PHILOSOPHICAL DISCOURSES
Prace Naukowe Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego im. Jana Długosza w Częstochowie
2021, t. III, s. 127–139

http://dx.doi.org/10.16926/pd.2021.03.09

Ryszard MISZCZYŃSKI
https://orcid.org/0000-0001-7195-9022
Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy im. Jana Długosza w Częstochowie

Stanisława Leśniewskiego rozumienie roli formalnego języka matematyki*

Streszczenie

Formalizm używany przez Leśniewskiego do prezentacji matematycznej teorii nazywany jest radykalnym. Według autora jest on realizacją postulatów tzw. formalnych arytmetyków. Matematyczna teoria jest prezentowana jako czysta gra formuł pozbawionych treści. Kierowana jest precyzyjnymi regułami opisanymi w metajęzyku. Autor podkreśla różnicę między podejściem Leśniewskiego a Hilberta.

Słowa kluczowe: Stanisław Leśniewski, podstawy matematyki, intuicyjny formalizm, radykalny formalizm, gra napisami, metamatematyka.

Stanisław Leśniewski uważany jest za jednego z najważniejszych filozofów i logików początku XX wieku. Jego poglądy na matematykę określane są mianem „intuicyjnego formalizmu”: matematyka polega na przedstawianiu intuicyjnych treści za pomocą formalnego języka. Oba słowa występujące w nazwie stanowiska nie określają jego równorzędnych składowych. Dominuje znaczenie intuicyjnych treści, które uczony powinien wyrazić za pomocą formalnego języka. Mimo znaczenia tej podstawowej – dla Leśniewskiego – zdolności poznania matematycznego nie podejmuję się zdefiniowania jej. Uczony rozumiał ją szeroko, odwoływał się do bardzo różnych rodzajów intuicji (np. zmysłowej, zdrowego rozsądku itp.)[1].

---

* Artykuł jest nieco zmienioną wersją mojego anglojęzycznego tekstu *Stanisław Leśniewski's radical formalism*, który ukazał się w „Вісник Дніпропетровського університету. Серія «ІФНІТ»” 25/2017, 14–23.

[1] Z kłopotów z jednoznaczną charakterystyką intuicji, do której odwoływał się Leśniewski, żartował sobie już Kazimierz Twardowski (Jadczak 1993, 35).

Deklarowany „formalizm" stanowi ważną, ale podrzędną składową. Jego charakterystykę Leśniewski uzupełnił dodatkowym określeniem wskazującym w zasadzie na konieczność pełnej eliminacji treściowego wymiaru języka matematyki. „Ja jestem zwolennikiem raczej radykalnego «formalizmu» w konstrukcji mojego systemu, nawet chociaż jestem upartym «intuicjonistą»" (Leśniewski 2015/1929: 566/78)[2]. Intuicyjna teoria matematyczna powinna być tak sformalizowana, aby używany język matematyki w zasadzie był wykorzystywany, jakby został pozbawiony jakiejkolwiek treści, stał się czystą grą napisów.

Aby lepiej unaocznić projekt formalizmu Leśniewskiego, najpierw zwrócę uwagę na poglądy tzw. radykalnych formalistów, którzy – jak sądzę – sformułowali wzór, do realizacji którego zmierzał Leśniewski. Polski uczony w swych publikacjach nigdzie nie odwoływał się do poglądów tych twórców, ale znał je jako uważny czytelnik *Grundgesetze der Arithmetik (*Frege 1893, 1903). Dzieło Fregego – jak podkreślał – stanowiło nawet dla niego niedościgły wzór ścisłości[3] (Leśniewski 2015/1927, 297/166). W drugim tomie wspominanej pracy są przedstawione poglądy Carla Johannesa Thomae i Heinricha Eduarda Heine, a następnie poddane zdecydowanej krytyce (Frege 1903, 96–133). Ich istotę najłatwiej dostrzec w wykorzystywanym przez pierwszego z wymienionych wyżej formalistów obrazie matematyki jako gry w szachy[4]. Praca uczonego przypomina sztukę przekształcania pewnych zapisanych na wstępie formuł matematycznych. Wykonuje się ją w sposób opisany przez reguły teorii. Wyjściowy układ figur odpowiada aksjomatom. Każde kolejna teza jest nową.

Celem krytykowanego przez Fregego formalizmu miało być oczyszczenie języka nauki z różnych filozoficznych treści dołączających się do czysto naukowego komunikatu. Uczeni chcieli usunąć niepotrzebne dodatki poza naukę. Dzięki temu wyeliminować np. spory o istnienie lub nieistnienie obiektów matematycznych. W szachach figura nie wskazuje na nic innego, a jedynie na samą siebie. Można jej jedynie przypisać pewne własności (np. sposób poruszania się) wyznaczone przez reguły kierujące grą. Podobnie z symbolami[5] matematycznymi. Uczony zna zasady pisania komunikatów matematycznych. Korzysta z reguł syntaktycznych obowiązujących przy zestawianiu różnych znaków. Wie np., że symbolem „1" można zastąpić wyrażenie „3 : 3" oraz to, że po symbolu

---

2 W opisie bibliograficznym prac Leśniewskiego odwołuję się do wydanych przez Jacka Jadackiego *Pism zebranych* (Leśniewski 2015). Aby wyraźniej określić przywoływane źródło, po roku wydania *Dzieł* podaję rok powstania pierwotnej publikacji. Podobnie: po stronie określającej miejsce w *Dziełach* podaję numer wykorzystywanej strony z reprodukowanej publikacji.

