PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 4/1981 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

Piotr BOROWIK

O aksjomatyzacji Gentzena reduktów logik wielowartościowych

W pracy przedstawione jest pewnego rodzaju gentzenowskie ujęcie dowolnego reduktu logik wielowartościowych. Sekwent zdefiniowany jest tu jako uporządkowana n-ka zbioru formuł. System składa się z aksjomatów i reguł, dając w całości pewne podobieństwo do systemów logicznych Gentzena.

Przedstawiona tu aksjomatyzacja jest dualnym ujęciem tzw. logiki drzew skończenie generowanych opracowanej przez S.J. Surmę w [2] i [3] i w pracy [1].

W ujęciu Gentzena nie korzysta się z żadnych rozszerzeń języka o dodatkowe funktory niezbędne w logice drzew. Pojęcie sekwentu definiuje się w oparciu o pojęcie zbioru. Jeśli sedno zagadnienia metody drzew sprowadza się do pewnego uogólnienia zasady sprzeczności to punktem wyjścia w metodzie Gentzena jest pewne uogólnienie prawa wyłączonego środka. Są to jedynie analogie do odpowiednich praw w logice dwuwartościowej. W logice dwuwartościowej sekwent można traktować jako uporządkowaną parę zbiorów formuł. Naturalnym uogólnieniem sekwentu dla logiki n-wartościowej będzie uporządkowana n-ka zbiorów formuł.

Niech N oznacza zbiór liczb naturalnych i niech $V=\{p_i : i \in N\}$ będzie zbiorem wszystkich zmiennych zdaniowych, oraz niech F oznacza dowolny m-argumentowy spójnik zdaniowy.

Językiem nad alfabetem $\{p_i : i \in N\} \cup \{F\}$ jest algebra abstrakcyjna $S=\langle S, F\rangle$ wolno generowana przez zbiór $\{p_i : i \in N\}$, gdzie zbiór S jest zdefiniowany następująco:

$$S_0=\{p_i : i \in N\}$$

$$S_{k+1}=S_k \cup \{x : \bigvee_{x_1, x_2, \dots, x_m \in S_k} x=Fx_1x_2 \dots x_m\}$$

$$S=\cup\{S_k : k \in N\}$$

Elementy zbioru S nazywamy formułami zdaniowymi lub krótko formułami.

Niech $E=\langle E, f\rangle$ będzie skończoną algebrą gdzie $f: E^m \to E$.

Bez szkody dla ogólności zagadnienia możemy przyjąć że $E=\{1, 2, 3, ..., n\}$. Niech zbiór $E^* \subset E$ będzie zbiorem wartości wyróżnionych tj. niech np.:

$E^*=\{p, p+1, ..., n\}, \quad 1 < p \leqslant n.$

$S=\langle S, F\rangle$ jest więc algebrą typu $\langle m\rangle$ podobną do algebry E.

Mówimy, że formuła $x \in S$ jest tautologią w matrycy $m=\langle E, \{p, ..., n\}\rangle$, $1 < p \leqslant n$ wtedy i tylko wtedy gdy $h(x) \in \{p, ..., n\}$ dla dowolnego homomorfizmu $h : S \rightarrow E$.

Niech $S_1, S_2, ..., S_n$ będą dowolnymi podzbiorami zbioru formuł S (w szczególności niektóre S_i dla $1 \leqslant i \leqslant n$ mogą być puste).

Sekwentem nazywamy uporządkowaną n-kę $\langle S_1, S_2, ..., S_n\rangle$ podzbiorów zbioru S.

Sekwenty będziemy oznaczać literą Σ, czasem z odpowiednimi indeksami.

Przystępujemy teraz do opisania systemu Gentzena dla przedstawionego wyżej reduktu języka logiki zdaniowej n-wartościowej. Nazwa redukt oznacza tu, że ograniczamy się tylko do jednego spójnika zdaniowego. System składa się z aksjomatów i reguł.

Sekwent $\Sigma=\langle S_1, S_2, ..., S_n\rangle$ jest aksjomatem wtw istnieje formuła $x \in S$ taka, że x należy do co najmniej dwóch różnych zbiorów sekwentu Σ tj. istnieją $j, k : j \neq k$, $j, k \leqslant n$ i $x \in S_j$ oraz $x \in S_k$.

