PRACE NAUKOWE Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Nr 4/1981 Seria Matematyczno-Przyrodnicza

Waldemar KORCZYŃSKI

O pewnych własnościach kategorii częściowo monoidalnych

Część II

Wstęp

Jednym z istotniejszych dla teorii systemów zagadnień jest problem opisu klasy procesów takiego systemu. Dla systemów dyskretnych klasa taka tworzy wraz z odpowiednio określonymi operacjami na procesach pewną algebrę, której podstawowe własności opisano w [2]. Można pokazać, że podanie takiej algebry zachowań określa jednoznacznie system (przez system rozumiemy tzn. podobnie jak w [3] — dowolną sieć Petri wraz z pewnym zbiorem tzw. konfiguracji). Z drugiej strony opis systemów „ciągłych" przez sieć Petri wraz z odpowiednią klasą konfiguracji nie jest możliwy, bowiem w tym przypadku nie można wyodrębnić tzw. „przejść" tzn. odpowiedników atomicznych, nie podzielnych zdarzeń. Pewnym wyjściem z tej sytuacji może być opis takiego system uprzez algebrę jego procesów (algebra zachowań). Praca niniejsza jest kontynuacją [1] i poświęcona jest opisowi pewnych elementarnych własności tzw. p-kategorii, które stanowią właściwe narzędzie algebraicznego opisu klasy procesów w „systemie ciągłym".

Niech $\underline{\underline{C}}$ będzie dowolną, p-kategoria

Definicja 1. Dla dowolnych a, b $\in$ C

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow \exists c \in C : b = a + c$$

Lemat 0. Dla dowolnej p-kategorii $\underline{\underline{C}}$

para (C, $\leqslant$) jest porządkiem częściowym.

Dowód: a) zwrotność: dla a $\in$ C mamy

$a = a + 0$

b) przechodniość: dla a, b, c, d, e $\in$ C Jeśli

$b = a + d$ oraz $c = b + c$

to

$$c=b+e=(a+d)+e=a+(d+e)$$

c) antysymetria: dla a, b, c, d $\in$ C Jeśli

$$b=a+c \quad \text{oraz} \quad a=b+d$$

to

$$a=b+d=(a+c)+d=a+(c+d)$$

stąd

$$c=d=0$$

tzn.

$$a=b+c=b+0=b$$

Lemat 0'. Dla dowolnych a, b $\in$ C jeśli a+b jest określone, to a+b jest kresem górnym zbioru $\{a, b\}$.

Dowód: Załóżmy, że a+b jest określone, oraz

że dla pewnego c $\in$ C

$$a \leqslant c \quad \text{oraz} \quad b \leqslant c$$

tzn. dla pewnych d, e $\in$ C

$$a+d=c=b+e$$

Istnieją więc T, U, V, W $\in$ C takie, że

$$a=T+U \qquad b=T+V$$

oraz

$$d=V+W \qquad e=U+W$$

ponieważ a+b jest określone

więc:

$$a+b=(T+U)+(T+V)=(T+T)+(U+V)$$

skąd T+T jest określone, co pociąga

$$T=0$$

stąd

$$a+b=U+V$$

i oczywiście

$$a+\leqslant T+U+V+W=c$$

Pojęcie **atomu** w porządku $(C, \leqslant)$ określamy standardowo tzn. element $a_0 \in C$ jest atomem wtedy i tylko wtedy gdy $a_0 \neq 0$ i $(0, a_0)=\emptyset$. Zbiór wszystkich atomów porządku $(C, \leqslant)$ oznaczymy symbolem. Atomy $(\underline{\underline{C}})$, a zbiór tych atomów, które są obiektami w cat. $(\underline{\underline{C}})$ symbolem $A(\underline{\underline{C}})$. Mamy więc:

$$A(\underline{\underline{C}})=\text{Atomy }(\underline{\underline{C}}) \cap \text{Ob }(\text{cat}(\underline{\underline{C}})$$

Definicja 2. Element a $\in$ C nazywamy +— nierozkładalnym wtedy i tylko wtedy gdy:

$$(\forall b, c \in C : (a=b+c \implies b=0 \ \vee \ C=0)) \cap (a \neq 0)$$

Zbiór +— nierozkładalnych elementów p-kategorii $\underline{\underline{C}}$ oznaczymy symbolem $N^+(\underline{\underline{C}})$

Lemat 0″. Dla dowolnej p-kategorii C

$$\text{Atomy}\ (\underline{C}) = N^{+}\ (\underline{C})$$

Dowód: a) Niech $a \in$ Atomy (C). Jeśli dla pewnych $b, c \in C$

$$a = b + c$$

to oczywiście

$$b \leqslant a \quad \text{i} \quad c \leqslant a$$

skąd

$$(b = a \vee b = 0) \quad \text{i} \quad (c = a \vee c = 0)$$

tzn.

$$b = a \quad \text{i} \quad c = a$$

lub

$$b = a \quad \text{i} \quad c = 0$$

lub

$$b = 0 \quad \text{i} \quad c = a$$

lub

$$b = 0 \quad \text{i} \quad c = 0$$

Koniunkcja pierwsza jest fałszem, bo $b + c$ jest określone, a ostatnia bo $a \neq 0$, zatem $a \in N^{+}$ (C)

b) Niech $a \in N^{+}$ ($\underline{C}$). Załóżmy niewprost, że, $a \notin$ Atomy ($\underline{C}$)

Zatem ponieważ $a \neq 0$

istnieje $u \in C$ takie, że

$$u \in (0, a)$$

tzn.

$$0 < u < a$$

czyli dla pewnego $v \in C$

$$a = u + v$$

Stąd:

$$u = 0 \quad \text{lub} \quad v = 0$$

tzn.

$$u = 0 \quad \text{lub} \quad u = a$$

co przeczy założeniu, że $u \in (0, a)$. Stąd

$$a \in \text{Atomy}\ (C)$$

Definicja 3. p-kategorię $\underline{C}$ nazywamy p*-kategorią wted yi tylko wtedy gdy porządek $(C, \leqslant)$ spełnia warunek:

(1) dla dowolnego $0 \neq a \in C$ istnieje $a_0 \in$ Atomy ($\underline{C}$) takie, że $a_0 \leqslant a$

Definicja 4. Dla dowolnej p*-kategorii $\underline{C}$ i $x \in C$

$$A(x) = \{y \in A\ (\underline{C}) : \exists z \in S(x)\, y \leqslant \text{cod}\ (z)\}$$

Niezbyt precyzyjnie mówiąc, $y \in A(x)$ jeśli y jest „składnikiem" obiektu przez który faktoryzuje się x

Definicja 5. Dla dowolnych: p*-kategori $\underline{\underline{C}}$

$x \in C, \quad \alpha \in A(x)$

$D(\alpha, x) = \{y \in S(x) : \alpha \leqslant \mathrm{cod}\,(y)\}$

$D(\alpha, x)$ jest więc zbiorem tych segmentów początkowych elementu x, których kodziedzina zawiera atom α jako składnik tzn. dla których istnieje $u \in C$ takie, że $\mathrm{cod}\,(y) = \alpha + u$

Definicja 6. Dla $a, b \in D(\alpha, x)$, $\alpha \in A(x)$

$$a \equiv b \ (\mathrm{mod}\,(\alpha, x)) \Leftrightarrow \exists u \in C : a \sqcup b = (a \sqcap b)\,(\alpha + u)$$

Dziedziną relacji $\equiv(\mathrm{mod}\,(\alpha, x))$ jest więc zbiór $D(\alpha, x)$ który jest na ogół podzbiorem właściwym zbioru $S(x)$.

