

Krata podrozmaitości rozmaitości wyznaczonej przez równości pewnej postaci grup abelowych-I

Krystyna Gajewska-Kurdziel, Krystyna Mruczek

Streszczenie

W ostatnich latach intensywnie rozwijają się badania związane z klasami algebr wyznaczonych przez równości pewnej określonej postaci, na przykład przez równości normalne, zewnętrznie zgodne, początkowo zgodne, regularne i inne. Okazuje się, że zbiory tych równości tworzą teorie równościowe. Znanym faktem jest, że zbiór teorii równościowych danego typu jest kratą uporządkowaną relacją inkluzji. Każdej teorii równościowej Σ odpowiada wzajemnie jednoznacznie rozmaitość $\text{Mod}(\Sigma)$. A zatem zbiór wszystkich rozmaitości danego typu uporządkowany relacją inkluzji tworzy kratę (izomorficzną z kratą dualną do kraty teorii równościowych danego typu).

W niniejszej pracy przedstawiono kratę $\mathcal{L}(G_{\mathcal{E}x}^{p \cdot q})$ wszystkich podrozmaitości rozmaitości wyznaczonej przez równości zewnętrznie zgodne grup abelowych z eksponentem $p \cdot q$, gdzie p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Badania nad tym zagadnieniem zostały rozpoczęte przez prof.K.Hałkowską, a wyniki uzyskane wspólnie z R.Koch zostały opublikowane w pracy [5].

1 Pojęcia wstępne

(i) Niech \mathcal{G}^n oznacza rozmaitość grup abelowych z eksponentem n , tzn. rozmaitość typu $\tau_0 : \{\cdot, {}^{-1}\} \rightarrow N$ spełniającą następujące równości:

$$(1) \quad x \cdot y = y \cdot x,$$

$$(2) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

$$(3) \quad x \cdot (x \cdot x^{-1}) = x,$$

$$(4) \quad x \cdot x^{-1} = y \cdot y^{-1},$$

$$(5) \quad x \cdot x^{-1} = x^n,$$

gdzie n jest liczbą naturalną większą od zera.

Niech $\mathcal{I}d(\tau_0)$ będzie zbiorem wszystkich równości typu τ_0 .

Równość $\phi = \psi$ typu τ_0 nazywamy normalną (patrz [8], [7]) wtedy i tylko wtedy, gdy termy ϕ i ψ są identyczne lub żaden z tych termów nie jest zmienną.

Ponadto równość tę nazywamy zewnętrźnie zgodną (zob. [2]) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona postaci $\phi_1 = \phi_2$ lub postaci $\phi_1 \cdot \phi_2 = \psi_1 \cdot \psi_2$ lub $\phi_1^{-1} = \psi_1^{-1}$ dla pewnych termów $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ typu τ_0 .

Przez $\mathcal{N}(\mathcal{G}^n)$ oznaczmy zbiór wszystkich równości normalnych spełnionych w rozmaitości \mathcal{G}^n , a przez $\mathcal{N}(\tau_0)$ – zbiór wszystkich równości normalnych typu τ_0 . Przez $\mathcal{E}x(\mathcal{G}^n)$ oznaczamy zbiór wszystkich równości zewnętrźnie zgodnych spełnionych w rozmaitości \mathcal{G}^n , natomiast przez $\mathcal{E}x(\tau_0)$ –zbiór wszystkich równości zewnętrźnie zgodnych typu τ_0 .

2 Krata $\mathcal{L}(\mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^{p,q})$

Niech $\mathcal{L}(\mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^n)$ oznacza kratę wszystkich podrozmaitości rozmaitości zdefiniowanej przez zbiór $\mathcal{E}x(\mathcal{G}^n)$.

Znanym jest fakt, że

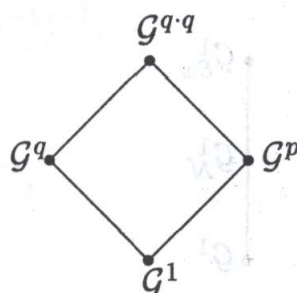
(ii) Krata wszystkich podrozmaitości rozmaitości \mathcal{G}^n jest izomorficzna z kratą $(\{1, \dots, n-1\}; |)$, gdzie $|$ oznacza relację podzielności.

