

Joanna GRYGIEL
Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie

Tolerancje w teorii krat

Streszczenie

Celem artykułu jest krótkie zarysowanie problematyki dotyczącej relacji tolerancji w teorii krat. W związku z tym omówione zostało pojęcie kraty oraz pojęcie relacji tolerancji, która może być traktowana jako uogólnienie relacji równoważności. Wskazano również związki tych pojęć z podstawowymi pojęciami algebry uniwersalnej.

Słowa kluczowe: teoria krat, relacja tolerancji, algebra uniwersalna.

Nigdy w historii matematyki żadna teoria nie była przedmiotem tak wściekłych ataków, jak teoria krat. Dedekind, Jónsson, Kurosh, Malcev, Ore, von Neumann, Tarski, a przede wszystkim Garrett Birkhoff wnieśli do matematyki nową wizję, nad którą ciążyła klątwa niezrozumienia, niechęci i czystego uprzedzenia. Ta wrogość zaczęła się w momencie, gdy Dedekind opublikował swoje dwa fundamentalne artykuły, które dobre 100 lat temu powołały do życia teorię krat. Kronecker w jednym ze swoich listów napisał, że ten ostatni zatracił rozum w abstrakcjach (Rota 1997, 1440–1445).

Jednocześnie Gian Carlo Rota pisze w tym samym artykule:

Te wyniki i wiele innych, których nie wspominałem, są spóźnionym spełnieniem wizji Gareta Birkhoffa, którą poznaliśmy z trzech edycji jego słynnej „Lattice Theory” i potwierdzają często powtarzane przez Gelfanda proroctwo, że teoria krat odegra wiodącą rolę w matematyce dwudziestego pierwszego wieku.

Czym są kraty? To struktura dwojakiego rodzaju. Na kratę można patrzeć jako na zbiór uporządkowany bądź jako na strukturę algebraiczną.

Idea porządkowania, klasyfikowania, hierarchizowania obiektów jest drugą – obok zasady abstrakcji – podstawową zasadą metodologiczną. Matematycznie rzecz ujmując, zbiór uporządkowany to zbiór wyposażony w relację porządku, czyli relację zwrotną, antysymetryczną i przechodnią. Jeśli obiekt A jest w takiej relacji z obiektem B, to uznajemy, że A jest mniejszy lub równy B (w sensie tej relacji) i mówimy, że są to elementy porównywalne. Jeśli w danym zbiorze każde dwa obiekty są porównywalne (tak jest na przykład z liczbami naturalnymi i zwykłą relacją $\leq$), to mamy do czynienia ze zbiorem liniowo uporządkowanym, który jest zwany także łańcuchem.

Łańcuchy to szczególny przypadek kraty. Kratą jest bowiem każdy taki uporządkowany zbiór, w którym dla dowolnych dwóch elementów potrafimy ustalić ich kres górny i dolny. Jeśli operacje znajdowania kresów uznamy za działania dwuargumentowe i odpowiednio zaksjomatyzujemy, to możemy dostrzec drugą twarz pojęcia kraty, czyli strukturę algebraiczną o bardzo elementarnych własnościach.

Pojęcie kraty wprowadzili do matematyki pod koniec dziewiętnastego wieku Charles Sanders Peirc i Ernst Schröder przy okazji badań nad algebrami Boole'a. Do podobnych wyników doszedł w tym samym czasie Richard Dedekind, jednak początkowo kraty nie przyciągnęły uwagi matematyków. Dopiero Garrett Birkhoff w swoich pracach z lat trzydziestych dwudziestego wieku (Birkhoff 1934, 115–122) udowodnił znaczenie teorii krat w wielu dziedzinach nauki. Wiąże się to także z dokonaniem w tym czasie odkryciem (m.in. przez Adolfa Lindenbauma i Alfreda Tarskiego), dotyczącym związków między logiką i algebrą abstrakcyjną.

Na X Kongresie Matematycznym w Oslo (1936) jedyny wykład plenarny wygłosił Øysten Ore. Treść tego wykładu w dużej mierze poświęcona była teorii krat, której terminologia nie była jeszcze nawet dobrze wykształcona, ale która, dzięki pracom nie tylko Gareta Birkhoffa, ale również Alfreda Tarskiego i Arthura Stone'a, zaczynała być doceniana i budziła rosnące zainteresowanie.

Jednym z najważniejszych pojęć algebry uniwersalnej, a tym samym teorii krat, są kongruencje. Idea kongruencji wywodzi się od Carla Friedricha Gaussa (Gauss 1801), który po raz pierwszy opisał, wprowadzając odpowiednią notację, kongruencje liczbowe i zauważył, że możemy wykonywać na nich działania podobne do działań na liczbach. Pojęcie to zostało później uogólnione na dowolne struktury algebraiczne jako relacje równoważności zgodne z operacjami danej struktury. Kongruencje okazały się ściśle powiązane z homomorfizmami oraz strukturami ilorazowymi. Co więcej, zbiór wszystkich kongruencji danej struktury algebraicznej tworzy zawsze zupełną kratę algebraiczną, w której porządek jest wyznaczony przez inkluzję (Birkhoff 1935, 433–454). Wiele prac zostało poświęconych badaniom dotyczącym krat kongruencji i ich własności dla rozmaitych typów struktur algebraicznych, w szczególności dla krat.

