PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 4/1981 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

Wiesław A. DUDEK

O (i, j)-łącznych n-quasigrupach

Niepusty zbiór G z jedną n-arną operacją $f : G^n \to G$ gdzie $n \geqslant 2$, nazywamy n-grupoidem i oznaczamy symbolem (G, f). Dla przejrzystości zapisu będziemy używać następujących oznaczeń, zamiast

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \underbrace{x, \dots, x}_{s \text{ razy}}, x_{i+s+1}, x_{i+s+2}, \dots, x_n)$$

pisać będziemy $f(x_1^i, \overset{(s)}{x}, x_{i+s+1}^n)$, rozumiejąc, że symbol $\overset{(s)}{x}$ dla $s \leqslant 0$ jest symbolem pustym. Podobnie zakładamy, że x_i^j jest symbolem pustym gdy $j < i$ oraz gdy j przekroczy największy dopuszczalny w danym wyrażeniu wskaźnik.

Wyrażenie postaci

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{r \text{ razy}}(f(x_1^n), x_{n+1}^{2n-1}), \dots), x_{(r-1)(n-1)+2}^{r(n-1)+1})$$

oznaczać będziemy symbolem $f_{(r)}(x_1^{r(n-1)+1})$ i nazywać będziemy prostą iteracją lub długim iloczynem n-arnej operacji f.

Mówimy, że n-grupoid (G, f) spełnia prawo (i, j)-łączności jeśli przy ustalonych $1 \leqslant i < j \leqslant n$ równość

$$f(x_1^{i-1}, f(x_i^{i+n-1}), x_{i+n}^{2n-1}) = f(x_1^{j-1}, f(x_j^{j+n-1}), x_{j+n}^{2n-1})$$

jest spełniona przez dowolne elementy $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1} \in G$.
n-grupoid spełniający prawo (i, j)-łączności dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ nazywamy n-półgrupą.

Z kolei n-grupoid (G, f) w którym dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ oraz dla dowolnych elementów $a_0, a_1, \dots, a_n \in G$ istnieje dokładnie jeden element $x_i \in G$ taki, że $f(a_1^{i-1}, x_i, a_{i+1}^n) = a_0$ nazywamy n-quasigrupą. Zaś n-quasigrupę będącą jednocześnie n-półgrupą nazywamy n-grupą.

Łatwo zauważyć, że w przypadku $n=2$ otrzymamy odpowiednio: grupoid, półgrupę, quasigrupę i grupę. Również lupa ma swoją n-arną analogię. Jest nią n-quasigrupa (G, f) w której istnieje element e, zwany n-arną jednością lub elementem neutralnym działania f, taki, że $f(\overset{(i-1)}{e}, x, \overset{(n-1)}{e})=x$ dla każdego $x \in G$ oraz $i=1, ..., n$.

Jak wiadomo [1], n-grupy mogą nie mieć elementu neutralnego, a te które mają są nieciekawe, gdyż ich operacje są długim iloczynem operacji pewnej grupy binarnej o tym samym nośniku.

Podaną aksjomatykę n-grupy można osłabić. Post zauważył [5], że n-półgrupa będzie n-grupą, jeśli żądać istnienia rozwiązania (bez jednoznaczności) równania $f(a_1^{i-1}, x_i, a_{i+1}^n)=a_0$ dla dowolnych $a_0, a_1, ..., a_n \in G$, $i=1$ oraz $i=n$, lub dla pewnego $i=2, ..., n-1$.

Natomiast E. Sokołow udowodnił [6], że n-quasigrupa jest n-grupą, jeśli spełnia prawo $(i, i+1)$-łączności dla pewnego $i=1, 2, ..., n-1$. Dla n-quasigrup z niepustym centrum, tzn. posiadających element a taki, że $f(a, x_2^n)=f(x_2^i, a, x_{i+1}^n)$ dla $i=2, 3, ..., n$ oraz dowolnych $x_2, ..., x_n \in G$, ostatni wynik można znacznie wzmocnić.