3 Oczywiście Leśniewski bardzo dobrze wiedział o jej brakach ujawnionych w sławnym liście Russella. Można nawet patrzeć na jego dojrzałą twórczość jako na sposób poradzenia sobie z antynomią.

4 Ograniczam się do bardzo powierzchownego streszczenia ich poglądów. Pomijam subtelne analizy Fregego.

5 Używam słów „symbol", „znak", „napis" niezgodnie z semiotyczną tradycją. Traktuję je jako pewne materialne obiekty (np. ślady tuszu na kartce papieru) badane przez fizyka.

dowolnej liczby, po którym następują dwie kropki umieszczone jedna nad drugą i symbol „1”, można napisać dwie równoległe poziome kreseczki i po nich jeszcze raz ów symbol (np. „3 : 1 = 3”). Tzw. wiedza matematyczna nie odnosi się do reprezentowanych przez używane znaki (np. „1”) jakichś trudnych do bliższego określenia liczb czy innych obiektów, a jest jedynie umiejętnością odpowiedniego ustawiania tych graficznych znaków, takiego przestawiania ich, które prowadzi do zastąpienia jednej konfiguracji napisów inną.

Frege zdecydowanie odrzucił powyższe poglądy. Taką empiryczną interpretację matematyki uznał za naiwną. Zdecydowanie zanegował ją i opowiedział się za podejściem treściowym. Chociaż sam projekt nie miał charakteru zakończonego opracowania, skrytykował autorów także za niewykonanie odpowiedniej rekonstrukcji: nie podali bowiem odpowiedniego kompletu reguł, które mają rządzić taką matematyczną grą.

Leśniewski także nie zgadzał się z zaproponowanym przez formalistów rozumieniem matematyki. Prowadziło m.in. do negacji roli intuicyjnych treści, a przecież to one – jak uważał – stanowią istotę matematyki.

Jeśli przyjmuje się intuicję za podstawę, to realizacja normy komunikowalności i sprawdzalności wymaga jakiejś możliwości przedstawienia (eksterioryzacji) rozumowania. Tę konieczną funkcję wypełnia język. Za najlepszy sposób komunikowania intuicyjnych treści Leśniewski uznał metodę radykalnej formalizacji (Leśniewski 2015/1929, 566/78): korzystania z formalnego języka poddanego bardzo ściśle sformułowanym prawom. Wykorzystywana przez Polaka gra napisami przestała być jednak traktowana jako matematyka i wróciła na tradycyjną pozycję gry językowej.

Do podobnego używania napisów zachęcał już John Stuart Mill w drugim tomie swego głośnego *Systemu logiki* (Mill 1962). Zwracał uwagę na metodę traktowania w nauce (matematyce) pewnych widzialnych znaków jako liczmanów, operowania nimi w sposób czysto formalny (techniczny). Z drugiej jednak strony zgodnie z tradycyjnym podejściem zdawał sobie sprawę z tego, że stanowią one elementy języka i przedstawiają pewien myślowy proces. Przekształcenia dokonywane na napisach charakteryzował następująco: „każda z tych operacji odpowiada sylogizmowi; reprezentuje ona pewien krok w rozumowaniu, który odnosi się nie do symbolów, lecz do rzeczy przez nie oznaczonych” (Mill 1962, 341–342). Wbrew formalnym arytmetykom uważał, że gry napisami nie trzeba traktować jako rzeczywistego matematycznego rozumowania, ale można patrzeć na nią jako na materialny wyraz rozumowania dotyczącego pewnych intuicyjnych treści. Podkreślał: (340) „język należy budować na możliwie jak najbardziej mechanicznych zasadach” (Mill 1962, 340). Najlepszą jest sytuacja, gdy symbole wykorzystuje się, „nie mając świadomości znaczenia, a mając tylko świadomość, że używamy pewnych widzialnych czy też słyszalnych znaków zgodnie z regułami technicznymi, uprzednio ustalonymi” (tamże, 341). Puste znaki graficzne mają tylko konwencjonalne własności wyraźnie przypisane im przez odpowiednie zapisy. „Nie ma więc tutaj nic takiego, co by mogło odciągać umysł od pewnego zbioru operacji mechanicznych, jakich należy dokonywać na symbolach" (tamże). Powtórzę jeszcze raz: uwagi Milla uzasadniają pomysł przeniesienia nieakceptowanej przez Leśniewskiego formalistycznej gry matematycznej do sfery materialnych obiektów językowych. W nowej sytuacji na podporządkowaną odpowiednim regułom grę napisami należy patrzeć jak na wyraz przekształceń pewnych intuicyjnych treści.

Gra rozpoczyna się od początkowego ustawienia figur: określonego zestawu napisów (może być jeden) stanowiących pewien układ symboli graficznych. Podobnie jak figurom szachowym nie przypisuje się im żadnej treści. Są tylko grafikami o określonych kształtach. Będą przekształcane za pomocą tylko tych operacji, które są wyraźnie dopuszczone i scharakteryzowane przez reguły gry (dyrektywy teorii).

Przedstawione powyżej opisy Milla w zasadzie zachęcają do językowego wykorzystania projektu formalnych arytmetyków. Takie podejście oczywiście mocno różniło się od stanowiska wymienianych arytmetyków.

