Prace Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie
Matematyka V, Częstochowa 1997

Ogólny schemat niezależności w ujęciu algebraicznym

Kazimierz Głazek

Wstęp.

W matematyce występuje wiele rozmaitych pojęć niezależności, jak np. niezależność liniowa wektorów, punktów lub liczb, niezależność liniowa w teorii liczb i – ogólniej – w teorii rozszerzeń ciał, niezależność wielomianów (ogólniej – funkcji ciągłych), niezależność logiczna aksjomatów, niezależność w teorii krat i w teorii algebr Boole'a, niezależność wierzchołków lub krawędzi w teorii grafów, niezależność ze względu na operator domknięcia, niezależność stochastyczna, niezależność rozważana w teorii baz danych i wiele innych. Są też pokrewne pojęcia wolności. Od lat 30-tych obserwowano, że nazwy „niezależność" i „wolność" występują nieprzypadkowo, oraz iż wymienione tu pojęcia niezależności mają różne cechy wspólne. Starano się ująć te pojęcia w jakiś wspólny schemat. Powstały – z grubsza mówiąc – dwa bardzo ogólne schematy: jeden bardziej teoriomnogościowy, używany często w rozważaniach kombinatorycznych i optymizacyjnych, prowadzący do żywo ostatnio rozwijających się teorii matroidów i greedoidów, oraz drugi oparty na rozważaniach pochodzących z algebry ogólnej. Zajmę się tu głównie tym drugim, ale pokażę również pewne związki między tymi wspomnianymi wyżej podejściami. W szczególności dla zilustrowania tej ogólnej teorii zajmę się pewnymi własnościami rodzin zbiorów niezależnych pozwalającymi w pewnych konkretnych przypadkach scharakteryzować te rodziny, oraz mocami niezależnych układów generatorów (czyli baz). Jest jeszcze sporo interesujących problemów i kierunków w tej teorii (por. K. Głazek 1979).

Pracę niniejszą poświęcam pamięci zmarłego w 1976 r. Profesora Edwarda Marczewskiego – twórcy ogólno-algebraicznego podejścia do pojęć niezależności.

§1. Niezależność zdefiniowana za pomocą operatora domknięcia.

Niech A będzie zbiorem niepustym oraz $\mathfrak{C} : 2^A \to 2^A$ będzie operatorem uogólnionego domknięcia określonego na podzbiorach zbioru A, czyli operatorem ekstensywnym, izotonicznym i idempotentnym. Parę $A; \mathfrak{C})$ nazywamy wówczas *przestrzenią domknięciową*. Mówimy, że podzbiór $X \subseteq A$ generuje przestrzeń A (lub X jest *zbiorem generatorów* przestrzeni A), gdy $\mathfrak{C}(X) = A$. Podzbiór $X \subseteq A$ jest zbiorem *$\mathfrak{C}$–niezależnym* (lub *niezależnym ze względu na operator domknięcia* $\mathfrak{C}$), gdy

(In) $$(\forall\, a \in X)(a \notin \mathfrak{C}(X \setminus \{a\})).$$

Kilka wymienionych niżej własności operatora $\mathfrak{C}$ odgrywa ważną rolę w badaniu przestrzeni domknięciowych, prowadzą one do interesujących rozważań kombinatorycznych. Operator $\mathfrak{C}$ ma *własność wymiany,* gdy

(Ex) $$(\forall\, a, b \in A)(\forall\, x \subseteq A)(b \notin \mathfrak{C}(X)\ \&\ b \in \mathfrak{C}(X \cup \{a\}) \Rightarrow a \in \mathfrak{C}(X \cup \{b\})).$$

Ma on *własność anty–wymiany,* gdy

(AEx) $$(\forall\, a, b \in A, a \neq b)(\forall X \subseteq A)[b \notin \mathfrak{C}(X)\ \&\ b \in \mathfrak{C}(X \cup \{a\}) \Rightarrow a \in \mathfrak{C}(X \cup \{b\})].$$

Zdefiniujmy operator $\mathfrak{C}_n$ na podzbiorach zbioru A w następujący sposób:

$$\mathfrak{C}_n(X) = X \cup \bigcup \{\mathfrak{C}(Y)\ \ Y \subseteq X\ \&\ card(Y) \leq n\}.$$

Wówczas operator $\mathfrak{C}$ jest *rzędu n*, gdy

(R–n) $$\mathfrak{C}(X) = \mathfrak{C}_n(X) \cup \mathfrak{C}_n(\mathfrak{C}_n(X)) \cup \ldots$$

Jeśli operator $\mathfrak{C}$ ma własność

(FCh) $$(\forall X \subseteq A)(\forall a \in A)[a \in \mathfrak{C}(X) \Leftrightarrow (\exists Y \subseteq X\ \&\ card(Y) < \infty)(a \in \mathfrak{C}(Y))],$$

to mówimy, że operator $\mathfrak{C}$ jest *skończonego charakteru.* W szczególności operatory domknięcia na zbiorach skończonych mają tę własność.