Zanim to uczynimy, udowodnimy pomocnicze lematy.

Lemat 1. n-grupoid (G, f) jest (i, j)-łączny wtedy i tylko wtedy, gdy n-grupoid dualny (G, g) z operacją zadaną wzorem

$$g(x_1^n)=f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_3, x_2, x_1)$$

jest (i^*, j^*)-łączny, gdzie $i^*=n-j+1$ oraz $j^*=n-i+1$.

Dowód. Pokażemy, że z (i, j)-łączności (G, f) wynika (i^*, j^*)-łączność (G, g). Ponieważ $i^*=n-j+1$ oraz $j^*=n-i+1$, więc

$$\begin{aligned} & g(x_1^{n-j}, g(x_{n-j+1}^{2n-j}), x_{2n-j+1}^{2n-1})= \\ & =f(x_{2n-1}, ..., x_{2n-j+1}, f(x_{2n-j}, ..., x_{n-j+1}), x_{n-j}, ..., x_1)= \\ & =f(x_{2n-1}, ..., x_{2n-i+1}, f(x_{2n-i}, ..., x_{n-i+1}), x_{n-i}, ..., x_1)= \\ & =g(x_1^{n-i}, g(x_{n-i+1}^{2n-i}), x_{2n-i+1}^{2n-1}). \end{aligned}$$

Z powyższych równości wynika także, że (i^*, j^*)-łączność (G, g) pociąga za sobą (i, j)-łączność (G, f).

Lemat 2. (i, j)-łączna n-quasigrupa z niepustym centrum jest $(1, n)$-łączna.

Dowód. Niech $j=i+k$ dla pewnego $k \geqslant 1$ oraz niech $c_3, ..., c_n$ będą elementami należącymi do centrum tej n-quasigrupy. Pokażemy najpierw, że n-grupoid (G, f) spełniający założenia jest $(1, i+k)$-łączny. Rzeczywiście, dla $1 < i < 1+k$ otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&f(c_1^{i-1},\ f(x_1^{i+k-1},\ f(x_{i+k}^{i+k+n-1}),\ x_{i+k+n}^{2n-1}),\ c_{i+1}^{n}) = \\
&= f(c_1^{i-1},\ x_1^{k},\ f(x_{k+1}^{i+k-1},\ f(x_{i+k}^{i+k+n-1}),\ x_{i+k+n}^{2n-1},\ c_{i+1}^{i+k}),\ c_{i+k+1}^{n}) = \\
&= f(c_1^{i-1},\ x_1^{k},\ f(c_{i+1}^{2i-1},\ x_{k+1}^{i+k-1},\ c_{2i}^{i+k}\ f(x_{i+k}^{i+k+n-1}),\ x_{i+k+n}^{2n-1}),\ c_{i+k+1}^{n}) = \\
&= f(c_1^{i-1},\ x_1^{k},\ f(c_{i+1}^{2i-1},\ f(x_{k+1}^{i+k-1}\ c_{2i}^{i+k},\ x_{i+k}^{i+n-1}),\ x_{i+n}^{2n-1}),\ c_{i+k+1}^{n}) = \\
&= f(c_1^{i-1},\ x_1^{k},\ f(c_{i+1}^{2i-1},\ f(x_{k+1}^{i+n-1},\ c_{2i}^{i+k}),\ x_{i+n}^{2n-1}),\ c_{i+k+1}^{n}) = \\
&= f(c_1^{i-1},\ f(x_1^{k},\ c_{i+1}^{2i-1},\ f(x_{k+1}^{i+n-1}\ c_{2i}^{i+k}),\ x_{i+n}^{2n-k-1}),\ x_{2n-k}^{2n-1}\ c_{i+k+1}^{n}) = \\
&= f(c_1^{i-1},\ f(c_{i+1}^{2i-1},\ x_1^{k},\ f(x_{k+1}^{i+n-1},\ c_{2i}^{i+k}),\ x_{i+n}^{2n-k-1}),\ x_{2n-k}^{2n-1},\ c_{i+k+1}^{n}) = \\
&= f(c_1^{i-1},\ f(c_{i+1}^{2i-1},\ f(x_1^{n}),\ x_{n+1}^{i+n-1},\ c_{2i}^{i+k},\ x_{i+n}^{2n-k-1}),\ x_{2n-k}^{2n-1}\ c_{i+k+1}^{n}) = \\
&= f(c_1^{i-1},\ f(c_{i+1}^{i+k},\ f(x_1^{n}),\ x_{n+1}^{2n-k-1}),\ x_{2n-k}^{2n-1},\ c_{i+k+1}^{n}) = \\
&= f(c_1^{i-1},\ c_{i+1}^{i+k},\ f(f(x_1^{n}),\ x_{n+1}^{2n-1}),\ c_{i+k+1}^{n}) = \\
&= f(c_1^{i-1},\ f(f(x_1^{n}),\ x_{n+1}^{2n-1}),\ c_{i+1}^{n}),
\end{aligned}
$$