Lemat 1. Dla dowolnego $x \in C$ relacja $\equiv(\mathrm{mod}\,(\alpha, x))$ jest podobieństwem.

Dowód: a) zwrotność. Niech $\alpha \in A(x)$, $a \in D(\alpha, x)$. Mamy $a \sqcup a = a = a \sqcap a =$
$= (a \sqcap a)\,(\mathrm{cod}(a)) = (a \sqcap a)\,(\alpha + u)$
dla pewnego $u \in C$, ba $a \in D(\alpha, x)$.

b) symetria — wynika z przemienności operacji kratowych „$\sqcup$" i „$\sqcap$"

Lemat 2. Dla dowolnych $a, a', b \in D(\alpha, x)$, $\alpha \in A(x)$

$$a \equiv a'(\mathrm{mod}\,(\alpha, x)) \text{ i } a \equiv b \equiv a' \Rightarrow a \equiv b \ (\mathrm{mod}\,(\alpha, x)).$$

Dowód: Załóżmy, że

$a \sqcup a' = (a \sqcap a')\,(\alpha + u)$

dla pewnego $u \in C$. Ponieważ

$a \equiv b \quad \text{i} \quad b \equiv a'$

więc istnieją $r, s \in C$ takie, że

$b = ar \quad \text{i} \quad a' = bs$

skąd

$a \sqcup a' = a' = ars = (a \sqcup a')\,(\alpha + u)$

Ponieważ

$a \sqcap a' = a$ (bo $a \equiv a'$)

więc

$ars = a(\alpha + u)$

skąd

$rs = \alpha + u$

Istnieją więc elementy $m, n, p, q \in C$ takie, że $r = m + n$; $s = p + q$; $\alpha = mp$; $u = ns$ i ponieważ α jest obiektem, a cat $(\underline{\underline{C}})$ ma tylko trywialne retrakcje więc

$m = p = \alpha$

tzn.

$r = \alpha + n \quad \text{i} \quad s = \alpha + q$

stąd:

$$a \sqcup b = b = ar = a(\alpha + n) = (a \sqcap b)(\alpha + n)$$

bo

$$a \sqcap b = a, \text{ ponieważ } a \equiv b$$

Lemat 2'. Dla dowolnych $\alpha \in A(x)$, $a, a', b \in D(\alpha, x)$

$$a \equiv a'(\bmod\,(\alpha, x)) \quad \text{i} \quad a \equiv b \equiv a' \Rightarrow b \equiv a'(\bmod\,(\alpha, x))$$

Dowód: jest analogiczny do dowodu lematu 2,

Lemat 3. Dla dowolnych $\alpha \in A(x)$, $a, b \in D(\alpha, x)$

$$a \equiv b(\bmod\,(\alpha, x)) \Rightarrow a \sqcup b \equiv a \sqcap b(\bmod\,(\alpha, x))$$

Dowód: Ponieważ $a \sqcap b \equiv a \sqcup b$ więc

$$(a \sqcup b) \sqcup (a \sqcap b) = a \sqcap b \quad \text{oraz} \quad (a \sqcup b)(a \sqcap b) = a \sqcap b$$

stąd:

$$(a \sqcup b) \sqcup (a \sqcap b) = a \sqcap b = (a \sqcap b)(\alpha + u) = ((a \sqcup b) \sqcap (a \sqcap b))(\alpha + u)$$

dla pewnego $u \in C$

Wniosek: Dla dowolnych $a, b \in D(\alpha, x)$, $\alpha \in A(x)$ jeśli

$a \equiv b\ (\bmod\,(\alpha, x))$ to

$$a \equiv a \sqcup b\ (\bmod\,(\alpha, x)) \quad \text{i} \quad a \equiv a \sqcap b\ (\bmod\,(\alpha, x))$$

oraz

$$a \equiv b \sqcup b\ (\bmod\,(\alpha, x)) \quad \text{i} \quad b \equiv a \sqcap b\ (\bmod\,(\alpha, x))$$

Dowód: dla dowolnych $a, b \in D(\alpha, x)$ jest

$$a \sqcap b \equiv a \equiv a \sqcup b \quad \text{oraz} \quad a \sqcap b \equiv b \equiv a \sqcup b$$

Wystarczy teraz zastosować lemat 2, 2' i 3.

Lemat 4. Dla dowolnych $\alpha \in A(x)$, $a, b, c \in D(\alpha, x)$ jeśli

$$a \equiv b\ (\bmod\,(\alpha, x)) \quad \text{oraz} \quad b \equiv c\ (\bmod\,(\alpha, x)) \text{ to}$$

istnieją $p, t, z \in C$ takie, że:

$$a \sqcap b = p\,(\alpha + t) \quad \text{oraz} \quad b \sqcap c = p\,(\alpha + z)$$

Dowód: Załóżmy, że

$$a \equiv b\ (\bmod\,(\alpha, x)) \quad \text{i} \quad b \equiv c\ (\bmod\,(\alpha, x))$$

z lematu 3 wnosimy, że

$$a \sqcap b \equiv b\ (\bmod\,(\alpha, x)) \quad \text{i} \quad b \sqcap c \equiv b\ (\bmod\,(\alpha, x))$$

Istnieją więc $u, v \in C$ takie, że

$$(a \sqcap b)(\alpha + u) = b = (b \sqcap c)(\alpha + v)$$

(bo $(a \sqcap b) \sqcup b = (b \sqcap c) \sqcup b = b$), zatem dla pewnych $p, q, r, s \in C$ mamy:

(1) $a \sqcap b = p\,(\mathrm{dom}(q) + r)$

(2) $\alpha + u = (q + \mathrm{cod}(r))s$

(3) $b \sqcap c = p(q + dom(r))$

(4) $\alpha + v = (cod(q) + r)s$

Z (2) otrzymujemy

$\alpha + u' = q + cod(r)$ i $\alpha + u'' = s$

dla $u', u'' \in C$ spełniających warunek

$u = u'u''$

Stąd dla pewnych $q', r' \in C$

(5) $q = \alpha + q'$ **albo** $cod(r) = \alpha + r'$

(bo α jest atomem oraz $q + cod(r)$ jest określone). Podobnie z (4) wnosimy, że dla pewnych $q'', r'' \in C$:

(6) $r = \alpha + v''$ **albo** $cod(q) = \alpha + q''$

z (5) i (6) otrzymujemy:

(7) $q = \alpha + q'$ i $r = \alpha + r''$

lub

(8) $q = \alpha + q'$ i $cod(q) = \alpha + q''$

lub

(9) $cod(r) = \alpha + r'$ i $r = \alpha + v''$

lub

(10) $cod(r) = \alpha + r'$ i $cod(q) = \alpha + q''$

Ponieważ $q + r$ jest określone więc (7) jest fałszem. Podobnie fałszem jest (10) bo określoność $q + r$ pociąga określoność $cod(q) + cod(r)$. W (8) pierwszy człon koniunkcji pociąga drugi, a w (9) odwrotnie. Załóżmy, że:

$q = \alpha + q'$

wtedy

$$a \sqcap b = q(dom(q) + r) = p(dom(\alpha + q') + r) = p(dom(\alpha) + dom(q') + r) = \\ = p(\alpha + (dom(q') + r)$$

oraz

$$b \sqcap c = p(q + dom(r)) = p((\alpha + q') + dom(r)) = p(\alpha + (q' + dom(r)).$$

Jeśli $r = \alpha + r''$ to

$$a \sqcap b = p(dom(q) + r) = p(dom(q) + (\alpha + r'')) = p(\alpha + dom(q) + r''))$$

oraz

$$b \sqcap c = p(+ dom(r)) = p(q + dom(\alpha + r'')) = p(q + dom(\alpha) + dom(r'')) = \\ = p(\alpha + (q + dom(r'')).$$

w pierwszym przypadku kładąc:

$t = dom(q') + r$ i $z = q' + dom(r)$

otrzymujemy tezę. Podobnie w drugim kładąc:

$t = dom(q) + r$ i $z = q + dom(r'')$

też otrzymujemy tezę.

Twierdzenie 1. Dla dowolnych $x \in C$, $\alpha \in A(x)$ relacja $\equiv(\imath nod(\alpha, x))$ jest równoważnością w $D(\alpha, x)$.

Dowód: Zgodnie z lematem 1 wystarczy pokazać, że relacja $\equiv(\mathrm{mod}(\alpha, x))$ jest przechodnia. Załóżmy, że dla $x \in C$, $\alpha \in A(x)$, $a, b, c \in D(\alpha, x)$

$$a \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, x)) \quad \text{oraz} \quad b \equiv c(\mathrm{mod}(\alpha, x))$$

Z lematu 4 wnosimy, że dla pewnych $p, t, z \in C$:

$$a \sqcap b = p(\alpha + t) \quad \text{i} \quad b \sqcap c = p(\alpha + z)$$

Z wniosku z lematu 3 wiadomo, że:

$$a \sqcap b \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, x)) \quad \text{i} \quad b \sqcap c \equiv c(\mathrm{mod}(\alpha, x))$$

Istnieją więc $u, v \in C$ takie, że

$$a = (a \sqcap b) \sqcup a = (a \sqcap b)(\alpha + u)$$

oraz

$$c = (b \sqcap c) \sqcup c = (b \sqcap c)(\alpha + v)$$

tzn.

$$a = p(\alpha + t)(\alpha + u) = p(\alpha + tu) \quad \text{i} \quad c = p(\alpha + z)(\alpha + v) = p(\alpha + zv)$$

stąd:

$$a \sqcup c = (p(\alpha + tu)) \sqcup (p(\alpha + zv)) = p((\alpha + tu) \sqcup (\alpha + zv)) =$$
$$= p(\alpha + (tu) \sqcup (zv)).$$

Skorzystaliśmy tu, z pokazanych w [1] równości

(1) $xy \sqcup xz = x(y \sqcup z)$

oraz

(2) $(x + y) \sqcup (x + z) = x + y \sqcup z$

ponieważ $(tu) \sqcap (zv) \equiv (tu) \sqcup (zv)$ więc dla pewnego $y \in C$

$$((tu) \sqcap (zv))y = (tu) \sqcup (zv)$$

skąd

$$a \sqcup c = p(\alpha + (tu) \sqcup (zv)) = p(\alpha + ((tu) \sqcap (zv))y) =$$
$$= p(\alpha + (tu) \sqcap (zv))(\alpha + y) = (a \sqcap c)(\alpha + y)$$

bo:

$$a \sqcap c = p(\alpha + tu) \sqcap p(\alpha + zv) = p((\alpha + (tu)) \sqcap (\alpha + (zv)) = p(\alpha + (tu) \sqcap (zv))$$

zgodnie z odpowiednimi analogonami (1) i (2).

Opiszemy teraz pewne własności relacji $\equiv(\mathrm{mod}(\alpha, x))$.

Twierdzenie 2. Dla dowolnych $x \in C'$, s, $c' \in S(x)$ oraz $\alpha \in A(x)$ jeśli:

$$c \equiv x(\mathrm{mod}(\alpha, x)) \quad \text{i} \quad c \equiv c'$$

to

$$c' \equiv x(\mathrm{mod}(\alpha, x)).$$

Dowód: Jeśli dla pewnych c'', $u \in C$ jest

$$x = x \sqcup c = (x \sqcap c)(\alpha + u) = c(\alpha + u)$$

oraz

$$c' = cc''$$

to ponieważ $c' \in S(x)$ mamy

$$x = c'd = (cc'')d = c(c''d) = c(\alpha + u)$$

Skracając ostatnią równość lewostronnie przez c otrzymujemy

$$c''d = \alpha + u$$

tzn. istnieją e, f, g, h $\in$ C takie że

$$c''=e+f \quad \alpha=eg$$

oraz

$$d=g+h \quad u=fg$$

skąd wobec $\alpha \in$ Ob (cat (C))

$$e=g=\alpha$$

Zatem $d=\alpha+h$ co pociąga

$$x \sqcup c'=c'd=(x \sqcap c')(\alpha+h)$$

bo

$$x \sqcap c'=c'$$

Twierdzenie 3. Dla dowolnej p*kategorii C $x \in C$, $a \in S(x)$ jeśli dla dowolnego atomu $\alpha \leqslant \mathrm{cod}(x)$ $a \equiv x(\mathrm{mod}(\alpha, x)$
to $a=x$