Rozważanie zbiorów skończonych z operatorami domknięcia o własności (Ex) prowadzi do burzliwie rozwijającej się teorii matroidów (por. Oxley 1992, Welsh 1976), która została zainicjowana w połowie lat trzydziestych naszego stulecia pracami H. Whitney'a i T. Nakasawy. Jest ona równoważną (*kryptomorficzną* w sensie terminologii G. Birkhoffa) z teorią *abstrakcyjnej zależności* zaproponowaną przez B. L. van der Waerdena. Łatwo uogólnić tę teorię na zbiory nieskończone z operatorami domknięcia, które oprócz własności (Ex) mają własność (FCh). Można wówczas dla takich przestrzeni domknięciowych $(A; \mathfrak{C})$ łatwo scharakteryzować rodziny

$\mathcal{I} = \mathfrak{C}\text{-}Ind(A)$ zbiorów $\mathfrak{C}$–niezależnych, np. gdy zbiór A jest skończony, poprzez własności:

$$(I_1) \qquad \emptyset \neq \mathcal{I} \subseteq 2^A,$$

$$(I_2) \qquad (\forall X, Y \subseteq A)(X \in \mathcal{I} \ \&\ Y \subseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{I}),$$

$$(I_3) \qquad (\forall X, Y \subseteq A)[X, Y \in \mathcal{I} \ \&\ card(X) = card(Y) + 1 \\ \Rightarrow (\exists a \in X \setminus Y)(Y \cup \{a\} \in \mathcal{I})].$$

W przypadku, gdy A jest zbiorem nieskończonym, własność (I_3) zachodzi dla podzbiorów skończonych X i Y zbioru A. Definiując $\mathfrak{C}$–*bazę* (lub, w innej terminologii *bazę zredukowaną*, por. Tarski 1968) jako $\mathfrak{C}$–niezależny zbiór generatów (w rozważnej sytuacji jest on też maksymalnym zbiorem $\mathfrak{C}$–niezależnym, a także minimalnym zbiorem generatów) nietrudno stwierdzić, że wszystkie $\mathfrak{C}$-bazy są równoliczne. Fakty te uogólniają znane własności niezależności liniowej (rezultat pochodzący niezależnie od A. N. Whitheada i E. Steinitza z lat 1898 - 1910), niezależności algebraicznej oraz niezależności (krawędzi lub wierzchołków) rozważanej w teorii grafów. Matroidy można zdefiniować używając jako pojęcia pierwotnego rodzinę $\mathcal{I}$ podzbiorów zbioru A (a nie operatora $\mathfrak{C}$ na 2^A) i przyjmując jako aksjomaty własności (I_1), (I_2) oraz (I_3). Teoria matroidów ma ostatnio rozliczne zastosowania, wymieńmy tu choćby jej aplikacje do różnych zagadnień optymalizacji i kombinatoryki (por. Lawler 1975, Recski 1989). Warto dodać, że podejście algorytmiczne prowadzące do pojęcia matroidu (i trochę ogólniej do pojęcia greedoidu) pojawiło się po raz pierwszy w pracy O. Borůvki z roku 1926, w której badał on optymalizację sieci elektrycznej na Morawach.

Zakładając dla rodziny $\mathcal{I}$ podzbiorów zbioru skończonego A tylko aksjomaty (I_2) oraz (I_3) otrzymujemy pojęcie *greedoidu*, też bardzo użyteczne w kombinatorycznej optymalizacji (z użyciem w szczególności tzw. *algorytmu chciwości*, por. książka Korte & Lovasz & Schrader 1991).

Badanie przestrzeni domknięciowej $(A; \mathfrak{C})$ z własnością (AEx) prowadzi do pojęcia *antymatroidu*, będącego wygodnym narzędziem w *abstrakcyjnej teorii wypukłości*. W antymatroidach $\mathfrak{C}$–baza jest tylko jedna. Własność (AEx) jest w pewnym sensie równoważna ze znanym twierdzeniem Kreina–Milmana. Zainteresowanych tą teorią odsyłam do interesujących prac przeglądowych: Jamison–Waldner 1982, Edelman & Jamison 1985 i Dietrich 1989.

Jeżeli $(A; \mathfrak{C})$ jest przestrzenią domknięciową z własnością (R–n), to również ma ona interesujące własności kombinatoryczne wyodrębnione w znanym twierdzeniu interpolacyjnym Tarskiego i jego uogólnieniu dokonanym przez G. McNulty'ego i W. Taylora (por. Tarski 1968, Tarski 1975, Givant 1975, McNulty & Taylor 1975). Operator domknięcia o własności (R–n) nazywa się operatorem *rzędu n*, w szczególności operator $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}} : X \to < X >_{\mathfrak{A}}$ – zdefiniowany w algebrze ogólnej $\mathfrak{A} = (A; \mathbf{F})$ dla podzbioru X zbioru A przez generowanie przezeń podalgebry $< X >_{\mathfrak{A}}$ – jest rzędu n, jeśli działania podstawowe z rodziny $\mathbf{F}$ są wszystkie arności (liczby argumentów) mniejszej lub równej n. Rozważając operator konsekwencji w tzw. logice równościowej (adekwatnej dla teorii rozmaitości algebr ogólnych) otrzymujemy operator rzędu 2, a dla takich operatorów zostało stwierdzone, jako wniosek ze wspomnianego twierdzenia interpolacyjnego, że moce $\mathfrak{C}$–baz tworzą zawsze zbiory wypukłe. Mamy wtedy (na mocy rezultatów A. Tarskiego, R. McKenzie'go i J. Ng) następujące zbiory liczb kardynalnych (w istocie liczb naturalnych, gdyż rozważmy algebry ogólne tylko z działaniami podstawowymi o skończonej arności): $\emptyset, \{0\}, [k, m]$ (gdzie $0 < k \leq m < \infty$) (gdzie $0 < k$) oraz $\{\infty\}$. J. Ng pokazała, że wszystkie te przypadki mogą być zrealizowane w równościowych logikach dla grupoidów. A. Tarski i T. C. Green pokazali, że dla równościowych teorii dla grup lub pierścieni możliwe są tylko dwa przypadki: $[1, \infty)$ i $[2, \infty)$ (w zależności od wybranej aksjomatyki).

