkach II oraz III niezgodnie (przeciwnie).

1.2. Miara zgodności

Jako miarę zgodności porządków liniowych $n(z_p)$ przyjmuję stosunek liczby dwójek uporządkowanych do liczby wszystkich porządkowanych dwójek:

$$n(z_p) = \frac{a^*}{a^* + c^*}$$

Miara ta może przybierać wartości z przedziału obustronnie domkniętego [0,1]. W szczególności wartość zero przyjmuje wtedy, gdy $a^* = 0$, tzn. gdy wszystkie dwójki są uporządkowane niezgodnie, oraz wartość 1 wtedy, gdy $c^* = 0$, tzn. gdy wszystkie dwójki są uporządkowane zgodnie.

2. Porządek liniowy klas elementów

2.1. Definicja

Rozpatrzmy teraz zamiast jednej relacji „$\leqslant$" dwie relacje dwuczłonowe „$=$" oraz „$<$".
Relacja równości „$=$" jest jednocześnie
— zwrotna $\bigwedge_{x_i \in X} x_i = x_i$
— symetryczna $\bigwedge_{x_i, x_j \in X} x_i = x_j \Rightarrow x_j = x_i$
— identytywna $\bigwedge_{x_i, x_j \in X} (x_i = x_j \text{ oraz } x_j = x_i) \Rightarrow x_i = x_j$
— przechodnia $\bigwedge_{x_i, x_j, x_k \in X} (x_i = x_j \text{ oraz } x_j = x_k) \Rightarrow x_i = x_k$

Relacja „$<$" jest jednocześnie:

— asymetryczna $\bigwedge_{x_i,x_j \in X} x_i < x_j \Rightarrow x_j < x_i$

— przechodnia $\bigwedge_{x_i,x_j,x_k \in X} (x_i < x_j \text{ oraz } x_j < x_k) \Rightarrow x_i < x_k$

Trójka $(X,=,<)$ nazywa się porządkiem klas elementów. Klasą elementów nazywamy każdy taki podzbiór V_l zbioru X, który spełnia warunek: $\bigwedge_{x_i,x_j \in V_l}$ i $\bigwedge_{x_k \notin V_l}$ $x_i=x_j$ i $x_i \neq x_k$ gdzie $l=1,...,s$ $s \leqslant n$.

Możemy zatem napisać $(X,=,<) \equiv (V,<)$ gdzie V jest zbiorem wszystkich klas elementów zbioru X. Parę $(V,<)$ nazywamy silnym porządkiem lub porządkiem klas elementów, a relację „$<$" silnie porządkującą. Gdy ponadto relacja silnie porządkująca jest spójna w zbiorze V, to znaczy, gdy każde dwa elementy $v_l,v_t \in V$ pozostają w relacji $v_l < v_t$ albo $v_t < v_l$, nazywamy ją liniowo silnie porządkującą, a parę $(V,<)$ silnym łańcuchem lub silnym porządkiem liniowym. W skrajnym przypadku wszystkie klasy są jednoelementowe. Dzieje się tak wtedy, gdy w zbiorze X wszystkie pary własności są różne. Wówczas zbiory X oraz V są sobie równe. Takie podejście zakłada możliwość wystąpienia różnych własności elementów, w przeciwnym razie grupowanie własności elementów w klasy własności równych byłoby bezsensowne. Jest ono niesłuszne tylko wtedy gdy:

— każde dwie własności wyróżnionej właściwości są a priori różne,

— rozpatrujemy własności danej właściwości badanych elementów, obiektywnie jako rzeczywiście występujące, a nie subiektywnie z punktu widzenia podmiotu porządkującego, o których tylko możemy mówić.

Niech zbiory własności $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ elementów zbioru $E=\{e_i\}$ właściwości X i Y będą poklasyfikowane w klasy własności elementów $\{v_l\}=\{x_i\}$ oraz $\{u_l\}=\{y_i\}$. Niech pary $(V,<)$ oraz $(U,<)$ będą silnymi porządkami liniowymi. Wyróżniamy wtedy następujące przypadki:

— własności x_i,x_j należą do różnych klas oraz
  własności y_i,y_j należą do różnych klas
— własności x_i,x_j należą do różnych klas oraz
  własności y_i,y_j należą do tej samej klasy
— własności x_i,x_j należą do tej samej klasy oraz
  własności y_i,y_j należą do różnych klas
— własności x_i,x_j należą do tej samej klasy oraz
  własności y_i,y_j należą do tej samej klasy.

