PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 4/1981 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

Izabela DUDEK

O elastyczności pierścieni typu (2, 3, 1)

Niech P będzie pierścieniem niełącznym spełniającym tożsamość $(xy)z=y(zx)$. Pierścień o tej własności nazywamy, za B. Gleichgewichtem [2], pierścieniem parałącznym typu (2, 3, 1) lub krótko pierścieniem typu (2, 3, 1).

Poniżej udowodnimy, że pierścień typu (2, 3, 1) bez nilpotentów jest pierścieniem elastycznym, tzn. spełniona jest w nim równość $(xy)x=x(yx)$. Nim jednak to uczynimy, przytoczymy kilka interesujących własności tego pierścienia, które będą wykorzystane w dowodzie zasadniczego twierdzenia.

Zauważmy po pierwsze, że pierścień typu (2, 3, 1) z jednością jest pierścieniem przemiennym i łącznym. Rzeczywiście, jeśli e jest jednością pierścienia, to

$$xy=(xy)e=y(ex)=yx,$$

a stąd

$$(xy)z=y(zx)=(zx)y=x(yz).$$

B. Gleichgewicht [2] pokazał, że pierścienie typu (2, 3, 1) należą do klasy pierścieni z łącznymi i przemiennymi potęgami, tzn., że każdy podpierścień takich pierścieni generowany przez jeden element jest łączny i przemienny. Pokazał także, że każda dwuwymiarowa algebra typu (2, 3, 1), a więc przestrzeń liniowa wymiaru 2 z niełącznym mnożeniem wektorów spełniającym $(xy)z=y(zx)$, jest przemienna i łączna.

Lemat 1. W parałącznym pierścieniu typu (2, 3, 1) spełniona jest tożsamość:

(1) $$(xy)\ (zt)=(yx)\ (tz).$$

Dowód. Wykorzystując równość $(xy)z=y(zx)$ otrzymujemy $(xy)(zt)= =y((zt)x)=y(t(xz))=((xz)y)t=(z(yx))t=(yx)(tz)$, co kończy dowód.

Bezpośrednio z Lematu 1 — dokonując odpowiednich podstawień w (1) — otrzymujemy

Wniosek 1. W parałącznym pierścieniu typu (2, 3, 1) spełnione są następujące tożsamości:

1) $(xy)(xx) = (yx)(xx)$,
2) $(xx)(xy) = (xx)(yx)$.

Wniosek 2. Parałączny pierścień typu (2, 3, 1) bez dzielników zera jest przemienny i łączny.

Dowód. Na mocy Wniosku 1 mamy

$$0 = (xx)(xy) - (xx)(yx) = (xx)(xy - yx),$$

a to oznacza, że $xy - yx = 0$ bo x jest dowolny a pierścień nie posiada dzielników zera. Zatem pierścień typu (2, 3,1) bez dzielników zera jest przemienny — jest więc również łączny.

Niech (x, y, z) będzie asocjatorem elementów $x, y, z \in P$, tzn. $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$. Jest to — jak wiadomo — ternarna funkcja liniowa.

Lemat 2. Asocjator w parałącznym pierścieniu typu (2, 3, 1) posiada następujące własności:

1) $(x, x, xy) = 0$,
2) $(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0$,
3) $(x, y, x) + (y, x, x) + (x, x, y) = 0$.

Dowód. Dla dowodu pierwszej własności zauważmy, że

$$(x, x, xy) = (xx)(xy) - x(x(xy)) = (xx)(xy) - x((yx)x) =$$
$$= (xx)(xy) - (xx)(yx),$$

a to, na mocy punktu 2 z Wniosku 1, jest równe 0.

Rozpisując asocjatory z punktu 2 i dokonując odpowiednich przekształceń dostajemy

$$(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = (xy)z - x(yz) + (yz)x - y(zx) + (zx)y -$$
$$- z(xy) = (xy)z - x(yz) + (yz)x - (xy)z + x(yz) - (yz)x = 0.$$

Ostatnia własność wynika w sposób oczywisty z drugiej.

Twierdzenie. W parałącznym pierścieniu typu (2, 3, 1) spełniona jest tożsamość $(x, y, z)^2 = 0$.

Dowód. Pokażemy po pierwsze, że

$$(x, y, x)^2 = (x^2, xy, xy) - (x, x, (yx)^2). \tag{2}$$

W tym celu rozpisujemy asocjator (x, y, x) i wykonujemy odpowiednie mnożenia. Otrzymujemy równość

$$(3)\quad \begin{cases}(x, y, x)^2=[(xy)x]\,[(xy)x] - [x(yx)]\,[(xy)x] - [(xy)x]\,[x(yx)]+ \\ \quad +[x(yx)]\,[x(yx)].\end{cases}$$

Teraz każdy z członów prawej strony ostatniej równości poddajemy następującym przekształceniom w których wykorzystujemy tożsamość $(xy)z=y(zx)$ oraz potęgową łączność pierścienia typu (2, 3, 1).