Niech p i q będą różnymi liczbami pierwszymi. Z (ii) wynika, że

(iii) Jedynymi podrozmaitościami rozmaitości $\mathcal{G}^{p,q}$ są następujące rozmaitości: $\mathcal{G}^{p,q}$, \mathcal{G}^p , \mathcal{G}^q oraz \mathcal{G}^1 ,

gdzie \mathcal{G}^1 oznacza rozmaitość trywialną typu τ_0 .

Kratę $\mathcal{L}(\mathcal{G}^{p,q})$ przedstawia następujący diagram



(iv) Aksjomatykę rozmaitości $\mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^{p \cdot q}$ stanowią równości (1),(2),(4) i (5) dla $n = p \cdot q$ oraz równości

$$(6) (x \cdot x \cdot x^{-1})^{-1} = x^{-1},$$

$$(7) (x \cdot y) \cdot x \cdot x^{-1} = x \cdot y.$$

Niech $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}^n$ oznacza rozmaitość zdefiniowaną przez zbiór $\mathcal{N}(\mathcal{G}^n)$.

(v) Aksjomatykę rozmaitości $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}^{p \cdot q}$ stanowią równości (1),(2),(4),(5) i (7) dla $n = p \cdot q$ oraz równość

$$(8) x^{-1} \cdot x \cdot x^{-1} = x^{-1}.$$

(vi) Aksjomatykę rozmaitości $\mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^1$ spełniającej wszystkie równości zewnętrznie zgodne typu τ_0 stanowią równości

$$(9) x \cdot y = z \cdot t,$$

$$(10) x^{-1} = y^{-1}.$$

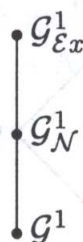
Niech $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}^1$ będzie rozmaitością spełniającą wszystkie równości normalne typu τ_0 . Wówczas

(vii) Aksjomatykę rozmaitości $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}^1$ stanowi równość

$$(11) x \cdot y = z^{-1}.$$

Rozważmy klasę algebr $\text{Mod}(\mathcal{E}x(\tau_0) \cup E)$, gdzie $E \subseteq \text{Id}(\tau_0)$. Jeśli do zbioru E należy przynajmniej jedna równość normalna, która nie jest zewnętrznie zgodna oraz $E \subseteq \mathcal{N}(\tau_0)$, to $\text{Mod}(\mathcal{E}x(\tau_0) \cup E) = \mathcal{G}_{\mathcal{N}}^1$. Jeśli natomiast do zbioru E należy przynajmniej jedna równość postaci $x = \phi$, gdzie ϕ jest termem różnym od zmiennej x , to $\text{Mod}(\mathcal{E}x(\tau_0) \cup E) = \mathcal{G}^1$. Stąd wynika, że

(viii) $\mathcal{L}(\mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^1)$ jest kratą o następującym diagramie



(ix) Niech τ będzie typem algebr i niech $\mathcal{A} = (A; F^{\mathcal{A}})$ i $\mathcal{I} = (I; F^{\mathcal{I}})$ będą algebraми typu τ . Algebra \mathcal{A} jest dyspersją algebry \mathcal{I} (zob. [9], [6]) jeśli istnieje partycja $\{A_i\}$ zbioru A i rodzina odwzorowań $\{c_f\}_{f \in F}$ spełniające warunki

(a) $c_f : I \rightarrow A$,

(b) $c_f(i) \in A_i$ dla $i \in I$,

(c) jeśli $f \in F$ oraz $a_i \in A_{k_i}$ dla $i = 0, \dots, \tau(f) - 1$,
to $f^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{\tau(f)-1}) = c_f(f^{\mathcal{I}}(k_0, \dots, k_{\tau(f)-1}))$.

Dla rozmaitości typu τ przez $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ oznaczmy klasę wszystkich dyspersji algebr z rozmaitości \mathcal{V} .

Niech

(x) $\mathcal{E}^{\mathcal{V}} = \{\mathcal{K} \in \mathcal{L}(\text{Mod}(\mathcal{E}x(\mathcal{V}))) : \mathcal{I}d(\mathcal{K}) = \mathcal{E}x(\mathcal{K})\}$,

(xi) $\mathcal{N}^{\mathcal{V}} = \{\mathcal{K} \in \mathcal{L}(\text{Mod}(\mathcal{N}(\mathcal{V}))) : \mathcal{I}d(\mathcal{K}) = \mathcal{N}(\mathcal{K})\}$,

gdzie $\mathcal{I}d(\mathcal{V})$ oznacza zbiór równości spełnionych w rozmaitości \mathcal{V} .

