PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 4/1981 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

Waldemar KORCZYŃSKI

O pewnych własnościach kategorii częściowo monoidalnych

Część I

Wstęp

W pracy opisano pewne algebraiczne własności klasy procesów systemu współbieżnego. System współbieżny był opisywany przez sieć Petri wraz z pewną klasą konfiguracji. Procesy jakie mogą zachodzić w takim systemie były opisane przez zbiory częściowo uporządkowane wraz z pewną dodatkową informacją. W [3], [4] pokazano, że klasa procesów dowolnego systemu współbieżnego może być interpretowana jako pewna algebra — tzw. kategoria częściowo monoidalna. Podano tam szereg własności takich algebr, które przy pewnych dodatkowych założeniach określały je z dokładnością do izomorfizmu, jako algebry procesów pewnych systemów współbieżnych (por [1]). W tej pracy pokażemy, że postulaty określające tzw. p-kategorie od których wymagamy spełnienia mniejszej ilości postulatów niż od klasy algebr omawianych w [1], „wymuszają" pewną „wewnętrzną" strukturę każdego swego elementu. Dokładniej pokażemy, że każdemu elementowi podkładu algebry tego typu przyporządkować można jednoznacznie pewną kratę. Opiszemy też pewne homomorfizmy tych krat. Praca ta jest pierwszą częścią większej pracy, której celem jest uogólnienie wyników opisanych w [1] na tzw. „niedyskretne" kategorie częściowo monoidalne.

Definicja 1 Kategorią częściowo monoidalną (KCM) nazywamy algebrę częściową

$$\underline{\underline{C}}=(C, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \cdot, +, 0)$$

typu $\tau=(1, 1, 2, 2, 0)$ taka, że:

(i) redukt $\mathrm{cat}(\underline{\underline{C}})=(C, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \cdot)$ jest kategorią

(ii) redukt $\mathrm{mon}(\underline{\underline{C}})=(C, +, 0)$ jest algebrą częściową spełniającą warunki: dla dowolnych $a, b, c \in C$

(a) $a+(b+c)=(a+b)+c$
(b) $a+b=b+a$
(c) $a+0=a$

(iii) dla dowolnych a, b, c, d $\in C$ jeśli określone są: ab, cd, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ to określone są $ab+cd$ i $(a+c)(b+d)$ i zachodzi równość

$$ab+cd=(a+c)(b+d)$$

Definicja 2 KCM $\underline{C}$ nazywamy normalną wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunki:

(i) każdy morfizm reduktu cat($\underline{C}$) jest bimorfizmem (tzn. mono i empimorfizmem) a każda retrakcja tożsamością.

(ii) dla dowolnych a, b, c $\in C$

(a) $a+b=c+b \Rightarrow a=c$
(b) $a+b=0 \Rightarrow a=b=0$
(c) jeśli $a+a$ jest określone to $a=0$

Definicja 3 Normalną KCM C nazywamy bezpieczną wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunki:

(i) dla dowolnych a, b $\in C$

(a) $\mathrm{dom}(a+b)=\mathrm{dom}(a)+\mathrm{dom}(b)$
(b) $\mathrm{cod}(a+b)=\mathrm{cod}(a)+\mathrm{cod}(b)$

(ii) dla dowolnych a, b, c $\in C$

(a) $a+b=(\mathrm{dom}(a)+b)(a+\mathrm{cod}(b))$
(b) $ab+\mathrm{dom}(c)=(a+\mathrm{dom}(c))(b+\mathrm{dom}(c))$

W pracy tej nie nakładamy żadnych ograniczeń na zbiór C

Definicja 4 Normalną i bezpieczną KCM $\underline{C}$ nazywamy p-kategorią (PK) jeśli spełnia warunki:

(i) dla dowolnych a, b, c, d $\in C$ jeśli

$ab=cd$

to istnieją p, q, r, s $\in C$ takie, że

$a=p(\mathrm{dom}(q)+r) \quad b=(q+\mathrm{cod}(r))s$
$c=p(q+\mathrm{dom}(r)) \quad d=(\mathrm{cod}(q)+r)s$

(ii) dla dowolnych a, b, c, d $\in C$ jeśli

$a+b=c+d$

to istnieją p, q, r, s $\in C$ takie, że

$a=p+q; \quad c=p+r$
$b=r+s; \quad d=q+s$

(iii) dla dowolnych a, b, c, d $\in C$ jeśli

$ab=c+d$

to istnieją p, q, r, s $\in C$ takie, że

$a = p + q; \quad c = pr$
$b = r + s; \quad d = qs$

Niech C będzie p-kategorią, a, $b \in C$

Definicja 5

$$a \equiv b \Leftrightarrow \exists c \in C : b = ac$$

Twierdzenie 1 Relacja „$\equiv$" jest porządkiem częściowym.