Przestrzenie domknięciowe z własnością (FCh) są ściśle związane z teorią algebr ogólnych, gdyż – jak pokazali G. Birkhoff i O. Frink oraz niezależnie J. Schmidt – dla operatora domknięcia na 2^A spełniającego (FCh) istnieje algebra ogólna $(A; \mathbf{F})$ realizująca ten operator jako $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}$. Konstrukcja takiej algebry zaproponowana przez Birkhoffa i Frinka (lub przez Schmidta) jest mało „oszczędna" wymaga bowiem wielu działań podstawowych, które mogą mieć dużą liczbę argumentów. Pytanie o uniwersalną oszczędniejszą konstrukcję (postawione przeze mnie na konferencji z algebry ogólnej w Krems w 1988) jest wciąż otwarte. W specjalnych przypadkach wraz z J. Skowronek udało się osiągnąć pewne zadawalające rezultaty. Na przykład dla tzw. *matroidu Fano* (na siedmiu elementach) łatwo pokazać, że związany z nim operator domknięcia można już zrealizować w klasie grupoidów i otrzymuje się wtedy odpowiednią *kwazigrupę Steinera.*

Warto nadmienić, że własność wymiany (Ex) służąca do wykazania równoliczności baz może być troszkę osłabiona, również osłabione mogą być aksjomaty uogólnionego domknięcia definiujące przestrzeń domknięciową, np. ekstensywność może być zastąpiona przez refleksywność, a idempotencja przez tranzytywność. Otrzymuje się wtedy ogólne *systemy Steinitza* prowadzące do ogólnej (algebraicznej) teorii wymiaru, użytecznej na przykład w teorii modeli, w rekursywnej algebrze i teorii stabilności. Badania tego rodzaju były prowadzone przez wielu autorów, wymieńmy tu paru z nich: J. T. Baldwin, G. Cherlin, G. Matakides, A. Nerode, J. Remmel, S. Shelah, B. I. Zilber.

§ 2. Schemat Marczewskiego pojęć niezależności.

W roku 1958 Profesor Edward Marczewski zaproponował ogólne pojęcie niezależności, które będę tu nazywał *M–niezależnością*. Pojęcie to wywodzi się z jego wcześniejszych (przedwojennych) badań dotyczących teoriomnogościowej niezależności stosowanej w teorii miary i w probabilistyce, którą sprecyzował on niezależnie od G. Fichtenholza i L. Kantorovitscha w połowie lat trzydziestych. Pojęcie to zdefiniowane dla dowolnej algebry ogólnej daje - przy odpowiedniej specyfikacji rozważanych algebr - wiele znanych pojęć niezależności występujących w różnych działach matematyki, a w szczególności również pojęcie niezależności liniowej. Rozważane pojęcie okazało się bardzo bliskie pojęciu (relatywnej) *wolności*, rozważanego od lat trzydziestych tego stulecia dla algebr ogólnych przez wielu algebraików począwszy od G. Birkhoffa i Ph. Halla.

Niech $\mathfrak{A} = (A; \mathbf{F})$ będzie *algebrą ogólną* (w innych używanych terminologiach - algebrą *uniwersalną* lub *abstrakcyjną*), a $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ zbiorem wszystkich *działań termowych* (lub *algebraicznych* - w terminologii używanej przez Marczewskiego) algebry $\mathfrak{A}$, czyli najmniejszy zbiór działań na zbiorze A, zawierający *działania trywialne* $e_k^{(n)} (k = 1, 2, \ldots, n; n = 1, 2, \ldots)$ i tzw. *działania podstawowe* (ze zbioru $\mathbf{F}$), zamknięty ze względu na *kompozycję* działań. Dalej niech $\mathbf{T}^{(n)}(\mathfrak{A})$ oznacza zbiór wszystkich działań n–arnych (n argumentowych) algebry $\mathfrak{A}$. Niepusty podzbiór X zbioru A nazywa się *M– niezależny* w algebrze $\mathfrak{A} = (A; \mathbf{F})$, gdy

(a) $(\forall n \in \mathbf{N}, n \leq card(X))(\forall f, g \in \mathbf{T}^{(n)}(\mathfrak{A}))(\forall a_1, \ldots, a_n \in X$ parami różnych)

$[f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow (\forall x_1, \ldots, x_n \in A)(f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n))]$.

Łatwo zauważyć, że warunek (a) definiujący niezależność jest równoważny z każdym z następujących warunków (b), (c) i (d):

(b) $(\forall n \in \mathbf{N}, n \leq card(X))(\forall f, g \in \mathbf{T}^{(n)}(\mathfrak{A}))(\forall p \in A^X)(\forall a_1, \ldots, a_n \in X)$
$[f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow f(p(a_1), \ldots, p(a_n)) = g(p(a_1), \ldots, p(a_n))]$,

(c) $(\forall p \in A^X)(\exists \overline{p} \in Hom(< X >_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A}))(\overline{p}\,|_X = p)$,

(d) $< X >_{\mathfrak{A}}$ jest $\mathcal{K}$–wolną algebrą, $\mathcal{K}$–wolnie generowaną przez zbiór X, w rozmaitości $\mathcal{K}$ wyznaczonej przez algebrę $\mathfrak{A}$.