W pracy [3] pokazano, że

(xii) Jeśli \mathcal{V} jest rozmaitością typu τ taką, że dla pewnego termu $\phi(x)$ różnego od zmiennej równość $\phi(x) = x$ należy do $\mathcal{I}d(\mathcal{V})$ oraz $\text{Mod}(\mathcal{E}x(\mathcal{V})) = \mathcal{D}(\mathcal{V})$, to kraty $\mathcal{E}^{\mathcal{V}}$, $\mathcal{N}^{\mathcal{V}}$ i $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ są izomorficzne.

Z pracy [9] wynika, że rozmaitość $\mathcal{G}^{p,q}$ spełnia założenia twierdzenia

(xii). Stąd oraz z (iii) wynika natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 1 $\mathcal{N}^{\mathcal{G}^{p,q}} = \{\mathcal{G}_{\mathcal{N}}^{p,q}, \mathcal{G}_{\mathcal{N}}^p, \mathcal{G}_{\mathcal{N}}^q, \mathcal{G}_{\mathcal{N}}^1\}$ oraz $\mathcal{E}^{\mathcal{G}^{p,q}} = \{\mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^{p,q}, \mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^p, \mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^q, \mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^1\}$.

Przyjmijmy oznaczenie $x^0 = x \cdot x^{-1}$ i rozważmy następujące równości:

(12) $x = x \cdot x^k$,

(13) $x = ((x^k)^{-1})^{-1}$,

(14) $((x^k)^{-1})^{-1} = ((x^l)^{-1})^{-1}$,

(15) $x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^l$,

(16) $x^0 \cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}$,

gdzie $k, l \in \mathbb{Z}_{p,q}$.

W pracy [4] pokazano, że

- (xiii) Dla każdego podzbioru E_1 zbioru $\mathcal{I}d(\tau_0)$ istnieje skończony zbiór E równości jednej zmiennej typu τ_0 postaci (12)–(16) taki, że
- $$Cn(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p,q}) \cup E_1) = Cn(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p,q}) \cup E).$$

Stąd wynika, że dla każdej podrozumności \mathcal{K} rozumności $\mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^{p,q}$ istnieje skończony zbiór E równości jednej zmiennej typu τ_0 postaci (12)–(16) taki, że $\mathcal{K} = \text{Mod}(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p,q}) \cup E)$.

Lemat 1 *Jeśli $k \in Z_{p,q}$, to $Cn(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p,q}) \cup \{x = x^0 \cdot x^k\}) = \mathcal{I}d(\mathcal{G}^s)$, gdzie $s = (p \cdot q, k - 1)$, przy czym dla $k = 1$ przyjmujemy $(p \cdot q, 0) = p \cdot q$.*

Dowód. Jeśli $k = 0$ lub $k = 1$, to wykorzystując (i) oraz (iv) otrzymujemy natychmiast tezę. Załóżmy zatem, że $k \neq 0$ i $k \neq 1$. Dla czytelniejszego zapisu przyjmijmy, że $C = Cn(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p,q}) \cup \{x = x^0 \cdot x^k\})$.

Jeśli $s = (p \cdot q, k - 1)$, to w zbiorze $Z_{p,q}$ istnieje element a taki, że $k - 1 = a \cdot s$. Ponieważ równość $x^0 = x^s$ jest spełniona w rozumności \mathcal{G}^s zatem równość $x^0 = x^{k-1}$ również jest spełniona w tej rozumności. Z aksjomatyki rozumności \mathcal{G}^s (zob. (i) dla $n = s$) wynika, że następujący ciąg równości jest spełniony w \mathcal{G}^s : $x = x^0 \cdot x = x^{k-1} \cdot x = x^0 \cdot x^k$. Zatem równość $x = x^0 \cdot x^k$ jest spełniona w rozumności \mathcal{G}^s . Stąd wynika, że $C \subseteq \mathcal{I}d(\mathcal{G}^s)$.