Dowód:

a) zwrotność: dla dowolnego $a \in C$ jest

$a = a \cdot \mathrm{cod}(a)$

b) przechodniość: jeśli dla pewnych e, $d \in C$

$b = ad \quad \text{i} \quad c = be$

to

$c = be = (ad)e = a(de)$

c) antysymetria: załóżmy, że dla pewnych d, $e \in C$:

$b = ad \quad \text{i} \quad a = be$

Stąd

$b = b(ed) \quad \text{i} \quad a = a(de)$

z D. 2 (i) otrzymujemy więc

$ed = \mathrm{cod}(b) = \mathrm{cod}(a) = de$

Skąd

$e = \mathrm{cod}(a) = \mathrm{cod}(b) = d$

Zatem

$b = ad = a\mathrm{cod}(a) = a$

Definicja 6 Dla dowolnego $x \in C$:

$S(x) = \{y \in C : y \equiv x\}$

Elementy zbioru S(x) nazywać będziemy segmentami początkowymi elementu x.

Zgodnie z T1 każdemu elementowi $x \in C$ przyporządkować można porządek

$S(x) = (S(x), \equiv_x)$

Lemat 1 Dla dowolnej PK C oraz a, b, $c \in C$

jeśli $a + b = c + d \quad \text{i} \quad \mathrm{dom}(a) = \mathrm{dom}(c)$ to

$a = c \quad \text{oraz} \quad b = d$

Dowód: Ponieważ

$$\mathrm{dom}(a) + \mathrm{dom}(b) = \mathrm{dom}(a + b) = \mathrm{dom}(c + d) = \mathrm{dom}(c) + \mathrm{dom}(d)$$

więc z D. 2 (ii) mamy

$\mathrm{dom}(b) = \mathrm{dom}(d)$

(bo $\mathrm{dom}(a) = \mathrm{dom}(c)$). Z D. 4 (ii) wnosimy że istnieją p, q, r, $s \in C$ takie, że

$$a = p + q \qquad c = p + r$$

oraz

$$b = r + s \qquad d = q + s$$

Stąd:

$$dom(a) = dom(p) + dom(q) = dom(p) + dom(r)$$

tzn.

$$dom(q) = dom(r)$$

ale $(a+b)$ a więc również

$$dom(a+b) = dom(a) + dom(b) = (dom(p) + dom(q)) + (dom(q) + dom(s)) =$$
$$= dom(p) + (dom(q) + dom(q)) + dom(s)$$

tzn. również

$$dom(q) + dom(q)$$

jest określone. Z D. 2 (ii) (e) otrzymujemy więc

$$dom(q) = 0 = dom(r)$$

tzn.

$$r = q = 0$$

(jeśli dla pewnego $a \in C$, $dom(a) = 0$ to $dom(a) + dom(a) = 0 + 0$ jest określone tzn. określone jest dom $(a+a)$ a więc również $a+a$ Zatem $a = 0$)

Stąd:

$$a = p = c$$

oraz

$$b = s = d$$

Niech $\underline{\underline{C}}$ będzie PK, $x \in C$, $a, b \in S(x)$

Z D. 4 (i) wynika, że istnieją wtedy elementy $p, q, r \in C$ takie, że:

$$a = p(dom(q) + r); \qquad b = p(q + dom(r))$$

Elementy te nie są przez a i b wyznaczone jednoznacznie. Pokażemy jednak, że elementy

$$p \quad \text{oraz} \quad p(q+r)$$

są przez elementy a i b wyznaczone jednoznacznie, a co więcej, że są one odpowiednio dolnym i górnym kresem (w porządku $\underline{S}(x)$) elementów a i b.