Tak więc w warunku (d) $\mathcal{K} = \mathcal{HISP}(\mathfrak{A})$, ale też za $\mathcal{K}$ można przyjąć klasę złożoną z pojedynczej algebry $\mathfrak{A}$, tj. $\mathcal{K} = \{\mathfrak{A}\}$.

Warto zauważyć, że jeśli C jest podalgebrą algebry $\mathfrak{A} = (A; \mathbf{F})$ i rozważymy nową algebrę $\mathfrak{A}_C = (A; \mathbf{F} \cup \{f_C \mid c \in C\})$, gdzie $f_c(x) = c$ dla dowolnego $x \in A$, to M–niezależność w algebrze $\mathfrak{A}_C$ jest równoważna z tzw. *niezależnością $\mathfrak{B}$–algebraiczną w algebrze $\mathfrak{A}$ nad podalgebrą C* (w sensie książki H. Lausch & W. Nöbauer 1973, str. 58).

Rodzina podzbiorów M–niezależnych algebry $\mathfrak{A}$ będzie oznaczana symbolem $Ind(\mathfrak{A}, M)$. Rodzina ta ma *charakter skończony* (tzn. zbiór $X \in Ind(\mathfrak{A}, M)$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy skończony podzbiór należy do $Ind(\mathfrak{A}, M)$) i jest dziedzina (tzn. $Y \subset X \in Ind(\mathfrak{A}, M) \Rightarrow Y \in Ind(\mathfrak{A}, M)$). Dotychczas otwartym problemem jest scharakteryzowanie tej rodziny. Wydaje się to trudne w całej ogólności (znane są dotychczas pewne warunki konieczne oraz pewne wystarczające), ale interesujące rezultaty można by osiągnąć dla wielu specjalnych klas algebr. Dla wielu klas algebr była badana własność EIS (*wymiany zbiorów niezależnych*). E. Marczewski pokazał, że jeśli X, Y i Z są podzbiorami nośnika A algebry $\mathfrak{A}$ takimi, że $X \cup Y, Z \in Ind(\mathfrak{A}, M)$, $X \cap Y = \emptyset$ oraz $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(Y) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(Z)$, to $X \cup Z \in Ind(\mathfrak{A}, M)$. Dla niektórych algebr (klas algebr) warunek $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(Y) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(Z)$ może zastąpić przez inkluzję $Z \subseteq \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(Y)$. Mówimy wówczas, że dana algebra ma własność EIS. Np. grupy abelowe, algebry Boole'a (i tzw. algebry Posta) zawsze mają tę własność, również każda algebra mająca co najwyżej 6 elementów i dowolna algebra bez stałych algebraicznych (czyli, gdy $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\emptyset) = \emptyset$) oraz dowolna grupa mająca co najwyżej 728 elementów też mają tę własność (ale powyższych liczb w tych rozważaniach nie można powiększyć). W pracy E. Marczewskiego z 1966 r. znaleźć można przegląd rezultatów na ten temat. Niektórym algebrom przysługuje mocniejsza własność JIS (*sumowanie zbiorów niezależnych*). Algebra $\mathfrak{A}$ ma tę własność, gdy dla każdych dwóch M–niezależnych podzbiorów X i Y nośnika tej algebry jeśli $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(X) \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(Y) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(X \cap Y)$, to $X \cup Y \in Ind(\mathfrak{A}, M)$ (por. S. Fajtlowicz & K. Głazek 1967). Grupy abelowe mają tę własność (ogólniej mają też ją tzw. *algebry rozdzielonych zmiennych*). Wspomniana własność nie jest jeszcze dobrze zbadana. M–niezależność jest własnością silniejszą od niezależności ze względu na operator domknięcia zdefiniowany w danej algebrze przez generowanie podalgebr, czyli $Ind(\mathfrak{A}, M) \subseteq \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}\text{–}Ind(A)$. E. Marczewski w 1961 pokazał mocniejszą własność rodziny zbiorów M–niezależnych:

$$(\forall X \in Ind(\mathfrak{A}, M))(X \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\emptyset) = \emptyset) \ \& \\ (\forall Y, Z \subseteq X)(\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(Y) \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(Z) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(Y \cap Z).$$

S. Świerczkowski w 1962 r. pokazał, że jeśli $\mathcal{J}$ jest niepustą i dziedziczną (tj. $Y \subset X \in \mathcal{J} \Rightarrow Y \in \mathcal{J}$) rodziną skończonych podzbiorów zbioru $A (\neq \emptyset)$, to istnieją: obszerniejszy zbiór $B \supset A$ i algebra $\mathfrak{B}$ na nim – takie, że dla wszystkich skończonych podzbiorów X zbioru B zbiór $X \in Ind(\mathfrak{B}, M)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \in \mathcal{J}$. Nie wiadomo jednak, czy już na samym zbiorze A istnieje algebra o rozważanej własności.

