Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka V, Częstochowa 1997

O zawartości kraty ideałów przeliczalnych algebr Boole'a

Wojciech Dzik

W pracy wyznaczono ciąg logik pośrednich, które są otrzymane jako zawartości (t.j. zbiory formuł prawdziwych) krat ideałów w przeliczalnych algebrach Boole'a.

Dla dowolnej algebry Boole'a **A**, zbiór **IdA** wszystkich ideałów algebry **A**, z częściowym porządkiem wyznaczonym przez inkluzję, tworzy kratę zupełną. Krata ta jest $\overset{\infty}{V}$-dystrybutywana, tj. w **IdA** zachodzi wzór: $a \wedge \bigvee B = \bigvee\{a \wedge b : \ b \in B\}$, dla $\{a\} \cup B \subseteq \mathbf{IdA}$, a zatem **IdA** tworzy (zupełną) algebrą Heytinga, którą też będziemy oznaczać przez **IdA**. Kres dolny ideałów I, J jest częścią wspólną $I \cap J$, kres górny I, J - najmniejszym ideałem zawierającym I oraz J, zaś relatywne pseudodopełnienie $I \Rightarrow J = \bigvee\{K \in \mathbf{IdA} : K \cap I \subseteq J\}$. Zerem **IdA** jest ideał $\{0\}$ zawierający tylko 0 - zero algebry **A**, zaś pseudodopłnienie I, $-I = I \Rightarrow \{0\}$. Przez $E(\mathbf{IdA})$ oznaczamy zbiór wszystkich formuł logiki zdań (w języku zdaniowym L ze spójnikami $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg$), które przyjmują wartość **1** dla każdego wartościowania formuł w algebrze Heytinga **IdA**, czyli *zawartość* **IdA**. Wtedy $E(\mathbf{IdA})$ jest zbiorem zawierającym zbiór INT tez intuicjonistycznej logiki zdaniowej i - dla nietrywialnej algebry **A** - zawartym w zbiorze tez klasycznej logiki zdaniowej KRZ tzn. INT $\subseteq E(\mathbf{IdA}) \subseteq$ KRZ Problem zawartości kraty ideałów pierścieni Boolowskich był już rozważany przez A. Tarskiego w [6]. Pokazał on w szczególności, że

Twierdzenie.1. (por. [6]) $E(\mathbf{Id\ A}) =$ INT, dla przeliczalnej i wolnej algebry Boole'a **A**

Twierdzenie.2. (por. [6]) $E(\mathbf{Id\ A}) =$ KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy algebra Boole'a **A** jest skończona. Tarski podał też przykład pierścienia Boolowskiego **R** takiego, że INT $\neq E(\mathbf{Id\ R}) \neq$ KRZ.

Powstaje pytanie: Jakie logiki pośrednie można otrzymać jako zawartości $E(\mathbf{Id\ A})$ kraty ideałów dla pewnych algebr Boola **A**? Odpowiemy na to pytanie w przypadku, gdy **A** jest przeliczalną algebrą Boole'a. Pokażemy, że istnieje przeliczalny ciąg (łańcuch) logik pośrednich $\mathbf{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$

takich, że są one zawartościami krat ideałów przeliczalnych algebr Boole'a. Logiki $\mathbf{P}_n$ są znane: $\mathbf{P}_n$ to najmniejsza logika tzw. n–tego slice'u w sensie Hosoi–Ono, por. Ono [4].

Będziemy też rozważać rodziny $\mathcal{O}(X)$ wszystkich otwartych podzbiorów przestrzeni topologicznej X. $\mathcal{O}(X)$ z częściowym porządkiem danym inkluzją tworzy (zupełną) algebrę Heytinga, gdzie działaniami kresów są suma i iloczyn zbiorów, zaś $U \Rightarrow W = \text{int}\,((X \setminus U) \cup W)$, $-U = \text{int}\,(X \setminus U)$, $\mathbf{0} = \emptyset$ oraz $\mathbf{1} = X$. A. Tarski udowodnił [6], że $E(\mathcal{O}(X))$ =INT, dla każdej przestrzeni X metrycznej w sobie gęstej. Będziemy korzystać z dualizmu Stone'a tj. odpowiedniości pomiędzy kategorią algebr Boolea a kategorią 0–wymiarowych zwartych przestrzeni Hausdorffa. Jeżeli A jest algebrą Boolea, to odpowiada jej przestrzeń Stone'a $\text{St}(\mathbf{A})$; podobnie, jeżeli X jest 0–wymiarową zwartą przestrzenią Hausdorffa, to odpowiada jej algebra Boolea zbiorów domknięto-otwartych $\text{ClOp}(X)$.