Jeżeli własności x_i,x_j należą do tej samej klasy, to wówczas są równe, czyli $x_i=x_j$. Jeżeli własności x_i,x_j należą do różnych klas, to wówczas $x_i < x_j$ albo $x_j < x_i$. Możemy więc napisać:

1.1. $x_i < x_j$ oraz $y_i < y_j$

1.2. $x_j < x_i$ oraz $y_j < y_i$
1.3. $x_i < x_j$ oraz $y_j < y_i$
1.4. $x_j < x_i$ oraz $y_i < y_j$
2.1. $x_i < x_j$ oraz $y_i = y_j$
2.2. $x_j < x_i$ oraz $y_i = y_j$
3.1. $x_i = x_j$ oraz $y_i < y_j$
3.2. $x_i = x_j$ oraz $y_j < y_i$
4. $x_i = x_j$ oraz $y_i = y_j$

Oznaczmy przez:

a_1 — liczbę wszystkich przypadków 1.1. oraz 1.2.
a_2 — liczbę wszystkich przypadków 4.
b_1 — liczbę wszystkich przypadków 2.1. oraz 2.2.
b_2 — liczbę wszystkich przypadków 3.1. oraz 3.2.
c — liczbę wszystkich przypadków 1.3. oraz 1.4.
i przyjmijmy, że:

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2.$$

Ta sama dwójka elementów (e_i, e_j) może być uporządkowana ze względu na dwie właściwości X oraz Y:

— całkowicie zgodnie, czyli tak samo, w przypadkach 1.1., 1.2. i 4., a więc gdy i-ty element jest ze względu na obie właściwości większy od j-tego, mniejszy od j-tego, równy j-temu,

— połowicznie zgodnie oraz połowicznie niezgodnie w przypadkach 2.1. 2.2. oraz 3.1., 3.2., a więc gdy elementy i-ty i j-ty są równe pod względem nasilenia dokładnie jednej z dwu badanych właściwości,

— całkowicie niezgodnie, czyli inwersyjnie w przypadkach 1.3., 1.4., a więc gdy element i-ty jest większy od j-tego ze względu na jedną badaną właściwość i równocześnie mniejszy ze względu na drugą.

W konsekwencji interpretujemy:

a — liczba wszystkich dwójek uporządkowanych zgodnie

b — liczba wszystkich dwójek uporządkowanych połowicznie zgodnie oraz połowicznie niezgodnie

c — liczba wszystkich dwójek uporządkowanych niezgodnie.

2.2. Miary zgodności porządków liniowych klas elementów

W takim stanie rozpoznania sytuacji można zdefiniować miarę zgodności porządków liniowych klas elementów jako stosunek sumy liczby wszystkich dwójek uporządkowanych zgodnie i połowy liczby wszystkich dwójek uporządkowanych połowicznie zgodnie do liczby wszystkich dwójek porządkowanych, czyli

$$m(z_p) = \frac{a + 0,5b}{a + c + b}$$

Miara ta przybiera wartości z przedziału obustronnie domkniętego [0,1]. W szczególności miara zgodności porządków liniowych $m(z_p)$ przyjmuje:

— wartość zero, gdy dwa porządki są całkowicie niezgodne, to znaczy gdy żadna dwójka elementów nie jest nawet połowicznie zgodnie uporządkowana, a więc gdy $a = b = 0$,

— wartość 0,5, gdy liczby dwójek uporządkowanych całkowicie zgodnie i całkowicie niezgodnie są równe, a więc gdy $a = c$,

— wartość 1, gdy dwa porządki są całkowicie zgodne, to znaczy gdy wszystkie dwójki elementów są uporządkowane całkowicie zgodnie, a więc gdy $b = c = 0$.