Podzbiór B nośnika A algebry $\mathfrak{A} = (A; \mathbf{F})$ nazywa się *M–bazą*, gdy jest M–niezależnym zbiorem generatorów. S. Świerczkowski w 1958 r. pokazał, że jeśli algebra $\mathfrak{A}$ ma nośnik skończony i istnieją w niej n–elementowy zbiór M–niezależny oraz zbiór generatorów składający się z n–elementów, to w $\mathfrak{A}$ każdy n–elementowy zbiór jest M–niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy jest on zbiorem generatorów. Wynika stąd, że każde dwie M–bazy skończonej algebry mają tę samą liczbę elementów. Własność ta przysługuje oczywiście przestrzeniom liniowym (i ogólniej tzw. *v^*–algebrom*). E. Marczewski i Cz. Ryll –Nardzewski wykazali tzw. *twierdzenie o postępie arytmetycznym dla M–baz* (uogólniając pewien rezultat S. Świerczkowskiego z 1958 r., por. E. Marczewski 1961). Pokazali oni mianowicie, że jeśli algebra ma M–bazy różnych mocy, to moce M–baz są skończone i tworzą nieskończony postęp arytmetyczny. Warto dodać, że taka sytuacja jest również znana dla modułów nad nieprzemiennymi ciałami (badaniami tego rodzaju zajmowali się m. in. J. Dieudonné, P. Dubriel, C. J. Everett, W. G. Leawitt, por. też np. L. Rédei 1958). Twierdzenie o postępie arytmetycznym dla M–baz można odwrócić jak wykazał S. Świerczkowski (po częściowych rezultatach A. Goetza i Cz. Rylla–Nardzewskiego) dla dowolnego postępu arytmetycznego istnieje taka algebra ogólna, w której moce M–baz pokrywają się z liczbami tego postępu.

Wydaje się, że twierdzenie o równoliczności baz w matroidzie, twierdzenie interpolacyjne Tarskiego oraz wyżej przytoczone twierdzenie o postępie arytmetycznym dla M–baz mają podobną naturę i powinny wynikać z jakiegoś ogólniejszego faktu.

Badanie algebr ogólnych mających M–bazy różnej mocy prowadzą do ciekawych klas algebr, które mogą być równościowo zdefiniowane (klasy takie były badane wielu autorów, m. in. przez A. A. Akateava, O. V. Belegradka, G. V. Belyanską, D. M. Clarka, J. Dudka, B. Jónssona, A. Kisielewicza, H. J. Keislera, A. I. Mal'tseva, V. P. Matusa, W. Narkiewicza, A. T. Nartazina, A. K. Rumantseva, A. Shafaata, D. M. Smirnova, A. Tarskiego, W. Taylora, M. A. Taytslina). W szczególności A. Kisielewicz pokazał, że jeśli algebra ma M–bazy różnych mocy, to dla każdej liczby naturalnej istnieje w tej algebrze n–arne działanie termowe istotnie zależne od wszystkich swoich argumentów. Nadal nie wiadomo, jaka jest *arność* $\alpha(\mathfrak{A})$ takich algebr, tzn. jakiej arności działania podstawowe wystarczą do zdefiniowania danej algebry z dokładnością do termowej równoważności. Dla algebr posiadających M–bazy można wprowadzić – przez rozważanie endomorfizmów lub homomorfizmów – uogólnione macierze (por. K. Głazek 1979, str. 140; warto nadmienić, że w pracy G. Ricciego z r. 1992 można znaleźć częściową odpowiedź na problem **P 1099** postawiony na wskazanej stronie mojej pracy).

Badanie pewnych numerycznych stałych związanych ze skończonymi algebrami ogólnymi, które wprowadził E. Marczewski w 1962 r., prowadził on wiele interesujących i trudnych problemów natury kombinatorycznej rozważanych głównie przez E. Marczewskiego, S. Świerczkowskiego i K. Urbanika (por. Marczewski 1966). Badania klas algebr, w których niezależność ma własności zbliżone do niezależności liniowej doprowadziło do wyróżnienia interesujących klas algebr jak: v–algebr, v^*–algebr, v^{**}–algebr, algebr o rozdzielonych zmiennych, itp. Znalezione (głównie przez K. Urbanika) twierdzenia reprezentacyjne dla tych klas algebr mają dowody oparte na pewnych wspólnych ideach, więc wydaje się możliwe wspólne uogólnienie tych rezultatów. Warto przypomnieć, że klasa v^{**}–algebr jest zdefiniowana przez równość $Ind(\mathfrak{A}, M) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}\text{-}Ind(A)$ i zawiera podklasę v^*–algebr, dla których zachodzi odpowiednik własności (Ex), co daje kryptomorficzną wersję pojęcia matroidu (nieskończonego).

§3. Niezależność względem rodziny odwzorowań.

W poprzednio przedstawionym schemacie M–niezależności nie udało się zawrzeć niektórych ważnych pojęć niezależności, choćby takich jak: niezależność ze względu na operator domknięcia, niezależność stochastyczną, czy też niezależność w przestrzeniach rzutowych. Z drugiej strony pojawiły się też w literaturze pewne uogólnienia lub warianty rozważanego w poprzednim paragrafie ogólnego schematu. W związku z tym w pracy z 1966 roku Profesor Marczewski zaproponował bardziej uniwersalny schemat (rozwinięty później w pracach: E. Marczewski 1969, K. Głazek 1971).

Niech $\mathfrak{A} = (A; \mathbf{F})$ będzie algebrą ogólną. Dla dowolnego niepustego $X \subset A$ rozważmy następujące rodziny odwzorowań Q_X i $H_X(\mathfrak{A})$ a także rodziny Q i M zdefiniowane w następujący sposób: $Q_X \subseteq A^X$, $Q = \bigcup\{Q_X \mid X \subseteq A\}$, $M = (A) = \bigcup\{A^X \mid X \subseteq A\}$,

$H_X(\mathfrak{A}) = \{p \in A^X \mid (\exists \overline{p} \in Hom(< X >_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A})(\overline{p}\,|_X = p)\}$.