Dowód: Niech $\alpha \in A(\underline{\underline{C}})$, $\alpha < \mathrm{cod}\,(x)$ oraz

$$x=x \sqcup a=\overline{(x \sqcap a)}\,(\alpha+u)=a(\alpha+u)$$

dla pewnego $u \in C$. Z założenia, że C jest p*-kategorią wnosimy, że istnieje takie $u_o \in$ Atomy (C), że $u=u_o+u'$. Obierzmy dowolne u_o o tej własności, oraz $\beta < \mathrm{cod}\,(u_o)$.
Ponieważ $\mathrm{cod}\,(u_o) < \mathrm{cod}(x)$ więc z założenia mamy

$$a \equiv x(\mathrm{mod}(\beta, x)) \text{ tzn.}$$

$$x=x \sqcup a=(x \sqcap a)\,(\beta+v)=a(\beta+v)$$

dla pewnego $v \in C$. Zatem:

$$a(\alpha+u'+u_o)=a(\beta+v)$$

skąd

$$(\alpha+u')+u_o=\beta+v$$

Istnieją więc p, q, r, s $\in$ C takie, że

(1) $\alpha+u'=p+q$

(2) $u_o=r+s$

(3) $\beta=p+r$

(4) $v=q+s$

Z (2) mamy

$$r=0 \quad \text{lub} \quad s=0$$

a z (3)

$$p=0 \quad \text{lub} \quad r=0$$

stąd:

(5) $r=0$ i $p=0$
lub
(6) $r=0$ i $r=0$
lub
(7) $s=0$ i $p=0$

lub

(8) $s=0$ i $r=0$

Jeśli (5) to

$\beta=p+r=0+0=0$

Sprzeczność: z założeniem, że $\beta \in A\,(\underline{\underline{C}})$

Jeśli (6) to

$u_o=s$ oraz $\beta=p$

skąd

$\alpha+u'=\beta+q$

stąd

$$\mathrm{cod}(x)=\mathrm{cod}(\alpha+u')+\mathrm{cod}(u_o)=\mathrm{cod}(\beta)+\mathrm{cod}(q)+\mathrm{cod}(u_o)=$$
$$=\beta+\mathrm{cod}(q)+(\beta=o)=(\beta+\beta)+(\mathrm{cod}(q)+o)$$

dla $o \in Ob(cat(\underline{\underline{C}}))$ spełniającego warunek $\mathrm{cod}(u_o=\beta+o$. Taki element o istnieje bo $\beta \leqslant \mathrm{cod}(u_o)$. Zatem $\beta+\beta$ jest określone, co pociąga $\beta=0$. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że $\beta \in A(\underline{\underline{C}})$.

Jeśli (7) to

$u_o=r+s=r+0=r=0+r=p+r=\beta$

tzn.

$u_o \in Ob(cat(\underline{\underline{C}}))$.

Jeśli (8) to

$u_o=r+s=0+0=0$

Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że $u_o \in Atomy(\underline{\underline{C}})$.

Zatem $u_o \in Ob(cat(\underline{\underline{C}}))$ i wobec dowolności wyboru u_o wnosimy, że również $u \in Ob(cat(\underline{\underline{C}}))$ Stąd:

$\alpha+u=\mathrm{cod}(x)$

tzn.

$a\ \mathrm{cod}(x)=x\ \mathrm{cod}(x)$

skąd

$a=x$

Twierdzenie 4. Dla dowolnej p*-kategorii $\underline{\underline{C}}$, $x \in \underline{\underline{C}}$, $\alpha, \beta \in A(x)$ oraz $a, a' \in D(\alpha, x)$ i $b, b' \in D(\beta, x)$ jeśli $a \equiv b$ i $b' \equiv a'$ oraz

$a \equiv a'(\mathrm{mod}(\alpha, x))$ i $b \equiv b'(\mathrm{mod}(\beta, x))$

to istnieje $c \in D(\alpha, x) \frown D(\beta, x)$ takie, że

$c \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, x))$ i $c \equiv b(\mathrm{mod}(\beta, x))$

Dowód: Ponieważ

$a \equiv b$ i $b' \equiv a'$

więc

$a \sqcup b' \equiv a \sqcup a'$ i $a \sqcup b' \equiv b \sqcup b'$

i wobec: $a \equiv a \sqcup b'$ i $b' \equiv a \sqcup b'$ mamy

$a \equiv a \sqcup b' \equiv a \sqcup a'$ i $b' \equiv a \sqcup b' \equiv b \sqcup b'$

W myśl założenia i wniosku z lematu 3 mamy:

$a \equiv a \sqcup a'(\mathrm{mod}(\alpha, x))$ i $b \equiv b \sqcup b'(\mathrm{mod}(\beta, x))$

Stąd i lematów 2 i 2' mamy

$$a \sqcup b' \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, x)) \quad \text{i} \quad a \sqcup b' \equiv b(\mathrm{mod}(\beta, x))$$

i kładąc

$$c = a \sqcup b'$$

otrzymujemy tezę

Twierdzenie 5. Dla dowolnej p*-kategorii C,

$$x \in C, \quad \alpha \in A(x), \quad a \in D(\alpha, x) \quad \text{i} \quad b \in S(x):$$

$$a \sqcup b \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, x)) \quad \text{lub} \quad a \sqcap b \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, x))$$

Dowód: Jeśli $a \equiv b$ lub $b \equiv a$ to

$$a \sqcap b = a \quad \text{lub} \quad a \sqcup b = a$$

i mamy tezę zgodnie z lematem 1.

Załóżmy, że

$$\neg(a \equiv b) \quad \text{i} \quad \neg(b \equiv a)$$

Ponieważ a, $b \in S(x)$ więc istnieją $a', b' \in S'(x)$ takie, że

$$aa' = x = bb'$$

Zatem dla pewnych $r, s \in C$ mamy

$$a \sqcup b = (a \sqcap)(r+s) = (a \sqcap b)(r + \mathrm{dom}(s))(\mathrm{cod}(r) + s)$$

oraz

$$a = (a \sqcap b)(r + \mathrm{dom}(s)) \quad \text{i} \quad b = (a \sqcap b)(\mathrm{dom}(r) + s)$$

Ponieważ $\alpha \in A(x)$ i $\alpha \leqslant \mathrm{cod}(a)$ więc dla pewnego

$c \in \mathrm{Ob}(\mathrm{cat}(C))$ mamy

$$\mathrm{cod}(a) = \alpha + c$$

Stąd:

$$\alpha + c = \mathrm{cod}(a) = \mathrm{cod}(r + \mathrm{dom}(s)) = \mathrm{cod}(r) + \mathrm{cod}(\mathrm{dom}(s)) = \mathrm{cod}(r) + \mathrm{dom}(s)$$