Reguły:

Niech $\Sigma=\langle S_1, ..., S_n\rangle$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$

Dla dowolnego $\alpha \in \{1, 2, ..., n\}^m$ takiego że $f(\alpha)=k$ niech $\Sigma'_\alpha = \langle S'_1, ..., S'_n\rangle$ będzie sekwentem takim, że:

$S'_i=S_i \cup \{x_j : \alpha_j=i\}$ dla dowolnego $i=1, 2, ..., n$ gdzie α_j oznacza j-ty element α,

wtedy schemat reguły wprowadzenia spójnika F do zbioru S_k w sekwencie będzie miał postać:

$$(R) \quad \frac{\{\Sigma'_\alpha : \alpha \in \{1, 2, ..., n\}^m \wedge f(\alpha)=k\}}{\langle S_1, ..., S_{k-1}, S_k \cup \{Fx_1x_2, ..., x_m\}, S_{k+1}, ..., S_n\rangle}$$

Układy postaci Σ'_α są przesłankami, a układ znajdujący się pod kreską poziomą jest wnioskiem reguły (R). $\emptyset$ jest zbiorem pustym.

Drzewem dowodowym nazywamy system $D=\langle P, P', x_o, R\rangle$ spełniający warunki:

(i) P jest zbiorem skończonym, system $\langle P, R, x_o\rangle$ jest półkratą górną z x_o jako elementem najmniejszym,

(ii) $P'=\{y : \{x : xRy\}=\emptyset\}$,

(iii) $\{x : xRy\}$ ma moc co najwyżej n^m.

Sekwent $\Sigma=\langle S_1, S_2, ..., S_n\rangle$ nazywamy sekwentem końcowym, jeśli istnieje $x \in S$ oraz istnieje $j \leqslant n$ takie, że dla każdego $i, 1 \leqslant i \leqslant n, i \neq j$ $S_i = \emptyset$, $S_j = \{x\}$.

Sekwent końcowy Σ ma dowód na gruncie zbioru sekwentów w redukcie logiki nad E wtw istnieje drzewo dowodowe $D=\langle \Delta, \Gamma, \Sigma, R\rangle$ gdzie $\Gamma \subset \Delta$, relacja R jest zdefiniowana następująco:
$\Sigma R \Pi$ wtw istnieje ciąg sekwentów $\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_k$ takich, że $\Sigma_1 = \Sigma$, $\Sigma_k = \Pi$ oraz dla każdego $1 \leqslant i < k$ istnieje reguła r_i taka, że Σ_{i+1} jest jej wnioskiem, a Σ_i jedną z jej przesłanek.

Formuła zdaniowa x jest twierdzeniem w rachunku sekwentów Gentzena nad E wtw istnieją zbiory aksjomatów, na gruncie których mają dowody sekwentów końcowe:

$$\Sigma_1 = \langle S_{11}, S_{12}, ..., S_{1p-1}, S_{1p}, S_{1p+1}, ..., S_{1n}\rangle$$
$$\Sigma_2 = \langle S_{21}, S_{22}, ..., S_{2p-1}, S_{2p}, S_{2p+1}, ..., S_{2n}\rangle$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma_{p-1} = \langle S_{p-11}, S_{p-12}, ..., S_{p-1p-1}, S_{p-1p}, S_{p-1p+1}, ..., S_{p-1n}\rangle$$

gdzie:

$$S_{ij} = \begin{cases} \{x\} & \text{gdy } i=j \\ \emptyset & \text{gdy } i \neq j, \end{cases}$$

$\emptyset$ oznacza zbiór pusty

Przykład:

Niech $E=\{1, 2, 3\}$, $E^*=\{3\}$ i niech $f : E^2 \rightarrow E$ będzie określona następującą tabelką:

f	1	2	3
1	3	3	3
2	2	3	3
3	1	2	3

A więc $f11=f12=f13=f22=f23=f33=3$
$f21=f32=2$
$f31=1$

Reguły mają postacie:

$$\text{(R1)} \quad \frac{\langle S_1 \cup \{y\}, S_2, S_3 \cup \{x\}\rangle}{\langle S_1 \cup \{Fxy\}, S_2, S_3\rangle}$$

$$\text{(R2)}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle S_1 \cup \{y\},\ S_2 \cup \{x\},\ S_3\rangle \\ \langle S_1,\ S_2 \cup \{y\},\ S_3 \cup \{x\}\rangle\end{array}}{\langle S_1,\ S_2 \cup \{Fxy\},\ S_3\rangle}$$

$$\text{(R3)}\quad \frac{\begin{array}{c}\langle S_1 \cup \{x, y\},\ S_2,\ S_3\rangle \\ \langle S_1 \cup \{x\},\ S_2 \cup \{y\},\ S_3\rangle \\ \langle S_1 \cup \{x\},\ S_2,\ S_3 \cup \{y\}\rangle \\ \langle S_1,\ S_2 \cup \{x, y\},\ S_3\rangle \\ \langle S_1,\ S_2 \cup \{x\},\ S_3 \cup \{y\}\rangle \\ \langle S_1,\ S_2,\ S_3 \cup \{x, y\}\rangle\end{array}}{\langle S_1,\ S_2,\ S_3 \cup \{Fxy\}\rangle}$$

Wykażemy, że wyrażenie FxFyx jest twierdzeniem w wyżej sformułowanym rachunku Gentzena.

$$\text{(1)}\qquad \cfrac{\cfrac{\langle \{x\},\ \emptyset,\ \{x, y\}\rangle}{\langle \{Fxy\},\ \emptyset,\ \{x\}\rangle}\ \text{(R1)}}{\langle \{FxFyx\},\ \emptyset,\ \emptyset\rangle}\ \text{(R1)}$$

$$\text{(2)}\qquad \cfrac{\cfrac{\langle \{x\},\ \{x\},\ \{y\}\rangle}{\langle \{Fyx\},\ \{x\},\ \emptyset\rangle}\ \text{(R1)}\quad \cfrac{\langle \{x\},\ \{y\},\ \{x\}\rangle,\ \langle \emptyset,\ \{x\},\ \{x, y\}\rangle}{\langle \emptyset,\ \{Fyx\},\ \{x\}\rangle}\ \text{(R2)}}{\langle \emptyset,\ \{FxFyx\},\ \emptyset\rangle}\ \text{(R2)}$$

Istnieją zbiory sekwentów będących aksjomatami, z których przy pomocy reguł otrzymaliśmy sekwenty końcowe.

$$\Sigma_1 = \langle \{FxFy\},\ \emptyset,\ \emptyset\rangle$$

$$\Sigma_2 = \langle \emptyset,\ \{FxFy\},\ \emptyset\rangle$$

A więc wyrażenie FxFyx jest twierdzeniem reduktu logiki nad E w ujęciu sekwentów Gentzena.

Twierdzenie 1

Jeśli formuła $x \in S$ jest twierdzeniem w rachunku sekwentów Gentzena nad E to x jest tautologią nad E.

Twierdzenie 2

Jeśli formuła $x \in S$ jest tautologią nad E to x jest twierdzeniem rachunku sekwentów Gentzena nad E.

LITERATURA

1. P.W. Borowik — Metody aksjomatyzacji trójwartościowych logik zdaniowych. Rozprawa doktorska, Warszawa 1979.
2. S.J. Surma — A method of the construction of finite Łukasiewiczian algebras and its application to a Gentzen-style characterization of finite logics. Reports on Mathematical Logic, 2(1974), pp. 49—54.
3. S.J. Surma — An algorithm of axiomatizing every finite logic. Reports on Mathematical Logic 3(1974), pp. 57—62.

P. Borowik

ON GENTZEN AXIOMATIZING OF THE REDUCTS OF MULTIVALUED LOGIC

Summary

Certain kind of Gentzen view on arbitrary reduct of multivalent logic is presented in the paper. The sequent is defined as an ordered n-tuple of a set of formulas. The system consists of axioms and rules, and results in certain similarity to the Gantzen systems of logic.