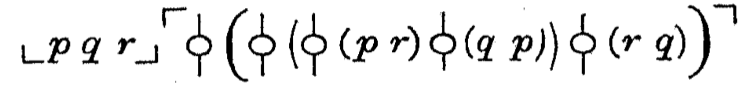
Odpowiedniość obu sfer, o której Leśniewski nigdy wyraźnie nie wypowiadał się, zapewnia reprezentację intuicyjnemu rozumowaniu i – dzięki temu – umożliwia kontrolę intuicyjnego procesu: zarówno ze strony podmiotu, jak i odbiorcy wypowiedzi. Tej odpowiedniości między mechanicznymi operacjami przekształcającymi wyrażenia i myślowym procesem Leśniewski przeciwstawia sytuację, w której podmiot wykracza poza ustalone wcześniej techniki. Wykonuje operacje, które uzasadnia przez odwoływanie się do intuicyjnych treści. Takie nadzwyczajne procedury, które nie miały wcześniej przewidzianej reprezentacji, Leśniewski określał jako oparte na „intuicjonistycznej" podstawie różnych logicznych tajemnic (Leśniewski 2015/1929, 566/78). W teorii sformalizowanej są one oczywiście niemożliwe. To sprawia, że autor teorii w pewien specyficzny sposób panuje nad nią: nie tylko jest efektem jego pracy, ale została podporządkowana jego świadomym żądaniom. On określił zestaw początkowych aksjomatów i dopuszczalne sposoby rozumowania, a przez to wyznaczył także zakres możliwych rezultatów. Charakterystyka teorii za pomocą takich wzajemnie dopasowanych składowych stanowiła podstawę odróżnienia kilku wersji jego uogólnionego rachunku zdań Leśniewskiego. Podkreślam to, ponieważ – jak wiadomo – brak harmonii między używanymi metodami transformacji i przyjętymi aksjomatami jest częstym źródłem antynomii. Według Leśniewskiego intuicja stanowi podstawę zapobieżenia im. Jak twierdzi, na tym źródle oparte są formalne podstawy konstruowanych przez niego teorii (por. Leśniewski 2015/1927, 308–311/177–180).

Zadania przedstawienia matematyki w postaci sformalizowanej gry Leśniewski podjął się w swoich ważnych tekstach: w opublikowanym w 1929 roku: *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik* (Leśniewski 2015/1929) oraz w jego drugiej części *Grundzüge eines neuen Systems der*

Grundlagen der Mathematik, §12 (Leśniewski 2015/1938a); rok po pierwszej części *Grundzüge* został przedstawiony *Über die Grundlagen der Ontologie (*Leśniewski 2015/1930). W *Grundzüge* znajdujemy charakterystykę prototetyki (uogólnionego rachunku zdań z kwantyfikatorami) podstawowej teorii logicznej Leśniewskiego, opisy jej kolejnych wersji od $Ϭ_1$ do $Ϭ_5$ różniących się aksjomatami, terminami pierwotnymi i obowiązującymi w nich dyrektywami. Istotne miejsce zajmuje bardzo dokładna charakterystyka procedury formalizacyjnej dla najbogatszej i najlepiej rozwiniętej teorii $Ϭ_5$ (Leśniewski 2015/1929, 547–566/59–78). Druga część *Grundzüge* to ostatni §12. Zawiera przykład sformalizowanej teorii $Ϭ_5$. Powstał razem z pierwszą częścią artykułu. Został jednak wydrukowany dopiero w 1938 roku. Cały nakład tego pisma spłonął w pierwszych dniach II wojny światowej. Tekst Leśniewskiego nie uległ jednak całkowitemu zniszczeniu dzięki zachowaniu się kilku odbitek artykułu. W tekście *Über die Grundlagen* została przedstawiona procedura formalizacyjna dla kolejnej należącej do systemu teorii logicznej – ontologii (rachunku nazw). Ponieważ jest rozwijana w oparciu o odpowiednio rozbudowaną prototetykę, Leśniewski ograniczył się do przedstawienia dodatkowych procedur, które pozwolą skonstruowaną wcześniej teorię przekształcić w nową, logicznie późniejszą.

Obie wymienione wyżej prace dotyczą problemów formalizacji prototetyki i ontologii. System podstaw matematyki oprócz nich obejmuje jeszcze mereologię. Chociaż autor *Grundzüge* wielokrotnie wspominał o projekcie podobnego ujęcia ostatniej teorii (Leśniewski 2015/1929, 556–557/68–69, 566–567/78–79), jednak nigdy nie zostało ono opublikowane.

W dalszej części artykułu chcę krótko naszkicować zaprezentowaną w *Grundzüge* metodę formalizacyjną polskiego logika. Teoretyczne zasady budowy języka formalnego można odczytać z szeregu tez, za pomocą których Leśniewski zdefiniował terminy niezbędne do sformułowania dyrektyw teorii. Każda z nich to tzw. terminologiczne wyjaśnienie (*Terminologische Erklärung* – T.E.). Za pomocą szeregu takich wypowiedzi definiowane są metajęzykowe terminy pozwalające określić sposób budowy teorii. Punktem wyjścia do konstrukcji tego metajęzyka i jednocześnie początkowym zespołem słów języka teorii jest napisany na tablicy aksjomat A_1[6] teorii (Leśniewski 2015/1929, 521/33). W wyjaśnieniu specyfiki metody formalizacyjnej Leśniewskiego wybór aksjomatu(-ów) ich ilość nie odgrywa istotnej roli.

A1. 