Aby udowodnić inkluzję odwrotną zauważmy, że $(x^0 = x^0 \cdot x^{k-1}) \in C$. Ponieważ $s = (p \cdot q, k - 1)$, to w zbiorze $Z_{p,q}$ istnieją elementy a i b takie, że $s = a \cdot p \cdot q + b \cdot (k - 1)$. Tym samym w rozumności $\text{Mod}(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p,q}) \cup \{x = x^0 \cdot x^k\})$ spełniony jest następujący ciąg równości: $x^s = x^{a \cdot p \cdot q + b \cdot (k-1)} = x^{a \cdot p \cdot q} x^{b \cdot (k-1)} = (x^{p \cdot q})^a \cdot (x^{k-1})^b = (x^0)^a \cdot (x^0)^b = x^0 \cdot x^0 = x^0$. Stąd otrzymujemy, że równość $x^s = x^0$ należy do $Cn(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p,q}) \cup \{x = x^0 \cdot x^k\})$. Zauważmy, że następujący ciąg równości jest również spełniony w zbiorze C : $x = x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^{k-1} \cdot x = x^0 \cdot x^0 \cdot x = x^0 \cdot x$. Pozostałe równości aksjomatyzujące rozumność \mathcal{G}^s są zewnętrznie zgodne, tym samym dowód inkluzji odwrotnej został zakończony.

Lemat 2 *Jeśli $k \in Z_{p,q}$, to $Cn(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p,q}) \cup \{x = ((x^k)^{-1})^{-1}\}) = \mathcal{I}d(\mathcal{G}^s)$, gdzie $s = (p \cdot q, k - 1)$, przy czym dla $k = 1$ przyjmujemy $(p \cdot q, 0) = p \cdot q$.*

Dowód lematu pominiemy, gdyż jest analogiczny do dowodu lematu 1.

Z lematów 1 i 2 wynika następujący wniosek

Wniosek 2 *Jeśli E jest zbiorem równości jednej zmiennej typu τ_0 i równość $\phi = \psi$ jest postaci (12) lub (13) należy do E , to $\text{Mod}(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup E) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^{p \cdot q})$.*

Lemat 3 *Jeśli $k, l \in Z_{p \cdot q}$, to $Cn(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^l\}) = \mathcal{E}x(\mathcal{G}^s)$, gdzie $s = (p \cdot q, k - l)$, przy czym dla $k = l$ przyjmujemy $(p \cdot q, 0) = p \cdot q$.*

Dowód. Podobnie jak w dowodzie lematu 1 oznaczmy $C = Cn(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^l\})$. Niech $s = (p \cdot q, k - l)$. Jeśli $k = l$, to dowód jest oczywisty. Załóżmy zatem, że $k \neq l$. Z określenia s wynika, że w zbiorze $Z_{p \cdot q}$ istnieje element a taki, że $s \cdot a = k - l$. Równość $x^0 = x^0 \cdot x^s$ jest spełniona w rozmaitości $\mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^s$, a zatem równość $x^0 = x^0 \cdot x^{a \cdot s}$ również jest spełniona w tej rozmaitości. Ostatecznie otrzymujemy, że równość $x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^l$ należy do zbioru $\mathcal{E}x(\mathcal{G}^s)$ a tym samym pokazaliśmy, że $C \subseteq \mathcal{E}x(\mathcal{G}^s)$.

Aby udowodnić inkluzję odwrotną zauważmy, że równości $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{p \cdot q}$, $x^0 \cdot x^k = x^0 \cdot x^l$ należą do zbioru C . Zatem równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{k-l}$ również należy do tego zbioru. Z określenia s wynika, że w zbiorze $Z_{p \cdot q}$ istnieją elementy a i b takie, że $a \cdot p \cdot q + b \cdot (l - k) = s$. Ponieważ równości $(x^0)^b = (x^0 \cdot x^{k-l})^b$ i $(x^0)^a = (x^0 \cdot x^{p \cdot q})^a$ należą do zbioru C zatem równości $x^0 = x^0 \cdot x^{b \cdot (l-k)}$ i $x^0 = x^0 \cdot x^{a \cdot p \cdot q}$ również należą do tego zbioru. Stąd równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{a \cdot p \cdot q} \cdot x^{b \cdot (k-l)}$ należy do zbioru C . Pokazaliśmy zatem, że równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{a \cdot p \cdot q + b \cdot (l-k)}$ należy do zbioru C co jest równoważne temu, że równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^s$ również należy do zbioru C . Tym samym dowód lematu został zakończony.

Lemat 4 *Jeśli $k, l \in Z_{p \cdot q}$, to $Cn(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup \{((x^k)^{-1})^{-1} = ((x^l)^{-1})^{-1}\}) = \mathcal{E}x(\mathcal{G}^s)$, gdzie $s = (p \cdot q, k - l)$, przy czym dla $k = l$ przyjmujemy $(p \cdot q, 0) = p \cdot q$.*

Dowód jest analogiczny do dowodu poprzedniego lematu.