Z D. 4 (i) wynika, że:

$$p \equiv a \quad i \quad p \equiv b$$

oraz

$$a \equiv p(q+r) \quad i \quad b \equiv p(q+r)$$

Niech $\underline{\underline{C}}$ będzie PK, $x \in C$, $a, b \in S(x)$ oraz p, q, r będą takie, że

$$a = p(dom(q) + r); \qquad b = p(q + dom(r))$$

a $p' \in C$ spełnia warunki:

$$p' \equiv a, \qquad p' \equiv b$$

Lemat 2 Jeśli $p' \not\equiv p$ i $p \not\equiv p'$ to $p = p'$

Dowód: Z określenia elementu p' wynika, że dla pewnych $a', b' \in C$:

$$a = p'a' \quad \text{oraz} \quad b = p'b'$$

tzn.

$$p(\mathrm{dom}(q) + r) = p'a' \quad \text{i} \quad p(q + \mathrm{dom}(r)) = p'b'$$

Stąd i D. 4 (i) wnosimy, że istnieją $A, B, C, D \in C$, takie, że:

(1) $p = A(B + \mathrm{dom}(C))$

(2) $\mathrm{dom}(q) + r = (\mathrm{cod}(B) + C)D$

(3) $p' = A(\mathrm{dom}(B) + C)$

(4) $a' = (B + \mathrm{cod}(C))D$

Z (2) i D. 4 (iii) mamy dla pewnych $T, U, V, W \in C$

(5) $\mathrm{dom}(q) = TU$

(6) $r = VW$

(7) $\mathrm{cod}(B) + C = T + V$

(8) $D = U + W$

Z (5) otrzymujemy:

(5') $T = U = \mathrm{dom}(q)$

skąd:

(7') $\mathrm{cod}(B) + C = \mathrm{dom}(q) + V$

(8') $D = \mathrm{dom}(q) + W$

Ponieważ:

$$p(q + \mathrm{dom}(r)) = p'b'$$

więc mamy z (1) i (3):

$$A(B + \mathrm{dom}(C))\,(q + \mathrm{dom}(r)) = A(\mathrm{dom}(B) + C)b'$$

skąd, wobec D. 2 (i):

$$(B + \mathrm{dom}(C))\,(q + \mathrm{dom}(r)) = (\mathrm{dom}(B) + C)b'$$

Istnieją więc w myśl D. 3 (i) elementy $E, F, G, H \in C$ takie, że

(9) $\mathrm{dom}(B) + C = E\mathrm{dom}(F) + G$

(10) $b' = (F + \mathrm{cod}(G))H$

(11) $B + \mathrm{dom}(C) = E(F + \mathrm{dom}(G))$

(12) $q + \mathrm{dom}(r) = (\mathrm{cod}(F) + G)H$

Z (9) otrzymujemy:

(13) $\mathrm{dom}(B) = T'U'$

(14) $C = V'W'$

(15) $E = T' + V'$

(16) $\mathrm{dom}(F) + G = U' + W'$

dla pewnych $T', U', V', W', \in C$. Z (13) mamy

(13') $T' = U' = \mathrm{dom}(B)$

skąd:

(15') $E = \mathrm{dom}(B) + V'$

(16') $\mathrm{dom}(F) + G = \mathrm{dom}(B) + W'$

Podstawiając (15′) do (11) otrzymujemy:

(17) $B+\mathrm{dom}(C)=(\mathrm{dom}(B)+V')\,(F+\mathrm{dom}(G))$

Zatem zgodnie z D. 4 (iii) dla pewnych $P, Q, R, S \in C$:

(18) $B=PQ$

(19) $\mathrm{dom}(C)=RS$

(20) $\mathrm{dom}(B)+V'=P+R$

(21) $F+\mathrm{dom}(G)=Q+S$

Z (19) otrzymujemy:

(19′) $R=S=\mathrm{dom}(C)$

Stąd

(20′) $\mathrm{dom}(B)+V'=P+\mathrm{dom}(C)$

(21′) $F+\mathrm{dom}(G)=Q+\mathrm{dom}(C)$

Ponieważ z (18) mamy

(22) $\mathrm{dom}(B)=\mathrm{dom}(P)$

więc z (20′) i Lematu 1 otrzymujemy:

(23) $\mathrm{dom}(b)=P$ i $V'=\mathrm{dom}(C)$

a stąd wobec (18)

(24) $B=Q$

oraz z (15′)