W procedurze formalizacyjnej ów napis traktowany jest w czysto fizykalny sposób jako uporządkowany zgodnie z europejskim sposobem pisania ciąg na-

[6] Jak łatwo zauważyć, Leśniewski wykorzystuje własne znaki, różne od powszechnie używanych. W tradycyjnej notacji aksjomat ten można przedstawić następująco: $\forall p,q,r\{[(p\equiv r) \equiv (q\equiv p)] \equiv (r\equiv q)\}$.

stępujących po sobie łatwych do zidentyfikowania bezsensownych znaków graficznych. Charakteryzują się określonymi kształtami. Odpowiada początkowemu ustawienie figur na szachownicy. Uczony w zasadzie będzie zajmował się przestawianiem figur stosownie do zapisanych reguł. Każde kolejne ustawienie zostaje zapamiętane. Reguły gry określają możliwość nowej konfiguracji ze względu na dotychczasowe układy. Odpowiadające im dyrektywy wymagają znajomości konfiguracji niezbędnej do wprowadzenia nowej tezy. Korzystają wyłącznie z fizykalnych własności napisów: ich kształtów i przestrzennych relacji między nimi. Reguły (dyrektywy definiowania) określają także możliwość dołączania zupełnie nowych przedmiotów, które będą używanych w grze.

Według Leśniewskiego grą prototetyczną kierują następujące dyrektywy: definiowania, rozdziału kwantyfikatora, odrywania, podstawiania, ekstensjonalności[7]. Są to instrukcje określające dopuszczalny kształt kolejnego napisu i niezbędne warunki dołączenia go jako kolejnego. Jak łatwo się domyśleć, zapisanie instrukcji łączy się z pewnymi kłopotami[8]. Nie można ich zapisać w formalnym języku teorii. Nie są bowiem zdaniami logicznymi. Z tego punktu widzenia nie mogą być wyrażone tylko za pomocą języka budowanego rachunku logicznego[9].

Jak wspominałem, sformułowanie dyrektyw zostało poprzedzone budową metajęzyka, za pomocą którego będzie m.in. można mówić o znakach tworzących język teorii. Zwykle podczas zajęć ze studentami uczony poświęcał tym wyjaśnieniom (T.E.) wiele czasu. W *Grundzüge*, aby były one precyzyjne i nie zajęty zbyt wiele miejsca, sformułowane zostały w oparciu o symbolikę, którą Alfred North Whitehead i Bertrand Russell posługiwali się w *Principia Mathematica*.

Początek konstrukcji metajęzyka odbywał się na poziomie propedeutycznym. Polegał na wyliczeniu 22 terminów o znaczeniu intuicyjnym. Można je wykorzystać w dalszych definicjach niezbędnych dla sformułowania dyrektyw[10]. Nie będę ich wszystkich wyliczał. Przedstawię tylko kilka podstawowych (Leśniewski 2015/1929, 548–551/60–63): „Aεb” – „A jest jednym z b”; Id(A) – „ten sam obiekt co A”; „a∩b∩…∩k” – „obiekt, który jest jednocześnie a i b, i…, i k”; „vrb” – „słowo”; „expr” – „wyrażenie”; „prnt” – „nawias”; „cnf(A)” – „wyrażenie równokształtne z A”; „A_1” – „aksjomat A_1”; „thp” – „teza systemu prototetyki”; „ingr(A)” – „należący do A”; „1ingr(A)” – „pierwsze słowo należące do A”.

7 W ontologii jest nieco większa ilość dyrektyw: w definiowaniu i ekstensjonalności znajdują się dwa rodzaje reguł.

8 Pod wpływem Lewisa Carrolla w 1903 roku na pewne kłopoty z poprawnym wypowiedzeniem reguł zwracał uwagę Russell (2010, 36). Wskazywały na nie także analizy Fregego z 1903 roku.

9 W szkole lwowsko-warszawskiej używano określenia „reguły mówione”. Mówiąc o regułach kierujących rachunkiem zdań, Kotarbiński wyjaśniał: „nie dają się wtłoczyć w symbolikę rachunku zdań” (1990, 180).

10 Wykorzystywanie takiego propedeutycznego poziomu przypomina nieco podejmowaną przez Fregego procedurę rozjaśniania (Erläuterung, Elucidations) (Hallett 2010, 434). Nie sądzę jednak, aby należało jej przypisać, jak u Fregego, zadanie charakteryzowania czegoś niedefiniowalnego, nieanalizowanego (Bessler, 148).

W niektórych przypadkach Leśniewski podał dodatkowe wyjaśnienia uściślające ich potoczne znaczenie. Specyficzny charakter mają symbole „Aεb”, „ingr(A)”, których rozumienie przede wszystkim zostało ukształtowane na wykładach Leśniewskiego z ontologii i mereologii.

Zwrócę jeszcze uwagę na ciekawy i charakterystyczny dla przedstawianego tutaj podejścia Leśniewskiego symbol „cnf(A)”. Wprowadzenie go jest koniecznym następstwem fizykalizmu właściwego radykalnemu formalizmowi. Znaki graficzne wchodzące w skład aksjomatu A_1 są jedynie pewnymi krzywymi powstałymi z rozłożenia tuszu na kartce papieru. Np. znajdująca się na drugim i trzynastym miejscu w A_1 literka „p” nie jest tym samym materialnym przedmiotem, ale dwoma różnymi indywiduami (bo są to obiekty zajmujące inne miejsce w przestrzeni). Mają podobne kształty, ale nie są identyczne.