Odmienne od miary zgodości porządków liniowych $m(z_p)$ miary współuporządkowania przyjmują wartości z przedziału obustronnie domkniętego [—1,+1]. Są to współczynniki τ Kendalla, τ^* Zimnego, μ_0^4 Guttmana, ϱ Spearmana oraz γ Kruskala-Goodmana. Wyjątek stanowi współczynnik konkordancji W, czyli zgodności rang, Kendalla, który przyjmuje wartości z przedziału obustronnie domkniętego [0,1]. Dzieje się tak dlatego, że współczynnik ten przeznaczony jest do badania zgodności między dowolną liczbą uporządkowań, co wyklucza pojęcie uporządkowania dokładnie przeciwnego. Zaletą współczynników przyjmujących wartości z przedziału [—1,+1] jest to, że dla uporządkowań, w których przeważają pary niezgodnie uporządkowane, przyjmują one znak „—".

Różność przedziałów zmienności miar jest tu jednak nieistotna, ponieważ za pomocą funkcji liniowej możemy doprowadzić do ich równości. Gdy za obszar zmienności przyjmiemy przedział [—1,+1], miara $m(z_p)$ przybiara postać:

$$m'(z_p) = \frac{a - c}{a + b + c}$$

i jest porównywalna z innymi miarami zgodności porządków. W tym celu jednak trzeba przedstawić je w języku tych samych oznaczeń.

Otrzymujemy zatem:

$$\tau = \frac{a_1 - c}{\sqrt{(a_1 + c + b_1)(a_1 + c + b_2)}}, \qquad \gamma = \frac{a_1 - c}{a_1 + c}$$

$$\tau^* = \frac{a_1 - c - 0,5b}{a_1 + c + 0,5b} \qquad \mu_0^4 = \frac{a_1 - c}{a_1 + c + b}$$

Pozostałe współczynniki ϱ Spearmana oraz W Kendalla są miarami zgodności statystycznej rang. Przez rangę elementu rozumiemy funkcję numeru jego miejsca w zbiorze elementów uporządkowanym ze względu na wyróżnioną zmienną X. Dokładniej współczynnik ϱ Spearmana jest współczynnikiem korelacji liniowej r Pearsona między rangami elementów uporządkowanych ze względu na zmienne X i Y. Natomiast współczynnik W Kendalla dla dwu zmiennych X i Y jest stosunkiem korelacyjnym między rangami elementów uporządkowanych ze względu na te zmienne. Na podstawie tych współczynników możemy stwierdzić, czy istnieje, a jeżeli tak, to jak silna jest korelacja między rangami, a tym samym między porządkami liniowymi.

2.3. Analiza porównawcza miar zgodności porządków liniowych klas elementów

Współczynnik τ wydaje się być merytorycznie nieuzasadniony, a co najmniej trudno porównywalny ze względu na zawiłość mianownika zaczerpniętego z miar zgodności statystycznej. Pozostają więc do dalszej analizy porównawczej cztery współczynniki, τ^*, γ, μ^4_0, $m(z_p)$.

Współczynnik τ^* jest oparty na mierze niezgodności wyrażonej stosunkiem liczby, I, stanowiącej sumę stwierdzonych przestawień, inwersji, plus połowę sumy półprzestawień, semiinwersji, do liczby, I_{max}, czyli maksymalnie możliwej sumy przestawień plus połowy sumy półprzestawień, które mogą wystąpić między dwoma zadanymi porządkami liniowymi przy stwierdzonej liczbie relacji równości oraz relacji mniejszy bądź większy (nie występuje to przy pozostałych współczynnikach). Takie założenie powoduje zmniejszenie I_{max}, a w konsekwencji zwiększenie stosunku $\frac{I}{I_{max}}$,który może przyjąć wartość równą jedności dla każdych dwóch porządków liniowych, w których:

— liczba grup elementów równych oraz liczność tych grup jest równa,
— w każdym porządku występuje choć jedna nierówność.

Jeżeli we współczynniku τ^* zamiast $I_{max}=a_1+c+0,5b$ przyjmiemy $I_{max}=a_1+c+b$, to otrzymamy współczynnik μ^4_0 L. Guttmana. Obydwa te współczynniki nie uwzględniają dwóch elemetów równych ze względu na obydwie badane właściwości, ponieważ każdą taką dwójkę traktują zawsze tak, jak jeden element.