Lemat 1. Kraty (algebry Heytinga) **IdA** oraz $\mathcal{O}(\text{St}(\mathbf{A}))$ są izomorficzne, stąd $E(\mathbf{Id\ A}) = E(\mathcal{O}(\text{St}(\mathbf{A})))$.

Lemat 2. (por. [5])

a) Jeżeli Y jest otwartym podzbiorem przestrzeni X, to $E(\mathcal{O}(X)) \subseteq E(\mathcal{O}(Y))$

b) Jeżeli $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym i otwartym przestrzeni X na Y, to $E(\mathcal{O}(X)) \subseteq E(\mathcal{O}(Y))$ (bo $F(U) = f^{-1}[U]$ jest zanurzeniem $\mathcal{O}(Y)$ w $\mathcal{O}(X)$).

Szczególnym przykładem topologicznej algebry Heytinga jest taka, którą można otrzymać z drzew $(K, \leq)$ modeli Kripkego. Topologia zbiorów otwartych $\mathcal{O}(K)$ na $(K, \leq)$ składa się ze zbiorów „domkniętych w górę" tj. takich W, że jeśli $p \geq q \in W$, to $p \in W$, dla $p, g \in K$. Zachodzi pewne wzmocnienie Tw.1

Twierdzenie 3: $E(\mathbf{IdA}) = \text{INT}$, dla przeliczalnej algebry Boole'a $\mathbf{A}$, nie będącej algebrą atomową.

Dowód. $\mathcal{O}(\text{St}(\mathbf{A}))$ jest wtedy przestrzenią metryczną, która zawiera podzbiór otwarty w sobie gęsty, a więc można skorzystać z Lematu 2.a).

Zauważmy, że odwrotne twierdzenie nie zachodzi dla dowolnych algebr Boolea: bezatomowa algebra $\mathbf{A}$ zbiorów regularnie otwartych na odcinku $[0, 1]$ liczb rzeczywistych jest zupełna oraz $E(\mathbf{IdA}) \neq \text{INT}$.

Pochodna Cantora-Bendixsona algebry Boolea. Znane jest pojęcie pochodnej Cantora-Bendixsona X^d przestrzeni topologicznej X określanej jako zbiór punktów skupienia przestrzeni X. Przez indukcję określa się pochodną Cantora-Bendixsona rzędu α, dla $\alpha \in On$, tj. dowolnej liczby porządkowej α: $X^{(0)} = X$, $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})^d$, $X^{(\lambda)} = \bigcap\{X^{(\alpha)} : \alpha < \lambda\}$, dla liczby porządkowej granicznej λ. Analogicznie do $E(\mathbf{Id}\ \mathbf{A})$ określamy zbiór formuł prawdziwych $E(\mathcal{O}(X))$ w przestrzeni topologicznej X. Teraz, określamy za S.Koppelberg [2], określamy przez indukcję *pochodną Cantora-Bendixsona rzędu* α, $\mathbf{A}$ $\mathbf{A}_\alpha$, dla $\alpha \in On$. Dla dowolnej algebry Boolea $\mathbf{A}$ niech $\mathbf{I}_{AT}$ $(\mathbf{A})$ będzie ideałem w $\mathbf{A}$ generowanym przez atomy $\mathbf{A}$. Określamy przez indukcję ciąg ideałów $\mathbf{I}_\alpha$ algebry $\mathbf{A}$. Jeśli $\mathbf{I}_\alpha$ został określony, to połóżmy $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A} \setminus \mathbf{I}_\alpha$ (jest to pochodna Cantora-Bendixsona algebry $\mathbf{A}$ rzędu α) i niech $\pi_\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_\alpha$ będzie homomorfizmem kanonicznym. Definiujemy $\mathbf{I}_0 = \{0\}$, $\mathbf{I}_{\alpha+1} = \pi_\alpha^{-1}[\,\mathbf{I}_{AT}(\mathbf{A}_\alpha)]$, $\mathbf{I}_\lambda = \bigcup\{\,\mathbf{I}_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Własności:

1. $\mathbf{I}_\alpha \subset \mathbf{I}_{\alpha+1}$,
2. Istnieje liczba porządkowa α taka, że $\mathbf{I}_\alpha = \mathbf{I}_{\alpha+1}$.