Pojęcie tolerancji dla struktur algebraicznych jest naturalnym uogólnieniem kongruencji. Jednak wybór takiego właśnie uogólnienia ma znaczenie filozoficzne i wykracza poza świat algebry uniwersalnej.

Jeśli bowiem pominiemy operacje, których możemy dokonywać na zbiorach, to relacja kongruencji staje się zwykłą relacją równoważności, czyli relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią. Zadana relacja równoważności ustala wtedy podział zbioru na klasy abstrakcji, grupujące obiekty identyczne względem ustalonej cechy. Jednak wadą takiego podejścia jest „ostrość” podziału wynikająca z rozłączności klas abstrakcji. W przypadku relacji równoważności każdy obiekt może należeć tylko do jednej klasy abstrakcji, co oznacza, że nie ma mowy o sytuacjach granicznych, które często pojawiają się w rozważaniach praktycznych (jak choćby ma to miejsce w przypadku paradoksu „łysego”).

W rozważaniach logicznych podejmowane były rozmaite próby rozwiązywania tego problemu. Jedną z możliwości jest odrzucenie wymagania przechodniości relacji. Przyjmijmy, że dany obiekt może należeć do więcej niż jednej klasy (bloku), gdy jest „podobny” pod pewnym względem do obiektów jednego rodzaju, jak i do obiektów innego typu, na przykład obiekt szaroniebieski można uznać za przynależący do obiektów szarych, jak również do obiektów niebieskich. Taka relacja jest oczywiście zwrotna i syme-

tryczna, brak jej jednak przechodniości: obiekt szary jest w tym sensie „podobny” do szaroniebieskiego, szaroniebieski jest „podobny” do niebieskiego, ale brak jest podobieństwa kolorystycznego pomiędzy obiektem szarym (np. ciemnoszarym) i obiektem całkowicie niebieskim (np. błękitnym).

Relacja tolerancji (zwana niekiedy podobieństwem symetrycznym) ustala zatem klasyfikację zadanego zbioru obiektów na bloki (np. blok elementów szarych, niebieskich itp.), które mogą mieć niepuste przecięcia (mogą istnieć obiekty należące do wielu bloków równocześnie).

Takie obserwacje zostały już poczynione przez Henri Poincarégo w jego ostatnich pracach (Poincaré 1913), gdzie wprowadził „zbiory wrażeń” do opisywania wrażeń zmysłowych dotyczących obiektów „prawie takich samych”. Niemal 60 lat później brytyjski matematyk, sir Erik Christopher Zeeman, wprowadził formalnie pojęcia relacji tolerancji i przestrzeni tolerancji (Zeeman 1962, 240–256) jako środków służących do badania geometrii postrzegania zmysłowego.

Wkrótce tolerancje, jako użyteczne narzędzie znajdujące zastosowanie w rozmaitych dziedzinach, stały się popularnym tematem badań. Dotyczyło to w szczególności takich obszarów, jak teoria informacji (Pawlak 1983), zbiory przybliżone (Peters 2007, 2609–2629) i zbiory rozmyte (Pawlak 1991), które stosowane są nie tylko w kognitywistyce i badaniach dotyczących sztucznej inteligencji, ale także w lingwistyce (Pogonowski 1981), cyfrowej analizie obrazów (Peters 2009, 239–245) czy medycynie (Henry, Peters 2011, 1–14).

W matematyce tolerancje mają zawężone znaczenie i dotyczą struktur algebraicznych. Obok zwrotności i symetryczności oczekuje się, by były zgodne z podstawowymi działaniami danej struktury algebraicznej. Oznacza to, że gdy mamy do czynienia np. z grupą addytywną, czyli zbiorem wyposażonym w działanie dodawania i odejmowania (np. liczby całkowite), to relacja tolerancji (podobnie, jak relacja kongruencji) musi działać w ten sposób, że rezultaty działań na elementach „podobnych” muszą pozostać „podobne”. Relacje tolerancji znalazły bogate zastosowanie w algebrze uniwersalnej jako naturalne uogólnienie pojęcia kongruencji. Wielu wyników dotyczących tej tematyki dostarczyli między innymi Ivan Chajda, Bohdan Zelinka i Josef Niederle (Chajda 1991).