Natomiast, jeżeli przyjmiemy $I_{max}=a+c+b$, to otrzymamy współczynnik $m(z_p)$. Jak widać, te trzy współczynniki różnią się tylko tym, jaką liczbę inwersji przyjmiemy za maksymalnie możliwą do osiągnięcia.

Czwarty współczynnik γ Kruskala-Goodmana określa $I_{max}=a_1+c$ oraz $I=c$, nie zaś jak pozostałe $I=c+0,5b$. Różni się więc nie tylko określeniem maksymalnej liczby inwersji, ale także określeniem liczby inwersji występujących między dwoma porządkami liniowymi, nie biorąc pod uwagę półinwersji.

	$I_{max} - I$	I	I_{max}	wzór przy przedziale zmienności	
				[0,1]	[−1,+1]
$m(z_p)$	$a+0,5b$	$c+0,5b$	$a+c+b$	$1-\frac{I}{I_{max}}$	$1-\frac{2I}{I_{max}}$
μ_o^4	$a_1+0,5b$	$c+0,5b$	a_1+c+b		
τ^*	a_1	$c+0,5b$	$a_1+c+0,5b$		
γ	a_1	c	a_1+c		

Tabl. 1. Liczby inwersji I oraz I_{max} dla poszczególnych miar zgodności porządku liniowego.

Najbardziej uniwersalny wzór podał Z. Zimny (1974, s. 180), gdzie przez odpowiednie zdefiniowanie I oraz I_{max} (por. tabl. 1) możemy otrzymać pozostałe trzy współczynniki.

Z kolei przedstawiając powyższe współczynniki jako miary zgodności porządków liniowych, których obszar zmienności jest przedziałem obustronnie domkniętym [0,1] otrzymujemy następujące wzory:

$$m(z_p) = \frac{a+0,5b}{a+c+b} \qquad (\mu_o^4)' = \frac{a_1+0,5b}{a_1+c+b}$$

$$(\tau^*)' = \frac{a_1}{a_1+c+0,5b} \qquad (\gamma)' = \frac{a_1}{a_1+c}$$

Z powyższego wynika, że $m(z_p) \geqslant (\mu_o^4)' \geqslant (\tau^*)'$, gdzie równości zachodzą tylko wtedy, gdy $b=a_2=0$, ponadto zaś $m(z_p)=(\mu_o^4)'$ gdy $a_2=0$ oraz $\mu_o^4 = \tau^*$ gdy $b=0$. Stąd dla uporządkowań, w których nie ma elementów równych, wszystkie te współczynniki są tożsame.

Współczynnik $m(z_p)$ dopuszcza wszystkie pary równoprawnie uważając przypadki 1.1., 1.2., 4. za zgodne .

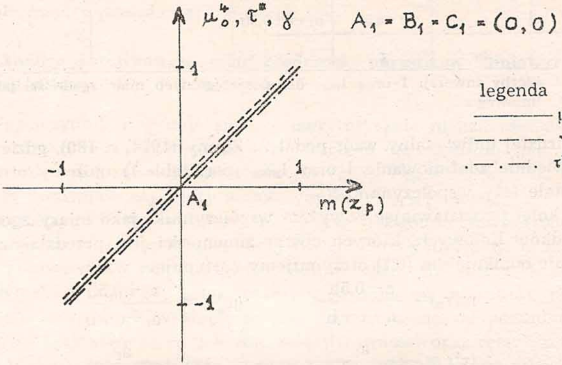
Współczynnik μ_o^4 nie bierze pod uwagę przypadków 4., ponieważ traktuje podzbiory dwójek elementów równych ze względu na obie właściwości jako jedną parę własności jednego elementu.

Współczynnik τ^*, podobnie jak współczynnik μ_o^4, nie bierze pod uwagę liczby przypadków 4., a ponadto interpretuje przypadki 2.1., 2.2., 3.1., 3.2. połowicznie zgodne i połowicznie niezgodne, jedynie od strony ich niezgodności, stąd 0,5b w mianowniku, oraz brak 0,5b w liczniku.