Z lematów 3 i 4 wynika następujący wniosek

Wniosek 3 *Jeśli E jest zbiorem równości postaci (14) lub (15), to $\text{Mod}(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup E) \in \mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q})$.*

Z wniosków 2 i 3 wynika, że interesujące są te klasy algebr $\text{Mod}(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup E)$, dla których do zbioru E należy conajmniej jedna równość postaci (16) i nie należy żadna równość postaci (12) lub (13).

Wzoruując się na pracy [5] wprowadźmy oznaczenie

$$(xiv) \quad C^n = \text{Mod}(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^n) \cup \{x^0 \cdot x^0 = ((x^0)^{-1})^{-1}\}),$$

dla $n \in N, n > 0$.

Zauważmy, że $C^1 = \mathcal{G}_{\mathcal{N}}^1$.

W pracy [5] udowodniono następujący warunek

$$(xv) \quad \mathcal{G}_{\mathcal{N}}^n \subsetneq C^n \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^n \text{ oraz} \\ \mathcal{G}_{\mathcal{N}}^n \neq C^n \neq \mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^n \text{ dla } n \geq 2.$$

$$\text{Lemat 5} \quad \text{Mod}(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^s) \cup \{x^{-1} \cdot x^0 = x^{-1}\}) = \mathcal{G}_{\mathcal{N}}^s.$$

Dowód. Oczywiście jest, że $\mathcal{E}x(\mathcal{G}^s) \cup \{x^{-1} \cdot x^0 = x^{-1}\} \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{G}^s)$.

Inkluzja odwrotna łatwo wynika z aksjomatyk rozmaitości $\mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^s$ oraz $\mathcal{G}_{\mathcal{N}}^s$ (patrz równości (1),(2),(4),(5)-(8) dla $n = s$.)

Lemat 6 *Jeśli $l \equiv 0 \pmod{(k-l, p \cdot q)}$, to*

$$C_n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}\}) = C_n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{(k-l, p \cdot q)}) \cup \{x^0 \cdot x^0 = ((x^0)^{-1})^{-1}\}).$$

Dowód. Przyjmijmy $C_1 = C_n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}\})$ oraz $C_2 = C_n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{(k-l, p \cdot q)}) \cup \{x^0 \cdot x^0 = ((x^0)^{-1})^{-1}\})$. Niech $l \equiv 0 \pmod{(k-l, p \cdot q)}$. W zbiorze $Z_{p \cdot q}$ istnieje element a taki, że $a \cdot (p \cdot q, k-l) = l$, zatem równość $x^0 \cdot x^0 = ((x^l)^{-1})^{-1}$ należy do C_2 co implikuje, że równość $x^0 \cdot x^l = ((x^l)^{-1})^{-1}$ należy do C_2 . Stąd oraz z tego, że równość $x^0 \cdot x^0 = x^0 \cdot x^{k-l}$ należy do C_2 wynika, że równość $x^0 \cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}$ również należy do tego zbioru. Łatwo widać, że równość $x^0 = x^{p \cdot q}$ należy do C_2 .

Pokazaliśmy więc, że $C_1 \subseteq C_2$.

Inkluzja odwrotna jest oczywista.

Z powyższego lematu wynika następujący wniosek

Wniosek 4 *Jeśli $l \equiv 0 \pmod{(k-l, p \cdot q)}$, to*

$$\text{Mod}(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup \{x^0 \cdot x^k = ((x^l)^{-1})^{-1}\}) = \mathcal{C}^{(p \cdot q, k-l)}.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$(xvi) \quad \mathcal{P}_n^{\{k_1, \dots, k_s\}} = \text{Mod}(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^n) \cup \bigcup_{i=1}^s \{x^0 \cdot x^{k_i} = ((x^{k_i})^{-1})^{-1}\}).$$

Lemat 7 *Jeśli k_1, \dots, k_s są elementami zbioru Z_n oraz dla pewnego $i \in \{1, \dots, s\}$ $(k_i, n) = 1$, to $\mathcal{P}_n^{\{k_1, \dots, k_s\}} = \mathcal{G}_N^n$ dla $n \in N, n > 0$.*

Dowód. Niech $C = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^n) \cup \bigcup_{i=1}^s \{x^0 \cdot x^{k_i} = ((x^{k_i})^{-1})^{-1}\})$. Oczywiście jest, że $C \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{G}^n)$. Aby udowodnić inkluzję odwrotną wystarczy pokazać, że równość $x^{-1} \cdot x^0 = x^{-1}$ należy do C .