co na mocy jednoznaczności rozwiązania daje $(1, i+k)$-łączność.
Dla $i \geqslant 1+k$, mamy $1 \leqslant k \leqslant i-1$ oraz

$$
\begin{aligned}
&f(c_1^{i+k-1},\ f(x_1^{i-1},\ f(x_i^{i+n-1}),\ x_{i+n}^{2n-1}),\ c_{i+k+1}^{n}) = \\
&\qquad = f(c_1^{i-1},\ f(c_i^{i+k-1},\ x_1^{i-1},\ f(x_i^{i+n-1}),\ x_{n+i}^{2n-k-1}),\ x_{2n-k}^{2n-1},\ c_{i+k+1}^{n}) = \\
&\qquad = f(c_1^{i-1},\ f(c_i^{i+k-1},\ x_1^{i-k-1},\ f(x_{i-k}^{n+i-k-1},\ x_{n+i-k}^{2n-k-1}),\ x_{2n-k}^{2n-1},\ c_{i+k+1}^{n}) = \\
&\qquad = f(c_1^{i+k-1},\ f(x_1^{i-k-1},\ f(x_{i-k}^{n+i-k-1}),\ x_{n+i-k}^{2n-1}),\ c_{i+k+1}^{n}),
\end{aligned}
$$

skąd otrzymujemy $(i-k, i)$-łączność. A ponieważ n-quasigrupa (G, f) jest z założenia $(i, i+k)$-łączna jest więc również $(i-k, i+k)$-łączna. Kładąc $r_1 = i-k$, $r_1+s_1 = i+k$, dostajemy $s_1 = 2k$. Jeśli $r_1 < 1+s_1 = 1+2k$, to z pierwszej części dowodu otrzymujemy $(1, r_1+s_1)$-łączność, a dokładniej $(1, i+k)$-łączność. Jeśli $r_1 \geqslant 1+s_1$, to n-quasigrupa (G, f) jest (r_1-s_1, r_1)-łączna, tzn. $(i-3k, i-k)$-łączna — co razem z $(i-k, i)$-łącznością daje $(i-3k, i)$-łączność. Podstawiając teraz $r_2 = i-3k$, $r_2+s_2 = i$, otrzymujemy $s_2 = 4k$. Skąd wynika $(1, r_2+s_2)$-łączność, tzn. $(1, i+k)$-łączność dla $r_2 < 1+s_2$. Przypadek $r_2 \geqslant 1+s_2$ rozpatrujemy podobnie jak przypadek $r_1 \geqslant 1+s_1$.

Kontynuując tą procedurę zbudujemy ciągi $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$ oraz $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$. Ponieważ dla $i \geqslant 1+k$ istnieją naturalne s i r takie, że $i = sk+r$, gdzie $0 \leqslant r < k$, więc po n krokach otrzymamy $r_n = i - tk < 1+s_n$. A ten przypadek daje $(1, i+k)$-łączność. Tak więc otrzymujemy $(1, i+k)$-łączność również w przypadku $i \geqslant 1+k$.