$$\begin{aligned} \text{a)}\quad & [(xy)x]\,[(xy)x]=(yx^2)\,(yx^2)=(x^2(yx^2))y=[x^2((xy)x)]y=(x^3(xy))y= \\ & =(xy)\,(yx^3)=(xy)\,(y(x^2x))=(xy)\,((xy)x^2)= \\ & =[x^2(xy)]\,(xy); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)}\quad & [x(yx)]\,[(xy)x]=(x^2y)\,(yx^2)=[x^2(x^2y)]\,y=[(yx^2)x^2]\,y=x^2\,[y(yx^2)]= \\ & =x^2\,[y((xy)x)]=x^2\,[(xy)\,(xy)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)}\quad & [(xy)x]\,[x(yx)]=(yx^2)\,(x^2y)=x^2((x^2y)y)=x^2\,[(x(yx))y]= \\ & =x^2\,[(yx)\,(yx)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)}\quad & [x(yx)]\,[x(yx)]=(x^2y)\,[x(yx)]=[(yx)\,(x^2y)]\,x=[(yx)\,(x(yx))]\,x= \\ & =[((yx)\,(yx))x]x=x[x((yx)\,(yx))]. \end{aligned}$$

Podstawiając teraz otrzymane wyniki w odpowiednie miejsca (3) otrzymamy (2).

Pierwszy z asocjatorów występujących z prawej strony (2) jest równy 0. Rzeczywiście, na mocy pierwszego lematu i potęgowej łączności mamy

$$\begin{aligned} (x^2, xy, xy) &= [x^2(xy)]\,(xy) - x^2\,[(xy)\,(xy)]=[(yx^2)x]\,(xy) - \\ &- [(xy)x^2]\,(xy)=[x(yx^2)]\,(yx) - [x^2(xy)]\,(yx)= \\ &=(x^3y)\,(yx) - [x^2(yx)]\,(yx)=(x^3y)\,(yx) - (x^3y)\,(yx)=0. \end{aligned}$$

Również drugi asocjator jest równy zero, gdyż

$$(yx^2)=(yx)\,(yx)=x((yx)y)=x(xy^2)$$

oraz

$$\begin{aligned} (x, x, (yx)^2) &= (x, x, x(xy^2))=x^2\,[x(xy^2)] - x\,[x(x(xy^2))]=x^2\,[(y^2x)x] - \\ &- x\,[((xy^2)x)x]=x^3(y^2x) - x\,[(y^2x^2)x]=x^4y^2 - x^2(y^2x^2)= \\ &=x^4y^2 - x^4y^2=0. \end{aligned}$$

Tak więc twierdzenie zostało udowodnione.

Wniosek 3. Pierścień typu (2, 3, 1) bez nilpotentnych elementów jest elastyczny.

Dowód. Mamy wykazać, że $(x, y, x)=0$. A to wynika z powyższego twierdzenia i z braku elementów nilpotentnych.

Wniosek 4. Jeśli parałączny pierścień P typu (2, 3, 1) nie ma nilpotentów, to dla każdego $x \in P$ oraz dla każdego naturalnego $n \geq 2$ element x^n należy do centrum.

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na potęgę elementu x. Pokażemy po pierwsze, że $x^2y = yx^2$ dla wszystkich $x, y \in P$. Z elastyczności pierścienia P wynika, że

$$x^2y = (xx)y = x(yx) = y(xx) = yx^2.$$

Załóżmy teraz, że $x^ny = yx^n$ dla pewnego naturalnego $n \geq 2$ oraz dla dowolnych $x, y \in P$. Pokażemy, że wtedy również $x^{n+1}y = yx^{n+1}$. Rzeczywiście, ponieważ P jest pierścieniem o łącznych potęgach, więc:

$$x^{n+1}y = (xx^n)y = x^n(yx) = (x^{n-1}x)(yx) = x((yx)x^{n-1}) = x(x(x^{n-1}y)) =$$
$$= ((x^{n-1}y)x)x = (yx^n)x = (x^ny)x = yx^{n+1},$$

co kończy dowód.

Inne własności pierścieni typu (2, 3, 1) związane z idempotentami zostały przedstawione w [1].

LITERATURA

1. I. Dudek — Algebry para-asocjatywne. Materiały IV Seminarium Naukowego Wydz. Matem.-Przyrodniczego WSP w Częstochowie, styczeń 1981, 9—11.

2. Б. Глейхгевихт — Парaассоциативные кольца и алгебры, Acta Universitatis Wratislaviensis 58(1967), 21—35.

I. Dudek

ON FLEXIBILITY RINGS OF TYPE (2, 3, 1)

Summary

Let P be a para-associative ring [2] of type (2, 3, 1), i.e. let P be a non-associative ring with $(xy)z = y(zx)$. In this paper we prove that P satisfies $(x, y, x)^2 = 0$, where (x, y, x) is an associator of elements $x, y \in P$. If P is without zerodivisors, then it is commutative and associative. If P has not nilpotent elements, then it is flexible and x^n is a central element for every $x \in P$ and all natural $n \geq 2$.