Wówczas podzbiór X nośnika A algebry $\mathfrak{A}$ nazywa się *niezależny ze względu na rodzinę odwzorowań* Q, krótko Q*–niezależnym*, gdy $Q_X \subseteq H_X(\mathfrak{A})$. Definicja ta jest odpowiednikiem warunku (c) dotyczącego M–niezależności i jest ona nadal równoważna modyfikacji warunku (b) z poprzedniego paragrafu, jeżeli zamiast A^X weźmiemy Q_X. Rodzina zbiorów Q–niezależnych algebry $\mathfrak{A}$ będzie oznaczana symbolem $Ind(\mathfrak{A}, Q)$.

Oczywiście przyjmując za Q_X cały zbiór A^X, otrzymujemy poprzednio rozważaną – zdefiniowaną przez E. Marczewskiego w 1958 r. – M–niezależność. Jeżeli za Q_X weźmiemy rodziny odwzorowań $(< X >_{\mathfrak{A}})^X$ lub X^X, to otrzymamy rodzaje niezależności rozważane odpowiednio przez J. Schmidta (w 1962 r.) i przez S. Świerczkowskiego (w 1963 r.). Te rodzaje niezależności będziemy tu nazywać *S–niezależnością* (była ona przez Schmidta nazywana *niezależnością w sobie*) i *S_0–niezależnością.* Rozważanie odwzorowań $p : X \to A$ o następującej własności:

$$(\forall f, g \in \mathbf{T}^{(1)}(\mathfrak{A}))(\forall a \in A)\ [f(a) = g(a) \Rightarrow f(p(a)) = g(p(a))]$$

prowadzi do *G–niezależności* wprowadzonej w równoważny sposób w r. 1967 przez G. Grätzera. W przypadku grup abelowych, dla podzbiorów nie zawierających zera grupy, ten rodzaj niezależności pokrywa się z *niezależnością liniową* rozważaną w teorii tych grup. Ogólniej, dla podzbiorów algebry $\mathfrak{A}$ niezawierających elementów M–samozależnych, G–niezależność pokrywa się z M–niezależnością. Rozważanie odwzorowań różnowartościowych prowadzi z kolei do pojęcia *R–niezależności*, wprowadzonego w mojej pracy doktorskiej (bronionej w 1969 r.).

Dla przestrzeni liniowych (nad dowolnym ciałem) mamy następujące relacje między zdefiniowanymi tu pojęciami: $X \in Ind(\mathfrak{A}, G) \Leftrightarrow X \setminus \{0\} \in Ind(\mathfrak{A}, M), Ind(\mathfrak{A}, M) \cup \{\{0\}\} = Ind(\mathfrak{A}, S) = Ind(\mathfrak{A}, S_0), Ind(\mathfrak{A}, M) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}\text{-}Ind(A) = Ind(\mathfrak{A}, R)$. W r. 1980 wraz z F. Pastijnem zapytaliśmy, czy relacje te już charakteryzują przestrzenie liniowe (z dokładnością do termowej równoważności). Postawiony wtedy problem dotychczas nie został rozwiązany.

Następujące rezultaty pozwalają w tym ogólnym schemacie pomieścić rozmaite pojęcia niezależności:

(i) Niech $(A; \mathfrak{C})$ będzie przestrzenią domknięciową z operatorem domknięcia mającym charakter skończony. Wówczas istnieją algebra ogólna $\mathfrak{A} = (A; \mathbf{F})$ oraz rodzina odwzorowań $Q \subseteq \bigcup\{A^X \mid X \subseteq A\}$ $(= M)$, takie, że

$$\mathfrak{C}\text{–}\ Ind(A) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}} Ind(A) = Ind(\mathfrak{A}, Q).$$

(ii) Niech $\mathfrak{A} = (A; \mathbf{F})$ będzie algebrą ogólną, a rodzina $\mathcal{J}$ podzbiorów zbioru A zawiera wszystkie zbiory M–niezależne w $\mathfrak{A}$ (tj. $Ind(\mathfrak{A}, M) \subseteq \mathcal{J} \subseteq 2^A$). Wówczas istnieje rodzina odwzorowań $Q \subseteq \bigcup\{A^X \mid X \subseteq A\}(= M)$ taka, że