(25) $E=\mathrm{dom}(B)+V'=\mathrm{dom}(B)+\mathrm{dom}(C)$

tzn. $E \in \mathrm{Ob}(\mathrm{cat}(C))$

Stąd, (11), (14), i (16′)

(26) $B+\mathrm{dom}(C)=E(F+\mathrm{dom}(G))=(\mathrm{dom}(B)+\mathrm{dom}(C))\,(F+\mathrm{dom}(G))=$
$=F+\mathrm{dom}(G)$

(27) $C=V'W'=\mathrm{dom}(C)W'=W'$

(28) $\mathrm{dom}(F)+G=\mathrm{dom}(B)+W'=\mathrm{dom}(B)+C$

Z (11) i D. 4 (iii) wnosimy, że dla pewnych $T'', U'', V'', W'' \in C$:

(29) $B=T''U''$

(30) $\mathrm{dom}(C)=V''W''$

(31) $E=T''+V''$

(32) $\mathrm{dom}(F)+G=U''+W''$

Stąd:

(33) $E=T''+\mathrm{dom}(C)$

(34) $\mathrm{dom}(F)+G=U''+\mathrm{dom}(C)$

Z (25) i (33) otrzymujemy

(35) $T''=\mathrm{dom}(B)$

a stąd i (29)

(36) $B=U''$

tzn. wobec (30) i (32)

(37) $\mathrm{dom}(F)+G=B+\mathrm{dom}(C)$

Z (28) mamy więc

(38) $\mathrm{dom}(B)+C=\mathrm{dom}(F)+G=B+\mathrm{dom}(C)$

skąd wobec Lematu 1

(39) $B=\mathrm{dom}(B); \quad C=\mathrm{dom}(C)$

tzn.

(40) $B, C \in \mathrm{Ob}(\mathrm{cat}(\underline{\underline{C}})$

Zatem

$$p=A(B+\mathrm{dom}(C))=A(\mathrm{dom}(B)+\mathrm{dom}(C))=A(\mathrm{dom}(B)+C)=p'$$

Lemat 3 Jeśli przy założeniach takich jak przy Lemacie 2 jest $p \equiv p'$ oraz $p' \equiv a$ i $p' \equiv b$ to

$$p=p'$$

Dowód: Jeśli $p \equiv p'$ to dla pewnego $t \in C$

$$p'=pt$$

Jeśli $p' \equiv a$ i $p' \equiv b$ to dla pewnych $a', b' \in C$

$$a=p'a' \quad \text{i} \quad b=p'b'$$

Stąd

$$a=p(ta') \quad \text{oraz} \quad b=p(tb')$$

Zatem

$$p(\mathrm{dom}(q)+r)=p(ta') \quad \text{oraz} \quad p(q+\mathrm{dom}(r))=p(tb')$$

skąd

$$\mathrm{dom}(q)+r=ta' \quad \text{oraz} \quad q+\mathrm{dom}(r)=tb'$$

Istnieją więc $A, B, C, D, A', B', C', D' \in C$ takie, że

(1) $\mathrm{dom}(q)=AB \qquad q=A'B'$

(2) $r=CD \qquad \mathrm{dom}(r)=C'D'$

(3) $t=A+C \qquad t=A'+C'$

(4) $a'=B+D \qquad b'=B'+D'$

Podstawiając (1) i (2) do (3) mamy:

(5) $t=A+C=\mathrm{dom}(q)+C$

(5') $t=A'+C'=A'+\mathrm{dom}(r)$

$$\mathrm{dom}(t)=\mathrm{cod}(p)=\mathrm{dom}(q)+\mathrm{dom}(r)$$

oraz

$$\mathrm{dom}(t)=\mathrm{dom}(q)+\mathrm{dom}(C)$$

skąd

$$\mathrm{dom}(c)=\mathrm{dom}(r)$$

Z lematu 1 otrzymujemy więc wobec

$$\mathrm{dom}(q)+C=A'+\mathrm{dom}(r)$$

(co wynika z (5) i (5')), że

$$C=\mathrm{dom}(r) \quad \text{i} \quad A'=\mathrm{dom}(q)$$

Skąd

$$t=A+C=\mathrm{dom}(q)+\mathrm{dom}(r)=\mathrm{cod}(p)$$

tzn.