Zatem

$$\alpha \leqslant \mathrm{cod}(r) \quad \text{albo} \quad \alpha \leqslant \mathrm{dom}(s)$$

tzn.

$$\mathrm{cod}(r) = \alpha + r' \quad \text{albo} \quad \mathrm{dom}(s) = \alpha + s'$$

dla pewnych $r', s' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{cat}(C))$

Jeśli $\mathrm{cod}(r) = \alpha + r'$ to:

$$(a \sqcup b) \sqcup a = a \sqcup b = a(\mathrm{cod}(r) + s) = a(\alpha + (r' + s)) = $$
$$= ((a \sqcup b) \sqcap a)(\alpha + (r' + s))$$

bo

$$a = (a \sqcup b) \sqcap a.$$

Zatem

$$(1) \quad \alpha \leqslant \mathrm{cod}(r) \Rightarrow a \sqcup b \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, x))$$

Jeśli $\mathrm{dom}(s) = \alpha + s'$ to

$$(a \sqcap b) \sqcup a = (a \sqcap b)(r + \mathrm{dom}(s)) = (a \sqcap b)(r + (\alpha + s')) =$$
$$= ((a \sqcap b) \sqcap a)(\alpha + (r + s'))$$

bo

$$a=(a \sqcap b) \sqcap a$$

Zatem

$$(2) \quad \alpha \leqslant dom(s)$$

$a \sqcap b \equiv a(mod(\alpha, x))$

z (1) i (2) otrzymujemy tezę.

Twierdzenie 6. Dla dowolnej p*-kategorii C,

$x \in C, \quad \alpha \in A(x) \quad$ oraz $\quad a, d \in D(\alpha, x)$: jeśli

$a \equiv d(mod(\alpha, x)) \quad$ i $\quad a \equiv y \equiv x$

to

$$d \sqcap y \equiv a(mod(\alpha, x))$$

Dowód: Z założenia wnosimy, że

$$d \sqcap a \equiv d \sqcap y \equiv d$$

a z wniosku po lemacie 3 mamy

$$d \sqcap a \equiv d(mod(\alpha, x))$$

Stąd i lematu 2 otrzymujemy tezę.

Opiszemy teraz związki relacji $\equiv(mod(\alpha, x)$ z relacją „$\equiv$" oraz operacjami p-kategorii. Ponieważ bardzo istotne jest tu zachowanie się dziedziny tej relacji więc opiszemy wpierw jak zmienia się zbiór $D(\alpha, x)$ w zależności od elementu x.

Lemat 5. Dla dowolnej p*-kategorii C oraz

$x, y \in C \quad$ jeśli $\quad x \in S(y) \quad$ to $\quad A(x) \subseteq A(y)$

Lemat 6. Dla dowolnej p*-kategorii C,

$x, y \in C$ jeśli xy jest określone to:

$A(xy) = A(x) \cup A(y)$

Dowód: Inkluzja $A(x) \subset \bar{A}(xy)$ wynika z lematu 5. Jeśli $\alpha \in A(y)$ to istnieje $r \in S(y)$ takie, że

$$cod(r) = \alpha + s$$

dla pewnego $c \in Ob(cat(C))$. Rozważmy element $xr \in C$ (jest on dobrze określony bo $dom(r) = dom(y) = cod(x)$).

Ponieważ $r \equiv y$ więc:

$$xr \equiv xy$$

Ponadto $cod(xr) = cod(r) = \alpha + s$ tzn. $\alpha \in A(xy)$.

Zatem $A(y) \subseteq A(xy)$. Ponieważ również $A(x) \subset A(xy)$

więc

$$A(x) \cup A(y) \subseteq A(xy).$$

Załóżmy teraz, że $\alpha \in A(xy)$. Istnieje więc $u \neq xy$ takie, że dla pewnego $v \in Ob(cat(C))$

$cod(u)=\alpha+v$

Jeśli $u\equiv x$ to $\alpha \in A(x)$.

Jeśli $x\equiv u$ to $u=xr$

dla pewnego $r \in S(y)$ i $cod(x)=cod(r)=\alpha+v$

tzn. $\alpha \in A(y)$.

Załóżmy, że

$\neg(x\equiv u)$ i $\neg(u\equiv x)$

i rozważmy elementy $u \sqcap x$ i $u \sqcup x$.

Zgodnie z twierdzeniem 5:

$u \sqcap x \equiv u(mod(\alpha, xy))$ lub $u \sqcup x \equiv u(mod(\alpha, xy)$

Załóżmy że:

$u \sqcap x \equiv u(mod(\alpha, xy))$

Zatem $\alpha \leqslant cod(u \sqcap x)$ a ponieważ

$u \sqcap x \equiv x$ więc $\alpha \in A(x)$.

Jeśli

$u \sqcap x \equiv u(mod(\alpha, xy))$

to ponieważ $x\equiv u \sqcup x \equiv xy$ więc istnieje $r \in S(y)$ takie, że

$u \sqcup x = xr$

Mamy więc $\alpha \leqslant cod(u \sqcup x)=cod(xr)=cod(r)$

i $r \in A(xy)$. Stąd $\alpha \in A(y)$. Tak więc

$\alpha \in A(xy) \Rightarrow \alpha \in A(x) \vee \alpha \in A(y)$

tzn.

$A(xy) \subseteq A(x) \cup A(y)$

co wraz udowodnioną wcześniej inkluzją przeciwną daje tezę.

Lemat 7. Dla dowolnej p*kategorii $\underline{C}$,

$x, y \in C$ jeśli $x+y$ jest określone to

$A(x+y)=A(x) \cup A(y)$ i $A(x) \cap A(y)=\emptyset$

Dowód: Niech $\alpha \in A(x)$. Zatem dla pewnego $a \in S(x)$ i $a' \in Ob(cat(\underline{\underline{C}}))$

$cod(a)=\alpha+a'$

Ponieważ $a \in S(x)$ więc istnieje $b \in S'(x)$ takie, że

$x=ab$

stąd

$x+y=ab+dom(y)y=(a+dom(y))\,(b+y)$

tzn.

$a+dom(y) \in S(x+y)$

Ponadto

$cod(a+dom(y))=cod(a)+dom(y)=\alpha+(a'+dom(y))$.

Zatem $\alpha \in A(x+y)$. Jeśli $\alpha \in A(y)$ to rozumujemy podobnie.

Pokazaliśmy więc, że

(1) $A(x) \cup A(y) \subseteq A(x+y)$.