Przypuśćmy, że $(k_i, n) = 1$ dla pewnego i należącego do zbioru $\{1, \dots, s\}$. Wówczas w zbiorze Z_n istnieją elementy a i b takie, że $a \cdot k_i + b \cdot n = 1$. Ponieważ $(x^0 \cdot x^{k_i} = ((x^{k_i})^{-1})^{-1}) \in C$, to $x^0 \cdot x^{a \cdot k_i} = ((x^{a \cdot k_i})^{-1})^{-1} \in C$. Stąd otrzymujemy, że $x^0 \cdot x^{1-n \cdot b} = ((x^{1-n \cdot b})^{-1})^{-1} \in C$ co implikuje, że $(x^0 \cdot x = (x^{-1})^{-1}) \in C$. Podstawiając w ostatniej równości x^{-1} za x otrzymujemy, że równość $x^0 \cdot x^{-1} = x^{-1}$ należy do C . Tym samym dowód lematu został zakończony.

Twierdzenie 1 *Jeśli E jest zbiorem równości postaci (12)–(16), to $\text{Mod}(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup E)$ jest jedną z następujących rozmaitości:*

$$(xvii) \quad \mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^{p \cdot q}, \mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^p, \mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^q, \mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^1, \mathcal{C}^{p \cdot q}, \mathcal{C}^p, \mathcal{C}^q, \mathcal{P}_{p \cdot q}^{\{p, q\}}, \mathcal{P}_{p \cdot q}^{\{p\}}, \mathcal{P}_{p \cdot q}^{\{q\}}, \\ \mathcal{G}_N^{p \cdot q}, \mathcal{G}_N^p, \mathcal{G}_N^q, \mathcal{G}_N^1, \mathcal{G}^{p \cdot q}, \mathcal{G}^p, \mathcal{G}^q, \mathcal{G}^1.$$

Dowód. Niech $E \subseteq \mathcal{I}d(\tau)$ i niech $\mathcal{V} = \text{Mod}(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup E)$. Wówczas zachodzi jeden z następujących przypadków:

- (1) $E \subseteq \mathcal{E}x(\tau)$,
- (2) do zbioru E należy conajmniej jedna równość postaci (12) lub (13),
- (3) do zbioru E należy conajmniej jedna równość postaci (16) i żadna równość ze zbioru E nie jest postaci (12) lub (13).

Dowody dwóch pierwszych przypadków są oczywiste. Pierwszy wynika z wniosku 3, natomiast drugi z wniosku 2 i z warunku (iii).

Aby udowodnić przypadek (3) założymy, że żadna równość należąca do zbioru E nie jest postaci (12) lub (13) oraz, że przynajmniej jedna równość należąca do zbioru E jest postaci (16). Zatem zbiór E jest skończonym zbiorem równości postaci (14)–(16). Możemy go przedstawić w następujący sposób:

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3, \text{ gdzie} \\ E_1 = \{((x^{k_1})^{-1})^{-1} = ((x^{l_1})^{-1})^{-1}, \dots, ((x^{k_t})^{-1})^{-1} = ((x^{l_t})^{-1})^{-1}\}, \\ E_2 = \{x^0 \cdot x^{k_{t+1}} = x^0 \cdot x^{l_{t+1}}, \dots, x^0 \cdot x^{k_r} = x^0 \cdot x^{l_r}\},$$