$$t \in Ob(cat(C))$$

stąd

$$p = p'$$

Twierdzenie 2. Dla $x \in C$, $a, b \in S(x)$ oraz $p, q, r \in C$ takich, że

$$a = (p(dom(q) + r); \quad b = p(q + dom(r))$$

element p jest kresem dolnym elementów a ib w porządku S(x)

Dowód: Dla dowolnego $p' \in S(x)$ takiego, że

$$p' \equiv a \quad i \quad p' \equiv b$$

możliwe są tylko następujące jego „położenia" względem p

1. $p' \equiv p$
2. $p \equiv p'$ — wtedy jednak zgodnie z lematem 3 jest $p = p'$
3. $\neg(p \equiv p')$ i $\neg(p' \equiv p)$ — wtedy zgodnie z lematem 2 jest $p = p'$

Zatem dla dowolnego p' spełniającego warunki

$$p' \equiv a \quad i \quad p' \equiv b$$

zachodzi

$$p' \equiv p$$

tzn. p jest najmniejszym elementem spełniającym warunek

$$p \equiv a \quad i \quad p \equiv b$$

p jest więc kresem dolnym elementów a i b.

Niech $\underline{\underline{C}}$ będzie PK, $x \in C$

Definicja 6'

$$S'(x) = \{y \in C: z \in C; \quad x = zy\}$$

Elementy zbioru $S'(x)$ nazywać będziemy segmentami końcowymi elementu x.

Dla $a', b' \in S'(x)$

$$a' \equiv' b' <-> \exists c' \in S'(x): a' = c'b'$$

Określiliśmy w ten sposób porządek

$$S(x) = (S'(x), \equiv')$$

Z D. 2 (i) wynika, że dla dowolnych $x \in C$ oraz $a \in S(x)$ istnieje dokładnie jedno $a' \in S'(x)$ takie, że

$$x = aa'$$

Można więc określić funkcję

$$S(x) \ni a \xrightarrow{\psi} a' \in S'(x)$$

Podobnie można określić funkcję

$$S'(x) \ni a' \xrightarrow{\varphi} a \in S(x)$$

Z D. 2 (i) wynika, że obie te funkcje są bijekcjami. Ponadto

$$\varphi\psi = \mathrm{id}\, S(x)$$

oraz

$$\psi\varphi = \mathrm{id}\, S'(x)$$

Twierdzenie 3. Funkcje φ i ψ są monotoniczne.

Dowód: Niech a, b $\in S(x)$ oraz

$$a \equiv b$$

tzn. dla pewnego $u \in C$

$$b = au$$

Mamy więc:

$$x = aa' = bb' = (au)b' = a(ub')$$

tzn.

$$aa' = a(ub')$$

stąd i D. 2 (i)

$$a' = ub'$$

tzn.

$$a' \equiv' b'$$

Dokładnie tak samo pokazujemy, że funkcja ψ jest monotoniczna.

Wniosek: Funkcje φ i ψ są izomorfizmami porządków $\underline{S}(x)$ i $\overline{S}(x)$

Niech $x \in C$, a, b $\in S(x)$. Zgodnie z D. 4 (i) istnieją elementy p, q, r, s $\in C$ takie, że

$$x = p(q+r)s$$

Z twierdzenia 2 wynika, że element p jest kresem dolnym elementów a i b. W myśl wniosku z twierdzenia 3 element S jest kresem dolnym elementów a', b' $\in S'(x)$. Jest on więc wyznaczony jednoznacznie. Zatem element

$$p(q+r)$$

jest w myśl D. 2 (i) też wyznaczony jednoznaacznie. Element ten jest oczywiście kresem górnym elementów a i b. Otrzymaliśmy w ten sposób następujące:

Twierdzenie 4 Dla dowolnej PK C oraz $x \in C$ para

$$\underline{S}(x) = (S(x), \equiv)$$

jest kratą, para

$$\overline{S}(x) = (S'(x), \equiv')$$

jest też kratą i kraty te są izomorficzne.