Odróżnienie wynikające z fizykalizmu Leśniewskiego jest naturalne. Zupełnie podobnie postąpił np. Nelson Goodmann, wprowadzając w pracy *Struktura zjawiska* termin „replika” (Goodmann 2009, 415). Zdziwienie rozwiązaniem – jak łatwo zauważyć – jest wynikiem przyzwyczajenia do platońskich supozycji przenoszonych w języku matematyki tradycyjnej. Utożsamia się równokształtne znaki, ponieważ wskazują na ten sam platoński obiekt. Z tego powodu podczas przedstawiania rozważań matematycznych, w których rezygnujemy z tych dodatkowych założeń ontologicznych, należy zachować ostrożność, używając tradycyjnego języka i związanych z nim przyzwyczajeń.

Wyjaśnienia Leśniewskiego dotyczące konieczności wprowadzenia omawianego symbolu opierają się na §99 rozważań Fregego (1903, 107) nad poglądami radykalnych formalistów. Zwracam na to uwagę, aby wskazać kolejne źródła mojego przekonania o wpływie wiedzy o ich poglądach na kształtowanie się formalistycznej składowej stanowiska polskiego uczonego.

Nie będę przedstawiał wszystkich kolejnych T.E. Na przykładzie kilku pierwszych wyjaśnień pokażę, jak Leśniewski fizykalistycznie charakteryzował początkowe terminy. Pierwsze cztery T.E. opisują znaki, które określają początek i koniec kwantyfikatora oraz początek i koniec jego zasięgu.

> *Terminologische Erklärung* 1. [A]: Aεvrb.1.=.Aεcnf(1ingr(A_1))
> (Leśniewski 2015/1929, 551/63)

Powyższa formuła opisuje symbol otwierający kwantyfikator: nazwany jest „vrb.1”. Jest nim każde wyrażenie równokształtne z pierwszym słowem należącym do A1. Kolejne wyjaśnienia II–IV wskażą na piąte słowo aksjomatu A1 (zamyka kwantyfikator), szóste (otwiera zasięg kwantyfikatora) i ostatnie (zamyka zasięg kwantyfikatora).

Wyjaśnienie VII wprowadza złożenie przedmiotów a (Cmpl(a)). Pozwala ono opisywać wyrażenia teorii za pomocą terminu będącego odpowiednikiem klasy kolektywnej przedmiotów a, tj. podstawowej kategorii intuicyjnej mereologii. Kolejne definicje charakteryzują wyrażenia: kwantyfikator, zmienna, wyrażenie nawiasowe, funkcja, argument, podobieństwo wyrażeń nawiasowych itd. W T.E. XXXIV pojawia się wyrażenie kategoria semantyczna. Jak można domyślać się, podejście specyficzne dla radykalnego formalizmu także tutaj będzie wykorzystywać podobieństwo kształtu wyrażeń, a nie sięgać do znaczeń, które stanowiły podstawowy obiekt zainteresowań Husserla, od którego Leśniewski zaczerpnął pomysł (por. Miszczyński 2016).

Podkreślane wyżej traktowanie wyrażeń języka teorii jako czysto materialnych obiektów pozbawionych treści nie oznacza oczywiście rezygnacji z wielokrotnie deklarowanego stanowiska intuicjonistycznego. To jest jedynie pewna technika prezentacji teorii oraz narzędzie do jej kontroli. Z tego powodu Leśniewski, kończąc opis swej metody formalizacyjnej dodał, że pod wpływem takiej formalizacji teorie nie przestają się składać z sensownych i intuicyjnie ważnych twierdzeń (Leśniewski 2015/1929, 566/78).

Nie będę kontynuował opisu przeprowadzonej formalizacji. Powszechnie podkreśla się jej precyzję i zwraca uwagę na bardzo poważne potraktowanie procedury definiowania, która u większości autorów nie znajduje odpowiedniego zainteresowania. Sam Leśniewski także był zadowolony z dzieła: podkreślał przewagę swej pracy nad innymi znanymi mu formalizacjami podstaw matematyki (od czasów Fregego aż po metamatematyków ze szkoły Hilberta) (Leśniewski 2015/1929, 567/79), które powinny spełniać elementarne wymagania: niesprzeczności, ograniczonej restrykcyjności (pozwalających otrzymać wszystkie niezbędne twierdzenia) i niebudzących wątpliwości interpretacyjnych. Niestety, nie ustosunkował się wyraźnie do osiągnięć Hilberta. Podkreślał, że powstrzyma się od uwag krytycznych aż do pojawienia się zapowiedzianej przez niemieckiego uczonego syntezy wyników jego metamatematycznej szkoły. Stanowić ją miały pisane wspólnie z Paulem Bernaysem *Grundlagen der Mathematik* (pierwszy tom ukazał się w1934 roku, drugi pięć lat później). Mimo zapowiedzi Leśniewski jednak w żadnej z drukowanych prac nie wyraził zapowiadanej oceny. Jako przykłady nieprecyzyjnych formalizacji wskazywał prace Leona Chwistka (Leśniewski 2015/1929, 567-568/79-80) i Johna von Neumanna (tamże, 568-560/80-81)[11]. Zarzucał im istotną wadę: pokazywał sposoby skonstruowania w nich sprzeczności.

Artykuł opublikowany w 1930 roku poświęcony został formalizacji ontologii. W paragrafie 12 opublikowanych rok wcześniej *Grundzüge*[12] rzeczywiście została przeprowadzona opisana wyżej procedura w stosunku do prototetyki.