$$\mathcal{J} = Ind(\mathfrak{A}, Q).$$

Pierwszy z tych rezultatów pozwala umiejscowić teorię metroidów w naszej ogólnej teorii. Przez wybranie algebry $\mathfrak{A}$ funkcjonalnie zupełnej (i zastosowanie drugiego z tych rezultatów) praktycznie każdy rodzaj niezależności można zawrzeć w tym ogólnym schemacie niezależności. W szczególności dla ustalonej algebry $\mathfrak{A} = (A; \mathbf{F})$ można znaleźć rodzinę odwzorowań $Q \subseteq \bigcup\{A^X \mid X \subseteq A\}$ taką, że $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}\text{-}Ind(A) = Ind(\mathfrak{A}, Q)$. Zwróćmy jeszcze uwagę na następującą relację: $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq M \Rightarrow Ind(\mathfrak{A}, Q_2)$. w szczególności $Ind(\mathfrak{A}, M) \subseteq Ind(\mathfrak{A}, Q)$ dla dowolnej rodziny odwzorowań $Q \subseteq \bigcup\{A^X \mid X \subseteq A\}(= M)$. Dla ustalonej algebry między rodzinami Q odwzorowań a rodzinami $Ind(\mathfrak{A}, Q)$ zbiorów Q–niezależnych istnieje interesująca odpowiedzialność typu Galois (w sensie O. Ore). Dla rodziny Q można zdefiniować domknięcie $\overline{Q}$ jako największą taką rodzinę zawierającą Q, dla której $Ind(\mathfrak{A}, \overline{Q}) = Ind(\mathfrak{A}, M)$ rodziny Q domknięte (tzn. dla których $Q = \overline{Q}$) tworzą zupełną i atomową algebrę Boole'a (por. K. Głazek 1971). Niech $H(\mathfrak{A}) = \bigcup\{H_X(\mathfrak{A}) \mid X \subseteq A\}$. Zdefiniujemy $Q' = (M \setminus Q) \cup H(\mathfrak{A})$. Posługując się przytoczoną terminologią można uzyskać warunki równoważne z dziedzicznością lub charakterem skończonym rodzin $Ind(\mathfrak{A}, Q)$. Mamy też wówczas następujący związek między charakterem skończonym a dziedzicznością rodzin zbiorów niezależnych względem rodzin odwzorowań Q i $\overline{Q'}$:

(iii) Jeśli rodzina $Ind(\mathfrak{A}, Q)$ jest dziedziczna, to rodzina $Ind(\mathfrak{A}, \overline{Q'})$ ma charakter skończony.

W mojej pracy z 1971 r. podano warunki wystarczające, aby dla Q–niezależności było prawdziwe twierdzenie o postępie arytmetycznym dla Q–baz (tj. dla Q–niezależnych zbiorów generatorów), twierdzenie o wymianie zbiorów Q–niezależnych itd. Zbadano tam ogólne własności Q–niezależności w zależności od doboru rodziny $Q \subseteq M$, oraz uzyskano charakteryzacje różnych rodzajów Q–niezależności dla konkretnych klas algebr. W szczególności zbadano te rodzaje niezależności dla tzw. reduktów regularnych algebr Boole'a. Badania dotyczące niezależności względem rodziny odwzorowań mogą być dalej owocnie kontynuowane, gdyż wyłania się jeszcze wiele ciekawych problemów i dalszych kierunków badań (por. również K. Głazek 1979).

Literatura

1. Baldwin J.T., *First order theories of abstract dependence relations*, Ann. Pure Appl. Logic **26** (1984), 215-244.

2. Baldwin J.T., *Fundamentals of Stability Theory,* Berlin 1988.

3. Birkhoff G., *Lattice Theory,* Providence, RI, 1967.

4. Birkhoff G. and Frink O., *Representations of lattices by sets,* Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 291-316.

5. Cohn P.M., *Universal Algebra* (second ed.), Dordrecht 1981.

6. Dietrich B.L., *Matroids and antimatroids – a survey,* Discrete Math. **78** (1989), 223–237.

7. Edelman P.H. and Jamison R., *Theory of convex geometries,* Geom. Dedicata **19** (1985), 247–274.

8. Fajtlowicz S. and Głazek K., *Independence in separable variable algebras,* Colloq. math. **17** (1967), 221–224.

9. Fajtlowicz S., Głazek K. and Urbanik K., *Separable variable algebras,* Colloq. Math. **15** (1966), 161–171.

10. Fountain J. and Lewin A., *Products of idempotent endomorphisms of an independence algebra of finite rank,* Proc. Edinburgh Math. Soc. (Ser. 2) **35** (1992), 493–500.

11. Fountain J. and Lewin A., *Products of idempotent endomorphisms of an independence algebra of infinite rank,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **114** (1993), 303–319.

12. Gécseg F. and Jürgensen H., *Algebras with dimension,* Algebra Univ. **30** (1993), 422–446.

13. Gécseg F. and Jürgensen H., *Dependence in algebras,* Fund. Inform. **25** (1996), 247–256.

14. Givant S., *Possible cardinalities of irredundant bases for closure systems,* Discrete Math. **12** (1975), 201–204.

15. Gomes G.M.S. and Howie J.M., *Idempotent endomorphisms of an independence algebra of finite rank,* Proc. Edinburgh Math. Soc. **38** (1995), 107–116.

16. Głazek K., *Independence with respect to family of mappings in abstract algebras,* Dissert. Math. **81** (1971), 1–55.

17. Głazek K., *Some old and new problems in the independence theory,* Colloq. Math. **42** (1979), 127–189.

18. Goetz A. and Ryll–Nardzewski Cz., *On bases of abstract algebras,* Bull. Acad. Polon. Sci. (Ser. Sci. Math. Astr. Phys.) **8** (1960), 157-161.

19. Gould V., *Independence algebras,* Algebra Univ. **33** (1995), 294–318.

20. Grätzer G., *On a new notion of indenpendence in universal algebras,* Colloq. Math. **17** (1967), 225–234.

21. Grätzer G., *Universal Algebra* (second ed.), New York 1979.

22. Green T.C. and Tarski A., *The minimum cardinality of equational bases for varieties of groups and rings,* Notices Amer. Math. Soc. **17** (1970), 429–430.