Niech $x, y \in C$, $cod(x)=dom(y)$ tzn.
xy jest określone. Rozważmy odwzorowanie

$$f : S(y) \to S(xy)$$

o przyporządkowaniu:

$$S(y) \ni a \to xa \in S(xy)$$

Jeśli dla pewnych $a, b \in S(y)$

$$f(a)=f(b)$$

tzn.

$$xa=xb$$

to z D. 1 (i) otrzymujemy

$$a=b$$

Odwzorowanie f jest więc różnowartościowe.
Załóżmy teraz, że dla $a, b \in S(y)$

$$a \equiv b$$

tzn. dla pewnego $u \in C$

$$b=au$$

Stąd: i D. 2 (i)

$$xb=x(au)=(xa)u$$

tzn.

$$f(a)=xa \equiv xb=f(b)$$

Załóżmy, że dla $a', b' \in S'(xy)$
istnieją $a, b \in S(y)$ takie, że

$$a'=f(a)=xa \quad i \quad b'=f(b)=xb$$

tzn. że $a', b' \in f(S(y))$ oraz, że

$$f(a) \equiv f(b)$$

Mamy więc

$$xa \equiv xb$$

tzn. istnieje $t \in C$ takie, że

$$xb=(xa)t$$

Stąd $xb=x(at)$
i z D. 2 (i) mamy

$$b=at$$

tzn.

$$a \equiv b$$

Udowodniliśmy w ten sposób następujące:

Twierdzenie 5. Funkcja f jest zanurzeniem porządku $\underline{S}(y)$ w porządek $\underline{S}(xy)$

Załóżmy, że dla pewnych $a', b' \in S(xy)$ $a' \in f(S(y))$ oraz $a' \equiv b'$. Mamy więc:

$$a'=xu \quad oraz \quad b'=a't$$

dla pewnego $u \in S(y)$, $t \in C$. Stąd:

$$b' = a't = (xu)t = x(ut)$$

oraz

$$ut \in S(y) \text{ (bo } u \in S(y) \quad \text{i} \quad xut \in S(xy)),$$

zatem

$$b' \in f(S(y))$$

Krata S(x) ma dla dowolnego $x \in C$ element najmniejszy — dom(x) i element największy — x. Zgodnie z powyższymi uwagami mamy więc:

Twierdzenie 6. Dla dowolnych $x, y, \in C$ obrazem zbioru S(y) przez funkcję f jest przedział: $[x \rightarrow)$ tzn. zbiór

$$\{u \in S(xy) : x \equiv u\}$$

Wniosek: Funkcja f jest izomorfimem kraty S(y) na kratę

$$([x\rightarrow), \equiv_{xy} | ([x\rightarrow), \equiv_{xy} | [x\rightarrow))$$

Dowód: Jest to bezpośredni wniosek z T. 4 i T. 5

Oczywiście analogiczne twierdzenia są prawdziwe o funkcji

$$g : S'(x) \rightarrow S(xy)$$

o przyporządkowaniu

$$S(x) \ni a' \rightarrow a'y \in S(xy)$$

Niech $x, y \in C$, $y_o \in S(y)$, a

$$f_1 : S(x) \rightarrow S(x+y)$$

będzie funkcją o przyporządkowaniu:

$$S(x) \ni a \rightarrow a + y_o \in S(x+y)$$

Twierdzenie 7. Funkcja f_1 jest zanurzeniem porządku $(S(x), \equiv_x)$ w porządek $(S(x+y), \equiv_{x+y})$.

Dowód: Niech $a, b \in S(x)$, $a \equiv b$. Zatem dla pewnego $u \in S'(b)$

$$b = au$$

Stąd:

$$f_1(b) = f_1(au) = au + y_o = au + y_o cod(y_o) = (a + y_o)(u + cod(y_o)) =$$
$$= f(a)(u + cod(y_o))$$

tzn.

$$f_1(a) \equiv_{x+y} f_1(b)$$

Załóżmy teraz, że $a', b' \in f_1(S(x)$ oraz

$$a' \equiv_{x+y} b'$$

tzn. dla pewnych (w myśl D. 2 (ii) (a) jednych) $a, b \in S(x)$

$$a + y_o \equiv b + y_o$$

czyli

$$b + y_o = (a + y_o)(u + t)$$

gdzie $u+t$ jest takie, że

$b=au \quad i \quad y_o=y_o t$

(jeśli $b+y_o=(a+y_o)v$ to istnieją w myśl D. 4 (iii) elementy $A, B, C, D \in C$ takie, że

$b=AB; \quad a+y_o=A+C=A+CD$

$y_o=CD; \quad v=B+D$

Stąd

$A+C=A+CD$

a więc

$C=CD$

tzn.

$D=cod(C)$

skąd

$y_o=C$

Zatem

$a+y_o=A+y_o$

tzn.