[11] Ciekawie przebiegała dyskusja nad sprzecznością w systemie węgierskiego formalisty. Leśniewski zarzucił mu niejasne sformułowanie reguł i pokazał możliwość budowy sprzeczności, mimo rzekomego dowodu pokazującego niesprzeczności nieco osłabionego systemu. Von Neumann odpowiedział w 1931 roku, wprowadził pewne zmiany, uznał jednak krytykę za niemerytoryczną. Leśniewski jeszcze raz powrócił do polemiki w 1938 roku (Leśniewski 2015/1938, 612-625/43-56): zarzucił von Neumannowi błędne rozumienie słowa „znak" i skonstruował kolejną sprzeczność.

[12] O kłopotach z rzeczywistą możliwością przestudiowania jej wspominałem wcześniej.

Projekt formalizacji ontologii z tekstu z 1930 roku ma charakter czysto potencjalny (Leśniewski 2015/1930, 726/113). Przedstawione zostały: jedyny aksjomat ontologii (charakteryzujący słynny „ε” Leśniewskiego), nowy zespół dyrektyw oraz związane z nimi nowe T.E. umożliwiające formalizację. Stanie się pełnym tekstem dopiero po odpowiednim połączeniu go z projektem z paragrafu 11. Rzeczywistą możliwość realizacji otrzyma jednak dopiero po wydrukowaniu paragrafu 12.

$$\textit{Axiom 0.}\ \llcorner A\ a \lrcorner\ \phi\Big(\varepsilon\{A\ a\}\ \text{⫯}\Big(\vdash\big(\llcorner B\lrcorner \ulcorner \vdash(\varepsilon\{B\ A\})\urcorner\big)\llcorner B\ C\lrcorner \ulcorner \phi\!\!-\big(\text{⫯}(\varepsilon\{B\ A\}\varepsilon\{C\ A\})\varepsilon\{B\ C\}\big)\urcorner \llcorner B\lrcorner \ulcorner \phi\!\!-\big(\varepsilon\{B\ A\}\varepsilon\{B\ a\}\big)\urcorner\Big)\Big)\urcorner$$ [13]

Ontologia opiera się na prototetyce. Nominalistyczne stanowisko Leśniewskiego wymaga do jej budowy odpowiednio rozwiniętej podstawowej teorii, tj. zespołu rzeczywiście wypisanych tez, które były dodawane stosownie do jej dyrektyw. Między nimi muszą znajdować się definicje występujących w aksjomacie nowych znaków: trzynastego, piętnastego, trzydziestego szóstego („⊦( )”, „⫯( )” „ϕ( )”), (odpowiadają kolejno: negacji, koniunkcji, implikacji).

Leśniewski zwraca także uwagę na to, aby w wypisanych tezach prototetyki nie było występujących w aksjomacie ontologii nawiasów „{”, „}” obejmujących argumenty ontologicznego „ε”. Mają one bowiem stanowić jednoznaczną charakterystykę kategorii semantycznej argumentów.

Jeśli spełnione są wymienione wymagania, to według Leśniewskiego można przystąpić do budowy ontologii (Leśniewski 2015/1930, 728–729/115–116, 741–742): wypisać nowy aksjomat, przyjąć nowe dyrektywy oraz odpowiednie T.E. właściwie uzupełnione i zmienione. Następnie można zacząć dodawać nowe tezy ontologiczne. Leśniewski podkreśla, że wprowadzone przez niego zmodyfikowane T.E. pozwalają zrekonstruować w postaci tez ontologicznych wszystkie istniejące wcześniej tezy prototetyki. W tym sensie można powiedzieć, że ontologia zawiera prototetykę. Leśniewski podkreśla, że niewielka zmiana instrukcji pozwala na budowę nowego zespołu tez ontologii bez dublowania wcześniejszych wyników.

Gdyby porównać przedstawione w *Grundzüge* T.E. charakteryzujące sposób rozbudowy prototetyki z powyższym opisem przejścia od prototetyki do ontologii, to – niestety – ta druga procedura nieco przypomina postępowanie, które sam Leśniewski określił jako „oparte na logicznych sekretach”. Włączenie nowego aksjomatu, zmiana T.E. nie była przewidziana w T.E. prototetyki. O ile można osobno mówić o formalizacji prototetyki i o formalizacji samej ontologii w ramach przygotowanego zespołu tez prototetycznych oraz dodatkowego aksjomatu, to samej procedury owej zmiany nie można uznać za sformalizowaną.

Wbrew zapowiedziom w żadnej ze swych publikacji Leśniewski nie ustosunkował się wyraźnie do poglądów głoszonych pod hasłem metamatematyki Hilber-

[13] Aksjomat, mówiąc nieformalnie, charakteryzuje ε występujący w wyrażeniu Aεa następująco: istnieje A, które jest a, A jest indywidualnym przedmiotem, „ε” określa relację tranzytywną.

ta. Powszechnie łączy się je ze współczesnym formalizmem. Jak sądzę – to powstrzymywanie się od komentarza wynika ze skrajnie odmiennego podejścia obu uczonych do języka formalnego. W obu przypadkach korzysta się z podejścia metamatematycznego, jednak wykorzystując je do zupełnie innych celów.