Załóżmy teraz, że $\alpha \in A(x+y)$. Istnieje więc $a \in S(x+y)$ takie, że dla pewnego $a' \in Ob(cat(\underline{\underline{C}}))$

$$cod(a) = \alpha + a'$$

Ponieważ $a \in S(x+y)$ więc dla pewnego $b \in S'(x+y)$:

$$ab = x+y$$

Istnieją więc p, q, r, $s \in C$ takie, że

$$x = pr \quad a = p+q$$

oraz

$$y = qs \quad b = r+s$$

Stąd

$$cod(a) = cod(p) + cod(q) = \alpha + a'$$

a ponieważ

$\alpha \in A(C)$ więc

$$\alpha \leqslant cod(p) \quad \text{albo} \quad \alpha \leqslant cod(q)$$

i wobec

$$p \in S(x) \quad i \quad q \in S(y)$$

mamy

$$(2) \quad \alpha \in A(x) \quad \text{albo} \quad \alpha \in A(y)$$

Zauważmy, że w (2) nie można spójnika „albo" zastąpić spójnikiem „lub" bo jeśli $\alpha+\alpha$ jest określone to $\alpha=0$ Z (1) i (2) otrzymujemy tezę.

Lemat 8. Dla dowolnej p*-kategorii $\underline{\underline{C}}$,
$x \in C$, $y \in C$ jeśli określone jest xy oraz $\alpha \in A(xy)$ to dla
to dla

$$Dy(\alpha, xy) = D(\alpha, yx) \cap \{u;\ x \equiv u\}$$

jest

$$D(\alpha, x) \cup Dy(\alpha, xy) \subseteq D(\alpha, xy)$$

Wniosek. Jeśli $x \equiv y$ to dla dowolnego $\alpha \in A(x)$ $D(\alpha, x) \subseteq D(\alpha, y)$.

Lemat 9. Dla dowolnej p*-kategorii $\underline{\underline{C}}$,

$x, y \in C$ jeśli określone jest $x+y$ to dla dowolnego $\alpha \in A(x)$

$$D(\alpha, x+y) = D(\alpha, x) + S(y) = \{a+b : a \in D(\alpha, x) \quad i \quad b \in S(y)\},$$

Dowód: jest analogiczny do dowodu lematu 7.

Lemat 10. Dla dowolnej p*-kategorii C,

$x, y \in C$, $x \in S(y)$, $\alpha \in A(x)$, zachodzi inkluzja:

$$\equiv(mod(\alpha, x)) \subseteq \equiv(mod(\alpha, y)).$$

Lemat 11. Przy założeniach lematu 10 jest

$$\equiv(mod(\alpha, x)) = \equiv(mod(\alpha, y)) \cap (S(x) \times S(x))$$

Lemat 12. Dla dowolnej p*-kategorii C,

a, d, x, $y \in C$, $\alpha \in A(x)$ takich, że $a \equiv x \equiv y$,

$d \equiv y$ oraz $a \equiv d(\mathrm{mod}(\alpha, y))$ zachodzi

$$x \sqcap d \equiv (\mathrm{mod}(\alpha, x))$$

Dowód: jest to bezpośrednia kosekwencja faktu, że $x \sqcap d \equiv x$ oraz twierdzenia 5.

Lemat 13. Dla dowolnej p*-kategorii $\underline{\underline{C}}$,

$a, b, s, r, x, y \in C$ takich, że $a = xr$, $b = xs$ i określone jest xy oraz $a, b \in S(xy)$, $\alpha \in A(xy)$:

jeśli $a, b \in D(\alpha, xy)$ i $a \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ to:

$$r, s \in D(\alpha, y) \quad \text{oraz} \quad r \equiv S(\mathrm{mod}(\alpha, y))$$

Dowód: Niech $a \in D(\alpha, xy)$ i $a = xr$. Zatem dla pewnego $a' \in Ob(cat(\underline{\underline{C}}))$

$$cod(r) = cod(xr) = cod(a) = \alpha + a' \quad \text{i} \quad r \in S(y)$$

Stąd $r \in D(\alpha, y)$. Podobnie dowodzimy, że $S \in D(\alpha, y)$

Ponieważ

$$a \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$$

więc dla pewnego $u \in C$ mamy

$$a \sqcup b = xr \sqcup xs = ((xr) \sqcap (xs))\,(\alpha + u) = (a \sqcap b)\,(\alpha + u)$$

tzn.

$$x(r \sqcup s) = xr \sqcup xs = ((xr) \sqcap (xs))\,(\alpha + u) = (x(r \sqcap s)\,(\alpha + u)$$

i skracając lewostronnie przez x otrzymujemy

$$r \sqcup s = (r \sqcap s)\,(\alpha + u).$$

Lemat 14. Dla dowolnej p*-kategorii $\underline{\underline{C}}$, $\alpha \in A(\underline{\underline{C}})$ $a, b, r, s, x, y \in C$ takich, że $a = xr$, $b = xs$, $r, s \in D(\alpha, y)$ jeśli $r \equiv s(\mathrm{mod}(\alpha, y))$ to xy jest określone, $a, b \in D(\alpha, xy)$ oraz $a \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$.

Dowód: Niech spełnione będą założenia lematu. Określoność xy wynika z faktu, że $r \in S(y)$ i $a = xr$ jest określone, bo:

$$cod(x) = dom(r) = dom(y)$$

Jeśli dla $\alpha \in A(C)$ mamy $\alpha \leqslant cod(r)$ to oczywiście jest też $\alpha \leqslant cod(xr)$ jeśli tylko xr jest określone. Załóżmy, że

$$r \sqcup s = (r \sqcap s)\,(\alpha + u)$$

dla pewnego $u \in C$. „Mnożąc" tą równość lewostronnie przez x otrzymujemy:

$$x(r \sqcup s) = (x(r \sqcap s))\,(\alpha + u)$$

Skąd

$$(xr) \sqcup (xs) = x(r \sqcup s) = (x(r \sqcap s))\,(\alpha + u) = ((xr) \sqcap (xs))\,(\alpha + u)$$

Wniosek. Dla dowolnych $x, y \in C$ takich, że xy jest określone, oraz $a, b \in S(xy)$ takich, że $x \equiv a \equiv y$,

$$x \equiv b \equiv y, \quad \alpha \in A(xy) \quad a, b \in D(\alpha, xy) \quad a \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$$

wtedy i tylko wtedy gdy istnieją $r, r \in S(y)$ takie, że

$a = xr, \quad b = xs \quad i \quad r \equiv s(mod(\alpha, y)).$

Lemat 15. Dla dowolnej p*-kategorii $\underline{\underline{C}}$, $x, y \in C$ takich, że xy jest określone, $\alpha \in A(xy)$ oraz $a, b \in S(xy)$ takich, że $x \equiv a \equiv xy$, $a, b \in D(\alpha, x)$ i $a \equiv b(mod(\alpha, xy))$: $\alpha \in A(y)$ i istnieją $r, s \in D(\alpha, y)$ takie, że $a = ar$, $a \sqcup b = xs$ i $r \equiv s(mod(\alpha, y))$.