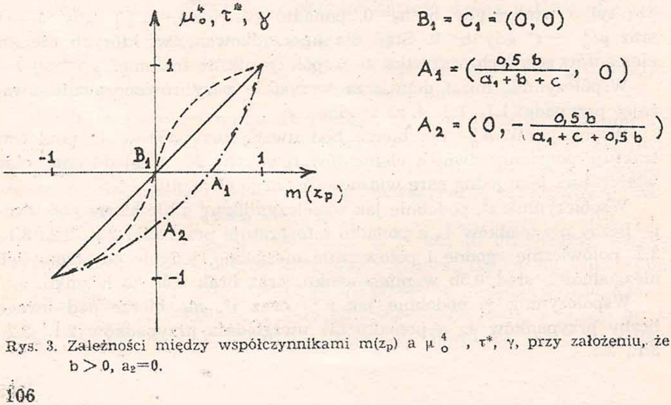
Współczynnik γ, podobnie jak μ_o^4 oraz τ^*, nie bierze pod uwagę liczby przypadków 4., a ponadto nie uwzględnia przypadków 2.1., 2.2., 3.1., 3.2.

Traktowanie elementów równych ze względu na obie właściwości za jeden powoduje, że w przypadku gdy mamy ciąg elementów równych, nie możemy obliczyć wartości współczynników μ_o^4 i τ^* oraz γ, bo nie można mówić o porządkach jednoelementowych, a tym bardziej o ich zgodności. Natomiast współczynnik $m(z_p)$ traktuje ten zbiór elementów jako zgodnie uporządkowany ze względu na badane właściwości i przybiera wartość 1.

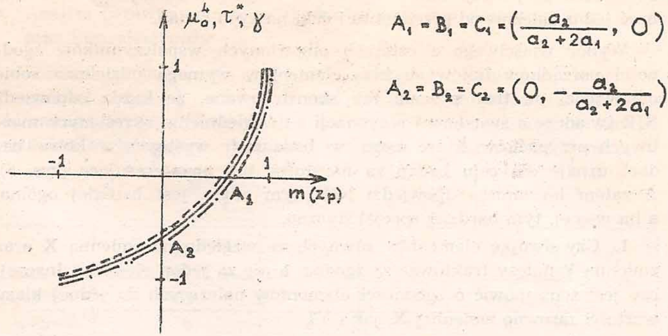
Wyniki analizy porównawczej związków między miarami zgodności porządków liniowych klas elementów przedstawiają rysunki 2, 3, 4 i 5.



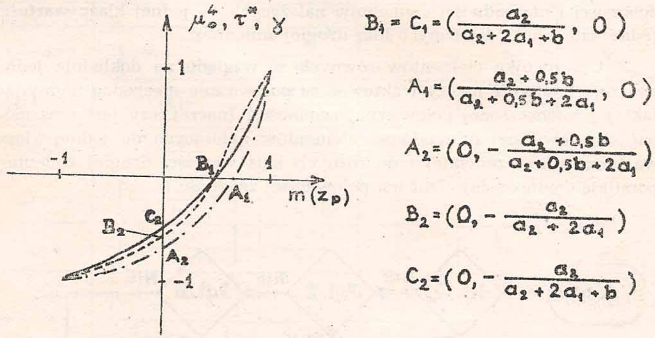
Rys. 2. Zależności między współczynnikami $m(z_p)$ a μ_o^4, τ^*, γ, przy założeniu, że $b = a_2 = 0$.



Rys. 3. Zależności między współczynnikami $m(z_p)$ a μ_o^4, τ^*, γ, przy założeniu, że $b > 0$, $a_2 = 0$.



Rys. 4. Zależności między współczynnikami $m(z_p)$ a μ_o^4, τ^*, γ, przy założeniu, że $b=0$, $a_2 > 0$.



Rys. 5. Zależności między współczynnikami $m(z_p)$ a μ_o^4, τ^*, γ, przy założeniu, że $b > 0$, $a_2 > 0$.