Rozpatrzmy teraz n-quasigrupę (G, g) zadaną wzorem $g(x_1^n) = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1)$. Z (i, i+k)-łączności n-quasigrupy (G, f) wynika (i^*, j^*)-łączność n-quasigrupy (G, g), gdzie $i^* = n - (i+k)+1$, $j^* = n - i+1$. Ale $j^* = i^*+k$, więc (G, g) jest (i^*, i^*+k)-łączna i ma niepuste centrum, co na mocy poprzedniej części dowodu daje ($1, i^*+k$)-łączność. Stąd zaś wynika (i, n)-łączność n-quasigrupy (G, f). Zatem n-quasigrupa (G, f) jest (1, i+k), (i, i+k) oraz (i, n)-łączna — jest więc (1, n)-łączna.

Twierdzenie. (i, j)-łączna n-quasigrupa o niepustym centrum jest n-grupą.

Dowód. Z poprzedniego lematu wiemy, że n-quasigrupa spełniająca nasze założenia jest (1, n)-łączna. Pokażemy, że jest również (1, k)-łączna dla dowolnego $k = 2, 3, \ldots, n-1$. W tym celu wybierzmy elementy $e_1, \ldots, e_{n-1}$ należące do centrum n-quasigrupy (G, f). Wykorzystując (1, n)-łączność otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
&f(e_1^{n-1}, f(x_1^{k-1}, f(x_k^{n+k-1}), x_{n+k}^{2n-1})) = \\
&\quad = f(f(e_1^{n-1}, x_1), x_2^{k-1}, f(x_k^{n+k-1}), x_{n+k}^{2n-1}) = \\
&\quad = f(f(x_1, e_1^{n-1}), x_2^{k-1}, f(x_k^{n+k-1}), x_{n+k}^{2n-1}) = \\
&\quad = f(x_1, e_1^{n-2}, f(e_{n-1}, x_2^{k-1}, f(x_k^{n+k-1}), x_{n+k}^{2n-1})) = \\
&\quad = f(x_1, e_1^{n-2}, f(x_2^{k-1}, f(x_k^{n+k-1}), x_{n+k}^{2n-1}, e_{n-1})) = \\
&\quad = f(f(x_1, e_1^{n-2}, x_2), x_3^{k-1}, f(x_k^{n+k-1}), x_{n+k}^{2n-1}, e_{n-1}) = \\
&\quad = f(f(x_1, x_2, e_1^{n-2}), x_3^{k-1}, f(x_k^{n+k-1}), x_{n+k}^{2n-1}, e_{n-1}) = \\
&\quad = f(x_1, x_2, e_1^{n-3}, f(e_{n-2}, x_3^{k-1}, f(x_k^{n+k-1}), x_{n+k}^{2n-1}, e_{n-1})) = \\
&\quad = f(x_1, x_2, e_1^{n-3}, f(x_3^{k-1}, f(x_k^{n+k-1}), x_{n+k}^{2n-1}, e_{n-2}, e_{n-1})).
\end{aligned}
$$

Kontynuując powyższą procedurę dojdziemy do wyrażenia

$$f(x_1^{k-1}, e_1^{n-k}, f(f(x_k^{n+k-1}), x_{n+k}^{2n-1}, e_{n-k+1}^{n-1}))$$

z którego otrzymamy

$$
\begin{aligned}
&f(x_1^{k-1}, e_1^{n-k}, f(x_k^{n+k-2}, f(x_{n+k-1}^{2n-1}, e_{n-k+1}^{n-1}))) = \\
&\quad = f(f(x_1^{k-1}, e_1^{n-k}, x_k), x_{k+1}^{n+k-2}, f(x_{n+k-1}^{2n-1}, e_{n-k+1}^{n-1})) = \\
&\quad = f(f(x_1^{k}, e_1^{n-k}), x_{k+1}^{n+k-2}, f(x_{n+k-1}^{2n-1}, e_{n-k+1}^{n-1})) = \\
&\quad = f(x_1^{k}, e_1^{n-k-1}, f(e_{n-k}, x_{k+1}^{n+k-2}, f(x_{n+k-1}^{2n-1}, e_{n-k+1}^{n-1}))) = \\
&\quad = f(x_1^{k}, e_1^{n-k-1}\ f(x_{k+1}^{n+k-2}, e_{n-k}, f(x_{n+k-1}^{2n-1}, e_{n-k+1}^{n-1}))) =
\end{aligned}
$$