$a=A$

skąd

$b=aB$

Wystarczy teraz położyć $u=B$ i $t=cod(y_o)$)

Stąd

$b+y_o=au+y_o cod(y_o)$

tzn.

$b+y_o=au+y_o$

Skracając prawostronnie) przez y_o otrzymamy

$b=au$

tzn.

$a \equiv b$

Jeśli $x, y \in C$ i $x+y$ jest określone, to dla dowolnych zbiorów

$Z_1 \subseteq S(x)$ i $Z_2 \subseteq S(y)$

$Z_1+Z_2=\{a+b: \quad a \in Z_1 \quad i \quad b \in Z_2\}$

Z D. 2 (iii) wynika, że zbiór Z_1+Z_2 jest dobrze określony. Ponadto Z_1+ $+Z_2 \subseteq S(x)+S(y)$. W zbiorze Z_1+Z_2 możemy określić porządek:

$a+b \equiv a'+b' \Longleftrightarrow a \equiv_x a' \quad i \quad b \equiv_y b'$

Lemat 4 Dla dowolnych $x, y \in C$, $y_o \in S(y)$ para

$(S(x)+\{y_o\}, \equiv)$

jest kratą i jako krata jest podkratą kraty

$(S(x)+S(y), \equiv)$

Dowód: Wystarczy zauważyć, że krata

$(S(x)+S(y), \equiv)$

jest izomorficzna z

$\underline{S}(x)\times\underline{S}(y)/\{((a, b), (a', b')) : (a, b)=(a', b') \text{ lub } (a, b)=(b', a')\}$

Twierdzenie 7. Funkcja f_1 jest izomorfizmem kraty $(S(x), \equiv_x)$ na kratę $(S(x)+\{y_o\}, \equiv)$

Dowód: Różnowartościowość funkcji f_1 jest bezpośrednią konsekwencją D. 2 (ii). Jeśli $u \in S(x)+\{y_o\}$ to z określenia zbioru $S(x)+\{y_o\}$ wnosimy, że dla pewnego $a \in S(x)$

$a=a+y_o$

tzn.

$u=f_1(a)$

Oczywiście prawdziwe są analogony twierdzeń 6 i 7 dla funkcji g_1

$g_1 : S'(x) \to S'(x+y)$

o przyporządkowaniu

$a' \to a'+y_o'$

i dla funkcji

$f_2 : S'(y) \to S'(x+y) \quad \text{i} \quad g_2 : S'(y) \to S'(x+y)$

o przyporządkowaniach

$a \to x_o+a \quad \text{i} \quad a' \to x_o'+a'$

Zakończenie

Zagadnienie opisu klasy procesów systemu współbieżnego jest jednym z podstawowych problemów teori systemów. Dla dużej klasy systemów współbieżnych opisywanych przez tzw. sieci Petri problem ten został rozwiązany przez opisanie tzw. „ciągów częściowych" i „sieci wystąpień". Opisy te wykorzystują jednak w istotny sposób założenie pewnego rodzaju „dyskretności" systemu. Dla opisu systemów ciągłych należy zagadnienie „odwrócić". Zamiast **klasy procesów ustalonego systemu** można opisywać pewną **algebrę procesów** rezygnując z odnoszenia jej do jakiegokolwiek systemu. Można wtedy rozumieć, że **system jest określony przez algebrę swoich procesów**. W pracy tej prezentowane jest takie właśnie podejście do procesów. Modelem procesu jest tu klasa jego przekrojów (stanów).

LITERATURA

1. Korczyński W. „Aksjomatyczna charakteryzacja algebr procesów systemów współbieżnych".
   praca IPI PAN 400 1980 W-wa

2. Winkowski J. „Behaviours of Concurrent Systems" Theoretcal c Computer Science 12(1980), pp. 39—60.
3. Wikowski J. „Towards an algebraic description of discrete processes and systems". ICS PAN Reports 408 W-wa 1980.
3. Winkowski J. „Behaviours of Concurrent Systems" Theoretical c Computer

W. Korczyński

SOME PROPERTIES OF PARTIALLY MONOIDAL CATEGORIES

Summary

In the paper is shown, that with any element of any p-category a lattice is connected. We describe some homomorphisms of those lattices. This paper is a part of a greater paper about representations — theorem for partially monoidal categiries.