2.4. Sposób wyboru miary zgodności silnych porządków liniowych

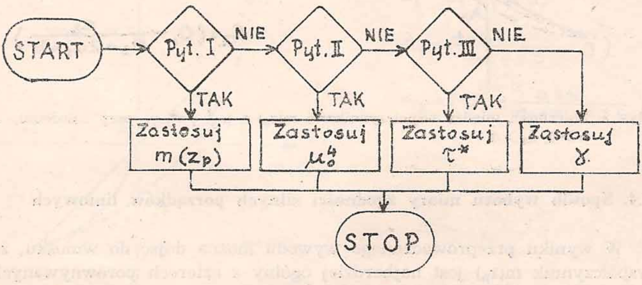
W wyniku przeprowadzonego wywodu można dojść do wniosku, że współczynnik $m(z_p)$ jest najbardziej ogólny z czterech porównywanych miar zgodności porządków liniowych. Bierze bowiem pod uwagę najwięcej możliwości. Nie musi to znaczyć, że jest najlepszy, ale jest jedną z czterech propozycji miary zgodności, z których mamy możność wybrać jedną zależnie od przedmiotu i celu naszych badań.

Wybór właściwego z czterech omówionych współczynników zgodności porządków liniowych klas elementów wymaga udzielenia sobie odpowiedzi na trzy pytania tak skonstruowane, że każda odpowiedź NIE świadczy o świadomej rezygnacji z uwzględnienia określonych możliwych przypadków, które mogą w badaniach wystąpić, a które badacz uznaje dla celu badań za nieistotne lub nieinteresujące (rys. 6). A zatem im mniej odpowiedzi NIE, tym miara jest bardziej ogólna, a im więcej, tym bardziej specjalistyczna.

1. Czy dwójkę elementów równych ze względu na zmienną X oraz zmienną Y należy traktować za zgodną, a nie za jeden element? Inaczej, czy jest sens mówić o zgodności elementów należących do jednej klasy wartości zarówno zmiennej X, jak i Y?

2. Czy dwójkę elementów równych ze względu na dokładnie jedną zmienną X albo Y należy traktować za połowicznie niezgodną i równocześnie połowicznie zgodną? Inaczej, czy jest sens mówić o połowicznej zgodności i niezgodności elementów należących do jednej klasy wartości jednej zmiennej i do różnych klas drugiej zmiennej?

3. Czy dwójkę elementów równych ze względu na dokładnie jedną zmienną X albo Y należy traktować za połowicznie niezgodną pomijając fakt jej równoczesnej połowicznej zgodności? Inaczej, czy jest sens mówić o połowicznej niezgodności elementów należących do jednej klasy wartości jednej zmiennej i do różnych klas wartości drugiej zmiennej pomijając jednocześnie fakt ich połowicznej zgodności?



Rys. 6. Schemat blokowy algorytmu wyboru jednej z czterech miar zgodności porządku liniowego klas elementów.

3. Analiza porównawcza miar zgodności porządku liniowego elementów oraz klas elementów

Porównując miarę $n(z_p)$ zgodności porządków liniowych elementów z miarami $n(z_p)$, μ^4_o, τ^*, γ, zgodności porządków liniowych klas elementów można wyznaczyć przedział zmienności $n(z_p)$ za pomocą funkcji wielkości liczbowych a, b, c jako przedział M obustronnie domknięty