$E_3 = \{x^0 \cdot x^{k_{r+1}} = ((x^{l_{r+1}})^{-1})^{-1}, \dots, x^0 \cdot x^{k_s} = ((x^{l_s})^{-1})^{-1}\}$.
 Zbiory E_1 i E_2 mogą oczywiście być puste, natomiast zbiór E_3 jest niepusty. Wprowadźmy oznaczenie $w = (k_1 - l_1, \dots, k_s - l_s, p \cdot q)$, przy czym, jeśli $k_i = l_i$, to przyjmujemy $k_i - l_i = p \cdot q$. Łatwo widać, że jeśli p i q są różnymi liczbami pierwszymi, to $w \in \{1, p, q, p \cdot q\}$. Jeśli $w = 1$ to z warunku (viii) otrzymujemy, że $\mathcal{V} = \mathcal{G}_N^1$. Jeśli natomiast $w = p$, to w zbiorze $\{1, \dots, s\}$ istnieje element i taki, że $(k_i - l_i, p \cdot q) = p$. Jeśli natomiast $j \neq i$, to $k_j = l_j$ lub $(k_j - l_j, p \cdot q) = p$. Stąd oraz z tego, że $k_j \equiv l_j \pmod{p \cdot q, k - l}$ otrzymujemy, że $\mathcal{V} = \mathcal{C}n(\mathcal{E}x(\mathcal{G}^{p \cdot q}) \cup E_1 \cup E_2 \cup \{x^0 \cdot x^{(l_{r+1}) \bmod(p)} = ((x^{(l_{r+1}) \bmod(p)})^{-1})^{-1}, \dots, x^0 \cdot x^{(l_s) \bmod(p)} = ((x^{(l_s) \bmod(p)})^{-1})^{-1}, x^0 \cdot x^0 = x^p\})$. Niech $m_i = (l_{r+i}) \bmod(p)$ dla $i = 1, \dots, s - r$. Jeśli $(m_i, p) = 1$, to z tego, że równość $x^0 \cdot x^{m_i} = ((x^{m_i})^{-1})^{-1}$ jest spełniona w rozmaitości wynika, że równość $x^0 \cdot x^{-1} = x^{-1}$ jest również spełniona w rozmaitości \mathcal{V} . Z lematu 5 otrzymujemy, że $\mathcal{V} = \mathcal{G}_N^p$. Jeśli natomiast $(m_i, p) \neq 1$, to oczywiście $(m_i, p) = p$. Wykorzystując wniosek 4 otrzymujemy, że $\mathcal{V} = \mathcal{C}^p$.

Dowód dla $w = q$ przebiega podobnie jak wyżej.

Załóżmy teraz, że $w = p \cdot q$. Łatwo wówczas widać, że $k_i = l_i$ dla $i \in \{1, \dots, s\}$. Jeśli $(k_i, p \cdot q) = 1$ dla pewnego $i \in \{r + 1, \dots, s\}$, to na mocy lematu 6 otrzymujemy natychmiast, że $\mathcal{V} = \mathcal{G}_N^{p \cdot q}$. Załóżmy zatem, że $(k_i, p \cdot q) \neq 1$ dla każdego i należącego do zbioru $\{r + 1, \dots, s\}$. Wówczas $(k_i, p \cdot q) \in \{p, q, p \cdot q\}$ i z określenia (xvi) łatwo wynika, że \mathcal{V} jest jedną z następujących rozmaitości: $\mathcal{P}_{p \cdot q}^p, \mathcal{P}_{p \cdot q}^q, \mathcal{P}_{p \cdot q}^{p \cdot q}$.

Twierdzenie 2 Każde dwie rozmaitości wymienione w punkcie (xvii) są różne.

Dowód. Oczywiście są następujące inkluzje: $\mathcal{G}^1 \subseteq \mathcal{G}_N^1 \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^1, \mathcal{G}^r \subseteq \mathcal{G}_N^r \subseteq \mathcal{C}^r \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^r$, oraz $\mathcal{G}^{p \cdot q} \subseteq \mathcal{G}_N^{p \cdot q} \subseteq \mathcal{P}_{p \cdot q}^{\{r\}} \subseteq \mathcal{P}_{p \cdot q}^{\{p, q\}} \subseteq \mathcal{C}^{p \cdot q} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^{p \cdot q}$, a także inkluzje $\mathcal{C}^r \subseteq \mathcal{P}_{p \cdot q}^{\{r\}}$ dla $r \in \{p, q\}$. Dowód, że inkluzje te są właściwe, ograniczymy do przypadku dla rozmaitości $\mathcal{P}_{p \cdot q}^{\{p\}}$ i $\mathcal{C}^{p \cdot q}$ konstruując algebrę należącą do rozmaitości $\mathcal{C}^{p \cdot q}$ i nienależącą do rozmaitości $\mathcal{P}_{p \cdot q}^{\{p\}}$. Dla pozostałych par rozmaitości dowód przebiega analogicznie.