Okazuje się jednak, że na tolerancje, a w szczególności na tolerancje w teorii krat, gdzie mają wyjątkowo interesujące własności, można patrzeć nie tylko jako na relacje, ale także na wiele innych sposobów. Każda tolerancja w algebrze L jest równocześnie podalgebrą algebry L^2 . Z drugiej strony, tolerancja może być traktowana jako system pokryć o specyficznych własnościach. Badania w tym kierunku prowadzili między innymi Gábor Czédli, Lajos Klukovits (Czédli 1983, 35–38), Georg Grätzer i Henrik Wenzel (Grätzer 1989, 27–34). Takie podejście jest ściśle powiązane z ideą sklejania „atlasów” opisaną przez Alana Daya i Christiana Herrmanna (Day, Herrmann 1988, 85–101) i szeroko wykorzystywaną przez Bernharda Gantera i Rudolfa Willego (Ganter, Wille 1999) przy analizie krat konceptów. Ponieważ każda krata zupełna jest izomorficzna z pewną kratą konceptów, więc relacje tolerancji w kratach zupełnych mogą być utożsamiane z tzw. relacjami blokowymi w kratach konceptów.

Gábor Czédli wraz z Georgem Grätzerem udowodnili, że w przypadku krat każda relacja tolerancji może być traktowana jako homomorficzny obraz pewnej kongruencji (Czédli, Grätzer 2011, 5–6). Badania dotyczące typów struktur algebraicznych, które posiadają taką własność, są nadal prowadzone (Czédli, Kiss 2013, 326–338).

W kratkach o skończonej wysokości zachodzi także interesująca odpowiedniość pomiędzy pojęciem tolerancji i pojęciem koneksji Galois (zwanej także polarnością) (Hobby, McKenzie 1996). Tolerancje są również szeroko wykorzystywane w teorii komutatorów (Kearnes 2013).

Wszystko to dowodzi, jak potężnym narzędziem stały się tolerancje w teorii krat i nie tylko tam.

Bibliografia

- Birkhoff G. (1934). *Applications of lattice algebra*, „Proceedings of the Cambridge Philosophical Society” 30, 115–122.
- Birkhoff G. (1935). *On the structure of abstract algebras*, „Proceedings of the Cambridge Philosophical Society” 31, 433–454.
- Chajda I. (1991). *Algebraic Theory of Tolerance Relations*, University Palackého Olomouc, Olomouc.
- Czédli G., Grätzer G. (2011). *Lattice tolerances and congruences*, „Algebra Universalis” 66, 5–6.
- Czédli G., Kiss E.W. (2013). *Varieties whose tolerances are homomorphic images of their congruences*, „Bulletin of the Australian Mathematical Society” 87, 326–338. <http://dx.doi.org/10.1017/S0004972712000603>.
- Czédli G., Klukovits L. (1983). *A note on tolerances of idempotent algebras*, „Glasnik Matematički” (Zagreb), 18 (38), 35–38.
- Day A., Herrmann Ch. (1988). *Gluings of modular lattices*, „Order” 5, 85–101.
- Ganter B., Wille R. (1999). *Formal concept analysis*, „Mathematical Foundations”, Springer-Verlag.
- Gauss C.F. (1801). *Disquisitiones Arithmeticae*.
- Grätzer G., Wenzel G.H. (1989). *Tolerances, covering systems, and the axiom of choice*. „Archivum Mathematicum”, vol. 25, issue 1, 27–34.
- Henry C., Peters J.F. (2011). *Arthritic hand-finger movement similarity measurements: Tolerance near set approach*, „Computational and Mathematical Methods in Medicine”, 1–14. <http://dx.doi.org/10.1155/2011/569898>.
- Hobby D.; McKenzie R. (1996). *The structure of finite algebras*, American Mathematical Society.
- Kearnes K. (2013). *The shape of congruence lattices*, „Memoirs of the American Mathematical Society”, vol. 222, nr 1046.
- Pawlak Z. (1983). *Systemy informacyjne. Podstawy teoretyczne*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- Pawlak Z. (1991). *Rough Sets. Theoretical Aspects of Reasoning about Data*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Peters J.F. (2007). *Near sets. General theory about nearness of objects*. „Applied Mathematical Sciences”, 1 (53): 2609–2629.
- Peters J.F. (2009). *Tolerance near sets and image correspondence*. „International Journal of Bio-Inspired Computation”, 1 (4), 239–245. <http://dx.doi.org/10.1504/ij-bic.2009.024722>.

- Pogonowski J. (1981). *Tolerance spaces with applications to linguistics*, Poznań, UAM.
- Poincaré J.H. (1913). *Dernieres pensées*, trans. by J.W. Bolduc as *Mathematics and science: Last essays*. Paris & NY: Flammarion and Kessinger.
- Rota G.C. (1997). *The many lives of Lattice Theory*, „Notices of the AMS”, vol. 44(11), 1440–1445, tłumaczenie własne.
- Zeeman E.C. (1962). *The topology of the brain and visual perception*, [in:] Fort Jr. M.K., *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, University of Georgia Institute Conference Proceedings (1962):

Tolerance relations in lattices

Summary

The aim of the paper is to present a brief outline of the issues related to the tolerance relation in lattice theory. Therefore, the concept of lattice and the concept of tolerance relation, which can be treated as generalization of equivalence relations, are discussed. Also indicated are the main connections between these concepts and the basic concepts of universal algebra.

Keywords: lattice theory, tolerance relation, universal algebra.