$$M = \left[\frac{a_1}{a+b+c}, \quad \frac{a+b}{a+b+c} \right]$$

	M	$m(z_p)$	μ^4_o	τ^*	γ
$a_1=b=c=0$	$[0,1]$	1	—	—	—
$a=b=0$	0	0	0	0	0
$a=c=0$	$[0,1]$	0,5	0,5	0	—
$b=c=0$	$\left[\frac{a_1}{a}, 1\right]$	1	1	1	1
$a_2=b=c=0$	1	1	1	1	1
$a_1=b=0$	$\left[0, \frac{a_2}{a_2+c}\right]$	$\frac{a_2}{a_2+c}$	0	0	0
$a_1=c=0$	$[0,1]$	$\frac{a_2+0{,}5b}{a_2+b}$	0,5	0	—
$a_2=b=0$	$\frac{a_1}{a_1+c}$	$\frac{a_1}{a_1+c}$	$\frac{a_1}{a_1+c}$	$\frac{a_1}{a_1+c}$	$\frac{a_1}{a_1+c}$
$a_2=c=0$	$\left[\frac{a_1}{a_1+b}, 1\right]$	$\frac{a_1+0{,}5b}{a_1+b}$	$\frac{a_1+0{,}5b}{a_1+b}$	$\frac{a_1}{a_1+0{,}5b}$	1
$a=0$	$\left[0, \frac{b}{b+c}\right]$	$\frac{0{,}5b}{b+c}$	$\frac{0{,}5b}{b+c}$	0	0
$b=0$	$\left[\frac{a_1}{a+c}, \frac{a}{a+c}\right]$	$\frac{a}{a+c}$	$\frac{a_1}{a_1+c}$	$\frac{a_1}{a_1+c}$	$\frac{a_1}{a_1+c}$
$c=0$	$\left[\frac{a_1}{a+b}, 1\right]$	$\frac{a+0{,}5b}{a+b}$	$\frac{a_1+0{,}5b}{a_1+b}$	$\frac{a_1}{a_1+0{,}5b}$	1
$a_1=0$	$\left[0 \quad \frac{a_2+b}{a_2+b+c}\right]$	$\frac{a_2+0{,}5b}{a_2+b+c}$	$\frac{0{,}5b}{b+c}$	0	0
$a_2=0$	$\left[\frac{a_1}{a_1+b+c}, \frac{a_1+b}{a_1+b+c}\right]$	$\frac{a_1+0{,}5b}{a_1+b+c}$	$\frac{a_1+0{,}5b}{a_1+b+c}$	$\frac{a_1}{a_1+0{,}5b+c}$	$\frac{a_1}{a_1+c}$

Tabl. 2. Wartości współczynników $m(z_p)$, μ^4_o, τ^*, γ przy założeniach dotyczących liczby dwójek elementów trwale zgodnych a_1, chwiejnie zgodnych a_2, półzgodnych i półniezgodnych b, niezgodnych c.

Uwaga: Przypadek $a=b=c=0$ może zajść tylko wtedy, gdy mamy jeden element, a wtedy nie ma sensu mówić o jakimkolwiek porządku, a tymbardziej o jego mierze.

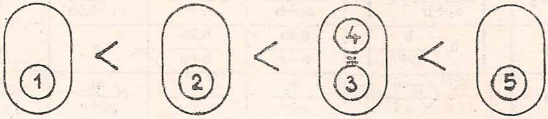
Wyróżniamy dwa zasadnicze przypadki:

$a_2 = b = 0$ — wówczas przedział M redukuje się do punktu $\dfrac{a_1}{a_1 + c}$ oraz zachodzi równość $n(z_p) = m(z_p) = \mu_o^4 = \tau^* = \gamma$ (tabl. 2),

$a_2 \neq 0$ lub $b \neq 0$ — wówczas zachodzą relacje $m(z_p) \in M$, $\mu_o^4 \in M$, $\tau^* \in M$, $\gamma \in M$.

Z przytoczonych relacji należenia do przedziału M wynika, że dla danych dwóch porządków liniowych miara $n(z_p)$ może przyjmować wartości zarówno większe, jak i mniejsze od wartości rozpatrywanych miar. W mierze $n(z_p)$ uwzględniliśmy tylko relację „$\leqslant$", wobec czego wszystkie relacje między własnościami elementów były równoprawne, co nie zachodziło przy relacjach „=" i „<". Jeżeli wyróżniliśmy relację równości „=", to wówczas w przypadku gdy mamy grupę elementów równych, nie interesuje nas kolejność wewnątrz niej. Elementy tej grupy stoją jakby obok siebie jako równoprawne, co w przypadku rangowania znajduje swój wyraz w tym, że przypisujemy im takie same rangi. Jeżeli wyróżniamy tylko jedną relację nie większy „$\leqslant$" bądź nie mniejszy „$\geqslant$", to kolejność żadnych dwóch elementów nie jest obojętna (przypisujemy im różne rangi), mamy wtedy uporządkowanie silne uwzględniające możliwość zachodzenia równości między własnościami badanych elementów.

I tak zbiór pięciu elementów przedstawiony jako uporządkowany zbiór klas elementów



I klasa II klasa III klasa IV klasa

można przedstawić jako zbiór elementów

$$① \leqslant ② \leqslant ③ \leqslant ④ \leqslant ⑤$$

albo

$$① \leqslant ② \leqslant ④ \leqslant ③ \leqslant ⑤$$

im więcej będziemy mieli relacji równości „=", tym więcej możliwych kombinacji przedstawienia tego za pomocą relacji „$\leqslant$", oczywiście w praktyce zawsze realizuje się tylko jedna.