Algebra jest *superatomowa*, jeżeli jest atomowa i każdy jej obraz homomorficzny jest algebrą atomową. Dualizm Stone'a dostarcza następującej równoważności: $\mathbf{A}$ jest superatomowa $\Leftrightarrow$ przestrzeń Stone'a $\mathrm{St}(\mathbf{A})$ algebry $\mathbf{A}$ jest przestrzenią rozproszoną (tj. nie zawiera podzbioru w sobie gęstego), por. [2].

Definicja ciągu logik: $\mathbf{P}_n = \mathrm{INT} + P_n$, tj. P_n jest rozszerzeniem intuicjonistycznej logiki zdań o formułę P_n, domkniętym na reguły odrywania i podstawiania, dla $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$,
gdzie,

$$P_1 = p_1 \vee \neg p_1, \quad P_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to P_n)$$

Wiadomo (Ono [4]), że

$$(*) \qquad \varphi \in \mathrm{INT} \Leftrightarrow \text{ dla każdego } n \geq 1,\ \varphi \in \mathbf{P}_n.$$

Lemat 3. Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X i dowolnego wartościowania $v : L \to \mathcal{O}(X)$

a) $v(P_n) \subseteq X \setminus X^{(n)}$, dla $n \geq 1$.

b) $v_0(P_n) = X \setminus X^{(n)}$, dla $n \geq 1$, dla pewnego v_0. i dla dowolnej T_1 – przestrzeni rozproszonej X.

∎

Twierdzenie 2. Jeżeli n–ta pochodna Cantora-Bendixsona przestrzeni X znika, tj. $X^{(n)} = \emptyset$, to $P_n \in E(\mathcal{O}(X))$. Ponadto, jeżeli X jest T_1 – przestrzenią rozproszoną, to implikację można odwrócić.

Dowód wynika bezpośrednio z Lem. 3. ▪

Wniosek 1: Jeżeli X jest T_1 – przestrzenią rozproszoną i $E(\mathcal{O}(X)) = \mathbf{P}_n$, to $X^{(n)} \neq \emptyset$ i $X^{(n+1)} = \emptyset$.

Lemat 4. Dla dowolnej przestrzeni zwartej metrycznej X, jeżeli $X^{(n)} \neq \emptyset$ i $X^{(n+1)} = \emptyset$, to $E(\mathcal{O}(X)) = \mathbf{P}_{n+1}$, dla $n \geq 0$.

Dowód: Udowodnimy $\subseteq$. Skorzystamy z tw. Mazurkiewicza-Sierpińskiego [3] mówiącego, że każda zwarta rozproszona przestrzeń spełniająca 1–szy aksjomat przeliczalności jest homeomorficzna z przestrzenią wyznaczoną przez przeliczalną zwartą liczbę porządkową tj. liczbę postaci $\omega^n \cdot k+1$ z topologią interwałową, gdzie (n, k) jest parą charakterystyczną przestrzeni X. Ponieważ $\omega^n \cdot k + 1$ jest sumą k rozłącznych domknięto-otwartych kopii $\omega^n + 1$, wystaczy rozważyć $\omega^n + 1$. H. Ono [4] udowodnił, że dla formuły zdaniowej φ i $n \geq 0$: $\varphi \in \mathbf{P}_{n+1} \Leftrightarrow \forall_{m \geq 1} \varphi$ jest prawdziwe w drzewach Kripkego $R_{n+1,m}$,tj. $\varphi \in E(R_{n+1,m})$, gdzie drzewa $R_{n,m}$ są określane dla dowolnego $m \geq 1$ przez indukcję względem $n \geq 1$, $R_{1,m} = S_1$ (drzewo jednopunktowe), $R_{n+1,m} = S_1 \uparrow (R_{n,m})^m$ (por. [4]). Można pokazać indukcyjnie względem $n \geq 0$, że dla dowolnego $m \geq 1$ istnieje odwzorowanie ciągłe i otwarte z $\omega^n + 1$ na drzewo $R_{n+1,m}$, gdzie topologia na drzewie składa się ze zbiorów „domkniętych w górę". Zachodzi także $E(\mathcal{O}(R_{n,m})) = E(R_{n,m})$. Stąd $E(\mathcal{O}(\omega^n + 1)) \subseteq E(R_{n+1,m})$ dla dowolnego $m \geq 1$. A zatem

$$E(\mathcal{O}(X)) \subseteq E(R_{n+1,1}) \cap \ldots \cap E(R_{n+1,m}) \cap E(R_{n+1,m+1}) \cap \ldots = \mathbf{P}_{n+1}$$

▪

Z tego dowodu i z Tw.2 wynika

Wniosek 2: $E(\mathcal{O}(\omega^n + 1)) = \mathbf{P}_{n+1}$ dla $n \geq 0$.