Na zakończenie swego tekstu spróbuję naszkicować odpowiedź na pytanie o różnicę między Hilbertem i Leśniewskim w podejściu do języka formalnego. Dla Polaka był on tylko środkiem komunikowania intuicyjnych treści. W analizach niemieckiego uczonego narzędzie badań stało się ich obiektem. Uzyskiwane wyniki miały gwarantować matematyce pewność. Nie intuicyjne analizy, a metamatematyczne badania związków między różnymi formułami miały uzasadniać jej niesprzeczność. Dla Polaka formalne wyrażenia były materialnymi obiektami, którymi można było wykonywać precyzyjnie opisane ruchy w grze. W rzeczywistości jednak nigdy nie zostały pozbawione związanej z nimi intuicyjnej treści. Sensowne aksjomaty poddawane były mechanicznym przekształceniom, podczas których sztucznie nie zwracano uwagi na ich treść. Prawa kierujące nimi były jednak tak sformułowane, by zawsze można było do niej powrócić. Dlatego uczony wielokrotnie przypominał, że pod wpływem formalizacji teoria nie przestaje składać się z sensownych, intuicyjnie ważnych twierdzeń (Leśniewski 2015/1929, 566/78).

Hilbert i wielu uczonych zgadzających się z nim miało zupełnie inny stosunek do treści znaków wykorzystywanych w aksjomatach. Jeśli używa się pozalogicznych symboli, którym tradycja przypisuje pewne znaczenie, to abstrahuje od niego, uznając, że jest ono dopiero nadawane w owych aksjomatach. W takiej sytuacji często pojawia się problem ze statusem tego wyrażenia. Uznaje się bowiem, że występujące w nim terminy pierwotne denotują takie obiekty (rozumiane szeroko, np. indywidua, klasy, relacje), które spełniają te aksjomaty. Często – jak okazuje się – jest wiele takich układów obiektów (wiele modeli), więc terminy te w stosunku do języka wyjściowego stają się wieloznaczne[14]. Czasem świadomie rezygnuje się z traktowania aksjomatów jako zdań. Np. patrzy się na nie jako na pewne schematy zdaniowe, w których tzw. terminy pierwotne odgrywają rolę zmiennych (Ajdukiewicz 1975, 191). Jeśli pewien układ szeroko rozumianych obiektów (np. indywiduów, klas, relacji) spełniał warunki narzucone na te zmienne w aksjomatach, to odpowiadał także opisowi we wniosku.

Tradycyjnie znaczenie aksjomatów wiąże się z ich prawdziwością. Są wypowiedziami opisującymi poprawnie pewną rzeczywistość. To jest możliwe tylko wtedy, gdy korzystają ze zrozumiałych słów. Z tego powodu – jak uważał Frege – aksjomaty nie mogą stanowić żadnej definicji tzw. terminów pierwotnych. Dlatego żartował sobie z propozycji Hilberta: wyrażenia wprowadzające nowe kategorie nazywał „pseudoaksjomatami", „pseudodefinicjami", a tezy,

---

[14] W rzeczywistości to nie jest problem logiczny (bo powstaje nowy język), ale praktyczny, komunikacyjny.

w których występują, określane były jako „pseudotwierdzenia” (sformułowania, które nie muszą odpowiadać rzeczywistości i w których występują terminy niezrozumiałe, niejasne lub wieloznaczne) (zob. np. Frege 1971, 63, 65, 80–81, 84–90). Ponieważ aksjomaty opisują pewną rzeczywistość, więc mają swój model. Z tego powodu idący śladami Fregego Leśniewski nie musiał być zainteresowany także aktualnie popularnymi problemami metamatematyki Hilberta, np. dowodzeniem niesprzeczności.

Warto – jak sądzę – zwrócić uwagę na jeszcze jedną cechę stanowiska Fregego, która powoduje jego zasadniczy dystans do wyników Hilberta. Twórcę pisma pojęciowego nie interesował problem logicznych relacji między zdaniami czy – mówiąc inaczej – między różnymi bytami językowymi. Koncentrował się na *myślach* wyrażanych w zdaniach. Patricia A. Blanchette (1996, 322–325) wyjaśnia to, odwołując się do terminów derywacja (ciąg zdań występujących w formalnym systemie) i dowód (odpowiedni ciąg *myśli*). Chociaż zdanie wyraża jedną myśl, to ona sama może być wyrażona przez inne zdania. Jest to wynikiem różnic między pojęciowymi analizami leżącymi u ich podstaw[15].

Hilbert zaprezentował takie podejście już 1899 roku, pisząc *O podstawach geometrii*. Odejście od metody Euklidesa stanowiło istotny zwrot w pojmowaniu aksjomatyzacji teorii dedukcyjnej. Niemiecki uczony zrezygnował z przypisywania aksjomatom oraz twierdzeniom klasycznie rozumianej prawdziwości i potraktował teorię jako system hipotetyczno-dedukcyjny. Jego stanowisko zostało zdecydowanie skrytykowane przez tradycyjnie myślącego Fregego. Powstał głośny spór, w którym oba stanowiska zostały wyraźnie zdefiniowane. Leśniewski podchodzi do dedukcyjnej teorii naukowej w sposób tradycyjny, bliski Fregemu (Betti 2009). Ponieważ aksjomaty opisują pewną rzeczywistość, więc mają swój model. Z tego powodu idący śladami Fregego Leśniewski nie musiał być zainteresowany także aktualnie popularnymi problemami metamatematyki Hilberta, np. dowodzeniem niesprzeczności.