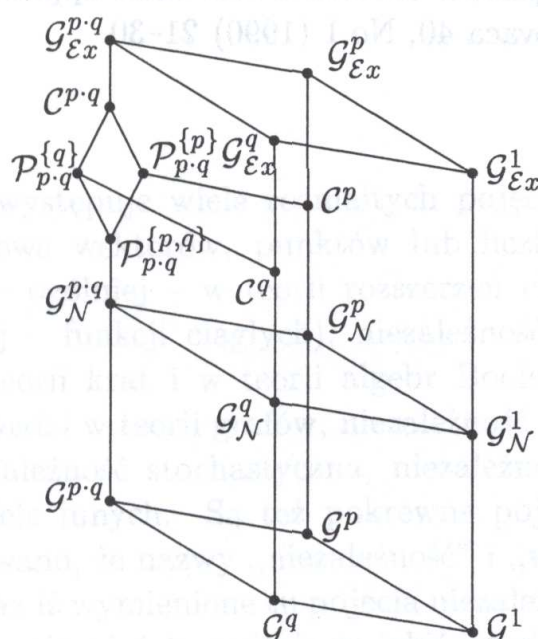
Rozważmy grupę $\mathcal{Z}_n = (\mathcal{Z}_{p \cdot q}; +, -)$ i algebrę $(\{0, 1, \dots, p^+, p^-, \dots, p \cdot q - 1\}; +, -)$ będącą następującą dyspersją grupy \mathcal{Z}_n :
 $A_i = \{i\}$ dla $i \in \{0, 1, \dots, p - 1, p + 1, \dots, p \cdot q - 1\}$,
 $A_p = \{p^+, p^-\}$,
 $c_+(i) = c_-(i) = i$ dla $i \neq p$ oraz $c_+(p) = p^+, c_-(p) = p^-$.
 Widać, że równość $x^0 \cdot x^0 = ((x^0)^{-1})^{-1}$ jest spełniona w tej algebrze, natomiast równość $x^0 \cdot x^p = ((x^p)^{-1})^{-1}$ nie jest spełniona dla $x = 1$.

Twierdzenie 3 Jeśli \mathcal{V} jest podrozmaitością rozmaitości $\mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^{p,q}$, to jest ona jedną z rozmaitości podanych w warunku (xvii).

Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 1 oraz z warunku (xiii).

Bezpośrednio z powyższych twierdzeń wynika następujący wniosek

Wniosek 5 Klatkę $\mathcal{L}(\mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^{p,q})$ wszystkich podrozmaitości rozmaitości $\mathcal{G}_{\mathcal{E}x}^{p,q}$ przedstawia następujący diagram.



Bibliografia

- [1] Burris S., Sankappanaver H.P., A Course in Universal Algebra, Springer-Verlag, New York 1981.
- [2] Chromik W., Externally compatible identities of algebras, Demonstratio Mathematica, vol.23, No.2, (1990) 344–355.
- [3] Gajewska–Kurdziel K., On the lattice of some varieties defined by externally compatible identities, General Algebra and Discrete Mathematics, Berlin (1995) 107–110.
- [4] Gajewska–Kurdziel K., Mruczek K., Równoważność pewnych zbiorów równości spełnionych w rozmaitości grup abelowych (do wglądu).

- [5] Hałkowska K., Koch R., On the lattice of varieties defined by externally compatible identities of Abelian Groups, *Acta Universitatis Vratislaviensis*,
- [6] Hałkowska K., On the dispersion operator on classes of algebras, *Bull. of the Section of Logic, PAN*, vol.A, No.2 (1998)
- [7] Mel'nik I.I., Normal closures of perfect varieties of universal algebras (in Russian), *Ordered sets of lattices*, Izdat. Saratov (1971) 56–65.
- [8] Płonka J., On the subdirect product of some equational classes of algebras, *Math. Nachr.*63 (1974).
- [9] Płonka J., P-compatible identities and their applications to classical algebras, *Math.Slovaca* 40, No.1 (1990) 21–30.



- [1] Burris S., Sankappanavar H.P., *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, New York 1981.
- [2] Chromik W., Externally compatible identities of algebras, *Darmstädter Zeitschrift für Mathematik*, vol.38, No.2 (1990) 344–352.
- [3] Gaławska-Kuchtał K., On the lattice of some varieties defined by externally compatible identities, *General Algebra and Discrete Mathematics*, Berlin (1997) 107–110.
- [4] Gaławska-Kuchtał K., Matusz K., *Równoważność pewnych zbiorów równości spotynnych w rozmiarach grup abelowych* (do wydania).