$$=f(x_1^k,\ e_1^{n-k-1},\ f(f(x_{k+1}^{n+k-2},\ e_{n-k},\ x_{n+k-1}),\ x_{n+k}^{2n-1},\ e_{n-k+1}^{n-1}))=$$

$$=f(x_1^k,\ e_1^{n-k-1},\ f(f(x_{k+1}^{n+k-1},\ e_{n-k}),\ x_{n+k}^{2n-1},\ e_{n-k+1}^{n-1}))=$$

$$=f(x_1^k,\ e_1^{n-k-1},\ f(x_{k+1}^{n+k-1},\ f(e_{n-k},\ x_{n+k}^{2n-1},\ e_{n-k+1}^{n-1})))=$$

$$=f(x_1^k,\ e_1^{n-k-1},\ f(x_{k+1}^{n+k-1},\ f(x_{n+k}^{2n-1},\ e_{n-k}^{n-1}))).$$

Powtarzając powyższe przekształcenia otrzymamy

$$f(x_1^{n-1},\ f(x_n^{2n-2},\ f(x_{2n-1},\ e_1^{n-1})))=f(x_1^{n-1},\ f(f(x_n^{2n-1}),\ e_1^{n-1}))=$$

$$=f(f(x_1^{n-1},\ f(x_n^{2n-1})),\ e_1^{n-1})=f(e_1^{n-1},\ f(f(x_1^n),\ x_{n+1}^{2n-1})).$$

Ostatecznie więc mamy równość

$$f(e_1^{n-1},\ f(x_1^{k-1},\ f(x_k^{n+k-1}),\ x_{n+k}^{2n-1}))=f(e_1^{n-1},\ f(f(x_1^n),\ x_{n+1}^{2n-1}),$$

z której na mocy jednoznaczności rozwiązania dostajemy

$$f(x_1^{k-1},\ f(x_k^{n+k-1}),\ x_{n+k}^{2n-1})=f(f(x_1^n),\ x_{n+1}^{2n-1}),$$

co dowodzi (1, k)-łączności n-quasigrupy (G, f).

Tak więc twierdzenie zostało udowodnione.

Wniosek. n-quasigrupa (G, f) z niepustym centrum jest n-grupą wtedy i tylko wtedy, gdy jest (i, j)-łączna.

W pracach [2], [3] i [4] podano inne warunki konieczne i wystarczające na to by n-quasigrupa (a nawet n-grupoid) była n-grupą. W [2] podano również warunki które wymuszają przemienność n-grupy.

LITERATURA

1. W. Dörnte — Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff; Math. Z. 29(1928), 1—19.
2. W.A. Dudek — Remarks on n-groups;Demonstratio Math. 13(1980), 165—181.
3. W.A. Dudek, K. Głazek, B. Gleichgewicht — A note on the axioms of n-groups; Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, 29 Universal Algebra, Esztergom (Hungary) 1977, str. 195—202, North-Holland, Amsterdam 1981.
4. W.A. Dudek, I. Groździńska — On ideals in regular n-semigroups; Math. Bilten (Skopje), 3—4 (1979—1980), 35—44.
5. E.L. Post — Polyadic groups; Trans. Amer. Math. Soc. 48(1940), 208—350.
6. Е.И. Соколов — О теореме Тлускина-Хоссу для п-групп Дёрнте; Математические исследования 39(1976), 187—189.

W.A. Dudek

ON (i, j)-ASSOCIATIVE n-QUASIGROUPS

Summary

In this paper we prove that every (i, j)-associative n-quasigroup ($n \geqslant 2$) with a non-empty center is an n-group.