Kończąc porównywanie podejścia Leśniewskiego i Hilberta do formalizmu matematycznego, zwrócę jeszcze krótko uwagę na problem definiowania podstawowych terminów teorii dedukcyjnej. Możliwość traktowania aksjomatów jako definicji terminów pierwotnych broni podejście Hilberta przed zarzutem o błąd definiowania *regressus ad infinitum*. Ta trudność pojawia się w tradycyjnym podejściu Leśniewskiego. Na pewien jej aspekt wskazywał Roman Ingarden (Ingarden 1950, 210), kiedy podkreślał, że w rzeczywistości precyzja języka formalnego musi opierać się na języku potocznym: nieostrym, wieloznacznym, co razem z jego innymi wadami łatwo prowadzi do sprzeczności. Jak sądzę, Leśniewski był świadomy tego zagrożenia i starał się zminimalizować je: 1) w swej propedeutyce rozjaśniał znaczenie podstawowych terminów; 2) jako

15 Blanchette w swoim artykule wskazuje na możliwość wykorzystania przez Fregego pewnych wyników dotyczących derywacji.

terminy pierwotne występujące w aksjomatach przyjmował te, których znaczenie było przedmiotem wykładów matematyki intuicyjnej; 3) wykorzystywał niebudzące większych wątpliwości proste procedury definicyjne (np. definicje ostensywne); 4) w razie potrzeby odwoływał się do nieformalnych metod komunikowania (Leśniewski 2015/1927–1931, 461–463/163–165).

Bibliografia

Ajdukiewicz K. (1975), *Logika pragmatyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Betti A. (2009), *Leśniewski's Systems and the Aristotelian Model of Science*, [in:] S. Lapointe, J. Woleński, M. Marion, W. Miskiewicz (eds.), *The Golden Age of Polish Philosophy. Kazimierz Twardowski's Philosophical Legacy*, Springer, Dordrecht, Heidelberg, London, New York, 94–111; http://dx.doi.org/10.1007/978–90–481–2401–5_7.

Bessler G. (2010), *Gottloba Fregego koncepcja analizy filozoficznej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice.

Blanchette P.A. (1996), *Frege and Hilbert on Consistency*, „The Journal of Philosophy" 93/7, 317–336; http://dx.doi.org/10.2307/2941124.

Frege G. (1893 – vol. I, 1903 – vol. II), *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, Verlag von Hermann Pohle, Jena.

Frege G. (1971), *On the Foundations of Geometry*, translated by Eike-Henner, W. Kluge, [in:] Frege G. (1971), *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, Yale University Press, New Heven, London, 49–154.

Goodmann N. (2009), *Struktura zjawiska*, przeł. M. Szczubiałka, red. nauk. P. Kawalec, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Hallett M. (2010), *Frege and Hilbert*, [in:] M. Potter, T. Ricketts (ed.), *The Cambridge Companion to Frege*, Cambridge University Press, New York, 413–464.

Hilbert D. (1899), *Grundlagen der Geometrie (Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen)*, Teubner, Leipzig.

Hilbert D. und Ackermann W. (1967) *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Grundzüge der theoretischen Logik*, 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Hilbert D. und Bernays P. (1934 – vol. I, 1939 – vol. II), *Grundlagen der Mathematik*, Verlag Julius Springer, Berlin.

Ingarden R. (1950), *Krytyczne uwagi o logice pozytywistycznej*, [w:] Ingarden R. (1972), *Z teorii języka i filozoficznych podstaw logiki*, red. D. Gierulanka, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 191–221.

Jadczak R. (1993), *Stanisław Leśniewski a Szkoła Lwowsko-Warszawska*, „Analekta" 4, 2/2, 29–38.

Kotarbiński T. (1990), *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, Zakład Narodowy imienia Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk, Łódź.

Leśniewski S. (2015), Pisma zebrane, red. J. Jadacki, t. 1–2, Towarzystwo Naukowe Warszawskie i Wydawnictwo Naukowe Semper, Warszawa.

Leśniewski S. (2015/1927–1931), *O podstawach matematyki*, [w:] (Leśniewski 2015, 215–468).

Leśniewski S. (2015/1929), *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*, [w:] (Leśniewski 2015, 489–569).

Leśniewski S. (2015/1930), *Über die Grundlagen der Ontologie,* [w:] (Leśniewski 2015, 724–745).

Leśniewski S. (2015/1938), *Einleitende Bemerkungen zur Fortsezung meiner Mitteilung u.d.T. „Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik"*, [w:] (Leśniewski 2015, 570–629).

Leśniewski S. (2015/1938a), *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik, § 12*, [w:] (Leśniewski 2015, 630–713).

Mill J.S. (1962), *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej*, t. 2, przeł. Cz. Znamierowski, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Miszczyński R. (2016), *Semantyczne kategorie – Edmund Husserl, Stanisław Leśniewski*, „PRACE NAUKOWE Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie" XIII, 263–281.

Neumann J. von (1931), *Bemerkungen zu den Ausführungen von Herrn St. Leśniewski über meine Arbeit »Zur Hilbertischen Beweistheorie«*, „Fundamenta Mathematicae" 17, 331–334.

Russell B. (2010), *Principles of Mathematics*, Routledge Classics, London and New York.

Whitehead A.N. and Russell B. (1925 – vol. I, 1927 – vol. II, III), *Principia Mathematica*, second edition, Cambridge University Press, Cambridge.

Stanisław Leśniewski's understanding of the role of formal language of mathematics

Summary

Formalism used by Leśniewski to present mathematical theory is called a radical one. According to the author, it is the implementation of the postulates of the so-called formal arithmeticians. Mathematical theory is presented as a pure game of formulas devoid of content. It is governed by the precise rules described in the metalanguage. The author stresses the difference between Leśniewski's and Hilbert's mathematical approaches.

Keywords: Stanisław Leśniewski, Foundations of Mathematics, Intuitive Formalism, Radical Formalism, Play of Inscriptions, Metamathematics.