23. Jamison–Waldner R.E., *A perspective on abstract convexity: classifying alignments by varieties,* p. 113–150 in: ,,Convexity and Related Combinatorial Geometry", New York 1982.

24. Kisielewicz A., *On algebras with bases of different cardinalities,* Fund. Math. **133** (1989), 147-154.

25. Korte B., Lovász L. and Schrader R., *Greedoids,* Berlin 1991.

26. Kung J.P.S., *Matroids,* p. 157 – 185 in: ,,Handbook of Algebra", vol. I, Amsterdam 1996.

27. Lausch H. and Nöbauer W., *Algebra of Polynomials,* Amsterdam 1973.

28. Lawler E.L., *Combinatorial Optymization: Networks and Matroids,* New York 1975.

29. Lima L.M., *Nilpotent local automorphisms of an independence algebra,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh (Sect. A) **124** (1992), 423 – 436.

30. Marczewski E., *A general schemaopf the notions of indenpendence in mathematics,* Bull. Acad. Polon. Sci. (Ser. Sci. Math. Astr. Phys.) **6** (1958), 731–738.

31. Marczewski E., *Independence and homomorphisms in abstract algebras,* Fund. Math **48** (1961), 45–61.

32. Marczewski E., *Nombre d'éléments indépendents et nombre d'éléments générateurs dans les algebres abstraites finies,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **59** (1962), 1–10 & 349.

33. Marczewski E., *Independence in abstract algebras. Results and problems,* Colloq. Math. **14** (1966), 169–188.

34. Marczewski E., *Independence with respect to a family of mappings,* Colloq. Math. **22** (1969), 17–21.

35. McNulty G. and Taylor W., *Combinatory interpolation theorem,* Discrete Math. **12** (1975), 193–200.

36. Metakides G. and Nerode A., *Recursion theory on fields and abstract dependence,* J. algebra **65** (1980), 36–59.

37. Novotný J. and Novotný M., *On dependence in Wille's context,* Fund. Inform. **19** (1993), 343–354.

38. Novotný J. and Pawlak Z., *Independence of attributes,* Bull. Polish Acad. (Sci. Math.) **36** (1988), 459–465.

39. Novotný J. and Pawlak Z., *Algebraic theory of independence in information systems,* preprint no. 51 (50 pp.), Mat. Ústav. Čechosl. Akademie Věd 1989.

40. Novotný J. and Pawlak Z., *Algebraic theory of independence in information systems,* Fund. Inform. **14** (1991), 454–476.

41. Oxley J. G., *Matroid Theory,* Oxford 1992.

42. Pawlak Z., *Rough Sets. Theoretical Aspects of Reasoning About Data,* Dordrecht 1991.

43. Recski A, *Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory,* Berlin 1989.

44. Rédei L., *Algebra,* Vol I, Leipzig 1959.

45. Ricci G., *Universal eigenvalue equations, + Errata,* Pure Math. Appl. (Ser. B) **3** (1992), 231–288 & **5** (1994), 241–243.

46. Schmidt J., *Einige algebraische Äquivalente zum Auswahlaxiom,* Fund. Math. **50** (1962), 485–496.

47. Schmidt J., *Über die Rolle der transfiniten Schlussweisen in einer allgemeinen Idealtheorie,* Math. Nachr. **7** (1952), 165–182.

48. Schroeder M.J., *Structure and cardinality of the set of dependence systems on a given set,* J. Combin. Math. Combin. Comput. **15** (1994), 181 - 196.

49. Shelah S., *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models,* Amsterdam 1978.

50. Świerczkowski S., *On independent elements in finitely generated algebras,* Bull. Acad. Polon. Sci. (Ser. Sci. Math. Astr. Phys.) **6** (1958), 749–752.

51. Świerczkowski S., *On isomorphic free algebras,* Fund. Math. **50** (1961) 35–44.

52. Świerczkowski S., *A sufficient condition for independence,* Colloq. Math. **9** (1962), 39–42.

53. Świerczkowski S., *On two numerical constants associated with finite algebras,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **62** (1963), 241–246.

54. Świerczkowski S., *Topologies in free algebras,* Proc, London Math. Soc. (3) **14** (1964), 566-576.

55. Tarski A., *An interpolation theorem for irredundant bases of closure systems,* Discrete Math. **12** (1975), 185–192.

56. Tarski A., *Equational logic and equational theories of algebras,* p. 275–288 in: ,,Contribution to Mathematical Logic", Amsterdam 1968.

57. Urbanik K., *A representation theorem for Marczewski's algebras,* Fund. Math. **48** (1960), 147–167.

58. Urbanik K., *A representation theorem for v^*-algebras,* Fund. Math. **52** (1963), 291–317.

59. Urbanik K., *A representation theorem for two-dimensional v^*-algebras,* Fund. Math. **57** (1965), 215–236.

60. Urbanik K., *Linear independence in abstract algebras,* Colloq. Math. **14** (1966), 233–255.

61. Urbanik K., *On some numerical constants associated with abstract algebras,* Fund. Math. **59** (1966), 263–288.

62. Urbanik K., *On some numerical constants associated with abstract algebras,* II, Fund. Math. **62** (1968), 191–210.

63. van der Waerden B.L., *Moderne Algebra,* (drugie wyd.), Berlin 1937.

64. Welsh D.J.A., *Matriod Theory,* Londyn 1976.

65. Welsh D.J.A., *Matroids and combinatorial optimisation*, p. 323–416 in: ,,Matroid Theory and Its Applications", Naples 1982.