Wniosek 3: Dla dowolnej przestrzeni metrycznej zwartej i rozproszonej X i dla $n \geq 1$: $E(\mathcal{O}(X)) = \mathbf{P}_n \Leftrightarrow X^{(n)} = \emptyset$ i $X^{(n+1)} \neq \emptyset$. Wynika to natychmiast z Wn.1 i Lem.4. Następujące twierdzenie (oraz Wn.3) jest charakteryzacją w języku logiki zdaniowej (tj. w języku rzędu 0) znikania n–tej i nie znikania $(n-1)$–szej pochodnej Cantora-Bendixsona algebry Boolea $\mathbf{A}$ (analogicznie: przestrzeni metrycznej zwartej rozproszonej).

Można je też traktować jako twierdzenie o pełności dla logik $\mathbf{P}_n$.

Twierdzenie 3: Jeżeli **A** jest przeliczalną i superatomową algebrą Boole'a, to dla każdego $n \geq 1$:

$E(\mathbf{Id\ A}) = \mathbf{P}_n \Leftrightarrow \mathbf{A}_n$ jest trywialną i $\mathbf{A}_{n-1}$ jest nietrywialną algebrą Boole'a. Jest to Wn.3 przeformułowany poprzez dualizm Stone'a [1].

Wniosek 4.

a) Dla dowolnej przestrzeni metrycznej zwartej i rozproszonej X, jeżeli $X^{(n)} \neq \emptyset$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, w szczególności $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$ dla $\alpha \geq \omega$, to $E(\mathcal{O}(X)) = \mathrm{INT}$.

b) Dla dowolnej przeliczalnej i superatomowej algebry Boole'a **A**, jeżeli $\mathbf{A}_n$ jest algebrą nietrywialną dla $n \in \mathbb{N}$, w szczególności $\mathbf{A}_\alpha$ jest algebrą nietrywialną dla $\alpha \geq \omega$, to $E(\mathbf{Id\ A})$ =INT.

Dowód. **a)** Z tw. Mazurkiewicza-Sierpińskiego przestrzeń X jest homeomorficzna z $\omega^\alpha \cdot k + 1$, dla pewnej przeliczalnej liczby porządkowej α i $n \in \mathbb{N}$. Wtedy każda $\omega^n + 1$ jest otwartym podzbiorem przestrzeni $\omega^\alpha \cdot k + 1$. Zatem, stosując Lemat 2a) Wn.2 i (*) mamy:

$$E(\mathcal{O}(\omega \cdot (k+1)) \subseteq E(\mathcal{O}(\omega + 1)) \cap E(\omega^2 + 1) \cap E(\omega^3 + 1) \cap \ldots = \mathrm{INT}.$$

Bibliografia

[1.] Dzik W., *Formulas true in the lattice of ideals of a Boolean algebra*, Abstracts of Logic Colloq. Berlin, Journal of Symbolic Logic vol.57 , N.1,1992, p.294.

[2.] Koppelberg S., *Special classes of Boolean Algebras* in „Handbook of Boolean Algebras". Edited by J. D. Monk with R. Bonnet, Elsevier Science Publ. 1989.

[3.] Mazurkiewicz S., Sierpiński W., *Contributiona la topologie des ensembles denombrables*, Fund. Math. 1, 1920, pp.17-27.

[4.] Ono H., *Kripke models and intermediate logics*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 6 (1970) pp.461- 476.

[5.] Rasiowa H., Sikorski R., *The Mathematics of Metamathematics*, PWN, Warszawa 1970.

[6.] Tarski A., *Der Aussagenkalkul and die Topologie* Fundamenta Mathematicae vol.31(1938) pp.103-134 (por. też Woodger translation „Sentential Calculus and Topology").

[1]Przedstawione do tego miejsca rezultaty były prezentowane w [1].