Zauważmy ponadto, że zachodzą równości:

$\binom{n}{2} = a^* + c^* = a + b + c = a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c$

oraz, że $a^* \in [a_1,\ a_1 + a_2 + b_1 + b_2] = [a_1,\ a + b]$

$c^* \in [c,\ c + a_2 + b_1 + b_2] = [c,\ c + a_2 + b]$

Widzimy, że dwójki elementów, w których zachodzą przypadki 4. oraz 2. i 3. mogły należeć poprzednio do przypadków I albo II. Jest to zrozumiałe w przypadku półzgodności i półniezgodności, ale dlaczego dwójki reprezentujące przypadek 4. pominięte przez współczynniki μ_o^4, τ^* i γ oraz uznane za zgodne w mierze $m(z_p)$ były uprzednio przypadkiem I albo II, czyli były uznane za zgodnie uporządkowane albo za niezgodnie uporządkowane? Taką zgodność nazywamy chwiejną albo nietrwałą w odróżnieniu od zgodności prezentowanych przez przypadki 1.1. i 1.2., którą nazywamy trwałą.

Wyróżniamy więc dwójki elementów:

— trwale zgodnie uporządkowane — przypadek 1.1. i 1.2.		I
— nietrwale zgodnie uporządkowane — przypadek 4.		I albo II
— półzgodnie i półniezgodnie uporządkowane — przypadek 2. i 3.		I albo II
— niezgodnie uporządkowane — przypadek 1.3. i 1.4.		II

Współczynnik γ uwzględnia dwójki trwale zgodnie i niezgodnie uporządkowane. Współczynnik τ^* uwzględnia ponadto dwójki półzgodnie i półniezgodnie uporządkowane, lecz traktuje je tylko jako półniezgodne. Współczynnik μ_o^4 ponadto traktuje je także jako półzgodne. Współczynnik $m(z_p)$ uwzględnia jeszcze dwójki nietrwale zgodnie uporządkowane. Jak widać do kompletu brakuje jeszcze współczynnika τ^{**}, który uwzględniałby dwójki półzgodnie i półniezgodnie uporządkowane traktując je jako tylko półzgodne i miałby wzór:

$$\tau^{**} = \frac{a_1 + 0{,}5b - c}{a_1 + 0{,}5b + c} = 1 - \frac{2I}{I_{max}}$$

gdzie $I = c$ oraz $I_{max} = a_1 + 0{,}5b + c$.

LITERATURA

Maurin K., 1974, Analiza, część I Elementy, Biblioteka Matematyczna Warszawa, PWN

Shye S., 1978, Theory construction and data-analysis in the social sciences, San Francisco

Zimny T., 1980, W sprawie ogólnej systematyki miar współuporządkowania, Częstochowa, Prace Naukowe WSP, Seria matematyczno-przyrodnicza.

Zimny T., 1982, Niezgodność — zgodność jako zmienna relacyjna, Częstochowa, Prace Naukowe WSP, Seria Humanistyczna

Zimny Z., 1974, Wprowadzenie do psychologii, Katowice, AE

Zimny Z., 1979, Semiinversions and their applications, Częstochowa, Prace Naukowe WSP Seria Humanistyczna.

T.M. ZIMNY

THE MEASURES OF CONCORDANCE OF LINEAR ORDERS

Summary

At the beginning the author defines the linear order of elements as a pair $(X,\leqslant)$ and the linear order of classes of elements as a three $(X,=,<)$, or equivalently as a pair $(V,<)$, where X signifies a set of elemnts, and V — a set of classes of equal elements.

Further on he presents the measures of concordance of linear orders $n(z_p)$, of strong linear orders $m(z_p)$, and still the measures of coordination Z. Zimny's τ^*, L. Guttman's μ_0^4 and Kruskal-Goodman's γ as measures of strong linear orders.

Finally he analyses the above mentioned measures, and in result of comparing them he indicates the proper conditions that each of them ought to be applied in.