Dowód: Niech spełnione będą założenia lematu.
Istnieje $r, s \in S(y)$ takich, że

$$a = xr \quad i \quad ab = xs$$

wynika bezpośrednio z faktu, że

$$x \equiv a \equiv a \sqcup b \equiv xy$$

Spełnione są więc założenia lematu 13 tzn.

$$xr \equiv xs(mod(\alpha, xy))$$

(bo zgodnie z wnioskiem z lematu 3 $a \equiv a \sqcup b(mod(\alpha, xy))$
Stąd teza.

Lemat 16. Dla dowolnej p*-kategorii $\underline{\underline{C}}$, $x, y \in C$ $\alpha \in A(x)$, $a, a' \in D(\alpha, x)$ i $b, b' \in S(y)$ jeśli określone jest $x + y$ oraz $a \equiv a'(mod(\alpha, x))$ to

$$a + b \equiv a' + b'(mod(\alpha, x + y))$$

Dowód: Dla dowolnych a, a', b, b' spełniających założenia lematu mamy:

$$(a + b) \sqcup (a' + b') = a \sqcup a' + b \sqcup b'$$

a ponieważ $a \equiv a'(mod(\alpha, x))$ więc dla pewnego $u \in C$ $a \sqcup a' = (a \sqcap a')(\alpha + u)$.
Stąd i faktu, że dla pewnego $v \in C$
$b \sqcup b' = (b \sqcap b')v$ (bo $b \sqcap b' \equiv b \sqcup b'$) mamy

$$\begin{aligned}(a + b) \sqcup (a' + b') &= a \sqcup a' + b \sqcup b' = (a \sqcap a')(\alpha + u) + (b \sqcap b')v = \\ &= ((a \sqcap a') + (b \sqcap b'))(\alpha + u + v) = \\ &= ((a + b) \sqcap (a' + b'))(\alpha + u + v)\end{aligned}$$

(bo $a \sqcap a' + b \sqcap b' = (a + b) \sqcap (a' + b')$ ponieważ $a + b$ jest określone).

Twierdzenie 6. Dla dowolnej p*-kategorii $\underline{\underline{C}}$, $x, y \in C$ takich, że xy jest określone, $\alpha \in A(xy)$ $a, b \in D(\alpha, xy)$: $a \equiv b(mod(\alpha, xy))$ wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi jeden z następujących przypadków:

1° $\alpha \in A(x)$, $a, b \in D(\alpha, x)$, $a \equiv b(mod(\alpha, x))$

2° $\alpha \in A(x)$, $a \equiv a \sqcap x(mod(\alpha, xy))$, $b \equiv b \sqcap x(mod(\alpha, xy))$
oraz
$a \sqcap x \equiv b \sqcap x(mod(\alpha, x))$

3° $\alpha \in A(y)$ i istnieją $r, s \in D(\alpha, y)$ takie, że
$a = xr, \quad b = xs, \quad r \equiv s(mod(\alpha, y))$

4° $\alpha \in A(y)$, $a \equiv a \sqcup x(mod(\alpha, xy))$, $b \equiv b \sqcup x(mod(\alpha, xy)$
i istnieją $r, s \in D(\alpha, y)$ takie, że
$a \sqcup x = xr, \quad b \sqcup x = xs, \quad r \equiv s(mod(\alpha, y))$

Dowód: a) $\Leftarrow$ Jeśli 1° to $a \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ na mocy lematu 10 bo $x \equiv xy$. Załóżmy 2°. Z lematu 10 wnosimy, że

$a \sqcap x \equiv b \sqcap x(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$

Stąd i faktu, że relacja $\equiv(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ jest przechodnia otrzymujemy $a \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ 3° pociąga $a \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ na mocy lematu 14. Jeśli 4° to zgodnie z lemate m14

$a \sqcup x \equiv b \sqcup x(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$

Skąd wobec przechodniości relacji $\equiv(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ otrzymujemy $a \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$.

b) $\Rightarrow$Załóżmy, że $a \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$. Elementy a i b mogą być w następujących „położeniach" względem elementu x.

(1) $a, b \in S(x)$

(2) $\neg(a \equiv x)$, $\neg(x \equiv a)$, $\neg(b \equiv x)$, $\neg(x \equiv b)$

(3) $x \equiv a \equiv xy$, $b \in S(xy)$

(4) $x \equiv a \equiv xy$, $x \equiv b \equiv xy$

(5) $a \equiv x$ $b \in S(xy)$

Jeśli (1) to mamy oczywiście przypadek 1°. Załóżmy (2). Zgodnie z twierdzeniem 5:

(6) $a \sqcap x \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ lub $a \sqcup x \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$
oraz
(7) $b \sqcap x \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ lub $b \sqcup x \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$
Skąd:
(8) $a \sqcap x \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ i $b \sqcap x \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$
lub
(9) $a \sqcap x \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ i $b \sqcup x \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$
lub
(10) $a \sqcup x \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ i $b \sqcap x \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$
lub
(11) $a \sqcup x \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ i $b \sqcup x \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$.

Jeśli (8) mamy przypadek 2° bo $a \sqcap x$, $b \sqcap x \in D(\alpha, x)$ oraz $a \sqcap x \equiv b \sqcap x(\mathrm{mod}(\alpha, xy)$ z przechodniości relacji $\equiv(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$. Zatem $a \sqcap x \equiv b \sqcap x(\mathrm{mod}(\alpha, x))$. Jeśli (9) to wobec $a \sqcap x \equiv x \equiv b \sqcup x$ z lematów 2 i 2' wnosimy, że $x \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ i $x \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$. Stąd w myśl wniosku z lematu 3 mamy:

$x \sqcap a \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ i $x \sqcap b \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$

oraz

$x \sqcup a \equiv a(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ i $x \sqcup b \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$

Z przechodniości relacji $\equiv(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ otrzymujemy:

$x \sqcap a \equiv x \sqcap b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ i $x \sqcup a \equiv x \sqcup b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$

a ponieważ

$x \sqcap a, \quad x \sqcap b \in S(x), \quad x \equiv x \sqcup a \equiv xy, \; x \equiv x \sqcup b \equiv xy$
więc korzystając z lematu 13 otrzymujemy przypadek 2° i 4°.
Jeśli (10) to rozumujmy analogicznie. Jeżeli (11) to
$a \sqcup x \equiv b \sqcup x(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ bo relacja $\equiv(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ jest przechodnia. Ponieważ ponadto $x \equiv a \sqcup x \equiv xy$, $x \equiv b \sqcup x \equiv xy$ więc z lematu 13 otrzymujemy przypadek 4°.

Załóżmy teraz (3). Przypadek 4° otrzymujemy natychmiast z lematu 15 i faktu, że $a = a \sqcup x$. Jeśli (4) to dla pewnych $r, s \in S(y)$ $a = xr$, $b = xs$. Stąd i lematu 13 otrzymujemy przypadek 3°. Jeśli (5) to $a \sqcap x = a$ i $b \sqcap x \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ lub $b \sqcup x \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ tzn. wobec przechodniości relacji $\equiv(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$

$a \sqcap x \equiv b \sqcap x(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$

lub $a \sqcap x \equiv b \sqcup x(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$

Jeśli $a \sqcap x \equiv b \sqcap x(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ to mamy przypadek 1° bo
$a \sqcap x, \quad b \sqcap x \in S(x)$.
Jeśli $a \sqcap x \equiv \sqcup x(\mathrm{mod}(\alpha, xy))$ to rozumujemy podobnie jak w przypadku (9). Pokazaliśmy więc, że w każdym z przypadków (1)—(5) otrzymujemy 1° lub 2° lub 3° lub 4°.

Twierdzenie 6 charakteryzowało w pewien sposób zachowanie się relacji $\equiv(\mathrm{mod}(\alpha, x))$ względem operacji "·". Następujące twierdzenie podaje taką charakteryzację dla operacji "+".

Twierdzenie 8. Dla dowolnej p*-kategorii $\underline{C}$, $x, y \in C$ takich, że $x+y$ jest określone, $\alpha \in A(x+y)$ oraz $a, b \in D(\alpha, x+y)$: $a \equiv b(\mathrm{mod}(\alpha, x+y)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją $a_x, b_x \in S(x)$

$a_y, b_y \in S(y)$ takie, że

$a = a_x + a_y, \quad b = b_x + b_y$

oraz

$a_x \equiv {}_x(\mathrm{mod}(\alpha, x)) \quad \text{albo} \quad a_y \equiv b_y(\mathrm{mod}(\alpha, y))$.

Dowód: Ponieważ $\alpha \in A(x+y)$ więc $\alpha \in A(x)$ albo $\alpha \in A(y)$. Załóżmy, że $\alpha \in A(x)$. Jeśli dla $a', b' \in S'(x+y)$

$x + y = aa' = bb'$

to istnieją

$a_x, a_y, b_x, b_y, a'_x, a'_y, b'_x, b'_y \in C$ takie, że

$x = a_x a'_x = b_x b'_x; \quad a = a_x + a_y; \quad a' = a'_x + a'_y,$

$y = a_y a'_y = b_y b'_y; \quad b = b_x + b_y; \quad b' = b'_x + b'_y.$

Stąd i faktu, że $\alpha \in A(x)$ mamy $\alpha \leqslant \mathrm{cod}(a_x)$ i $\alpha \leqslant \mathrm{cod}(b_x)$ tzn.

$a_x, b_x \in D(\alpha, x)$

Z założenia istnieje $u \in C$ takie, że

$(a_x + a_y) \sqcup (b_x + b_y) = ((a_x + a_y) \sqcap (b_x + b_y))\,(\alpha + u)$

a ponieważ $a \sqcup b \equiv x + y$ więc istnieją $u_x, u_y \in C$ takie, że dla pewnych $u'_x, u''_x, u'_y, u''_y \in C$

$$x = u'_x u_x u''_x; \quad y = u'_y u_y u''_y$$

oraz

$$\alpha + u = u_x + u_y$$

Istnieją więc $p, q, r, s \in C$ takie, że

$$\alpha = p + q \quad u_x = p + r$$

$$u = r + s \quad u_y = q + s$$

Ponieważ $\alpha \in A(C)$ więc:

$$p = \alpha \quad \text{i} \quad q = 0 \qquad \text{albo} \qquad p = 0 \quad \text{i} \quad q = \alpha$$

tzn.

$$u_x = \alpha + r \quad \text{albo} \quad u_y = \alpha + s$$

drugą możliwość należy wykluczyć bo $\alpha \in A(x)$

Zatem

$$\begin{aligned}(a_x + a_y) \sqcup (b_x + b_y) &= ((a_x + a_y) \sqcap (b_x + b_y))\,((\alpha + r) + u_y) = \\ &= ((a_x \sqcap b_x) + (a_y \sqcap b_y))\,((\alpha + r) + u_y) = \\ &= ((a_x \sqcap b_x)\,(\alpha + r)) + ((a_y \sqcap b_y) u_y)\end{aligned}$$

bo $\mathrm{cod}(a_x \sqcap b_x) = \mathrm{dom}(\alpha + r)$ i $\mathrm{cod}(a_y \sqcap b_y) = \mathrm{dom}(u_y)$

Stąd

$$(a_x \sqcup b_x) + (a_y \sqcup b_y) = ((a_x \sqcap b_x)\,(\alpha + r)) + ((a_y \sqcap b_y) u_y))$$

a ponieważ

$$\mathrm{dom}(a_x \sqcup b_x) = \mathrm{dom}((a_x \sqcap b_x)\,(\alpha + r))$$

$$\mathrm{dom}(a_y \sqcup b_y) = \mathrm{dom}((a_y \sqcap b_y) u_y)$$

więc:

$$a_x \sqcup b_x = a_x \sqcap b_x)\,(\alpha + r) \quad \text{i} \quad a_y \sqcup b_y = (a_y \sqcap b_y) u_y$$

tzn.

$$a_x \equiv b_x (\mathrm{mod}(\alpha, x))$$

Jeśli $\alpha \in A(y)$ to rozumujemy analogicznie.

LITERATURA

1. W. Korczyński „O pewnych własnościach kategorii częściowo-monoidalnych" Zeszyty Naukowe WSP w Częstochowie nr 4.
2. W. Korczyński „Aksjomatyczna charakteryzacja algebr procesów systemów współbieżnych" Prace IPI PAN **400** W-wa 1980 r.
3. J. Winkowski „An Algebrais Description of Discrete Process and Systems" Prace IPI PAN **423** W-wa 1980 r.

W. Korczyński

SOME PROPERIETS OF PARTIALLY — MONOIDAL CATEGORIES

Summary

This paper is a continuation of [1]. It describe some properietes of p^x-categories, in particular some relations between an equivalence relatio and the operations of p^x-category. These properties will be used in the proof of a theorem of characterisation for p^x-categories. The proof of this theorem wil be given in an another paper.