PHILOSOPHICAL DISCOURSES
Prace Naukowe Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego im. Jana Długosza w Częstochowie
2022, t. IV, s. 157–186

http://dx.doi.org/10.16926/pd.2022.04.09

Grzegorz SITEK
https://www.orcid.org/0000-0002-3010-5693
Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy im. Jana Długosza w Częstochowie

O idei bezpunktowych teorii przestrzeni na przykładzie Tarskiego geometrii brył*

Streszczenie

W pracy przedstawiona została istota bezpunktowych teorii przestrzeni w oparciu o system geometrii bezpunktowej Alfreda Tarskiego. Na wstępie omówiona została ogólna idea tzw. ontologii bezpunktowej oraz przemawiające za jej przyjęciem racje epistemologiczne i metodologiczne. Następnie przedstawiona została Whiteheada metoda ekstensywnej abstrakcji, stanowiąca metodologiczną podstawę dla konstrukcji bezpunktowych teorii przestrzeni oraz omówione zostały podstawowe pojęcia mereologii. Główną część pracy stanowi omówienie Tarskiego geometrii brył, jej postulatów oraz metateoretycznych własności. Pracę kończy krótka charakterystyka wkładu polskich badaczy w rozwój badań nad bezpunktowymi teoriami przestrzeni.

Słowa kluczowe: ontologia bezpunktowa, bezpunktowe teorie przestrzeni, mereologia, Tarskiego geometria brył.

Wstęp

Pojęcie przestrzeni jest jednym z centralnych pojęć ontologii. Problemem jej natury zajmowali się myśliciele każdej epoki: od starożytności, przez czasy nowożytne, aż do współczesności. W czasach nowożytnych refleksję nad statusem przestrzeni podejmowali zarówno filozofowie, jak i przyrodnicy (np. rozważania Kanta, Kartezjusza, Newtona i Leibniza), współcześnie zaś refleksja nad przestrzenią stała się przede wszystkim domeną fizyki. O ogromnej doniosłości potrzeby badań nad przestrzenią świadczy stworzenie uważanej za jedno z największych osiągnięć myśli ludzkiej teorii fizycznej – ogólnej teorii względności. To

* Praca powstała w wyniku realizacji projektu badawczego o nr. 2019/03/X/HS1/01923 finansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki.

właśnie ogólna teoria względności dostarcza obecnie najbardziej adekwatnego opisu fizycznej przestrzeni, czyli tzw. *przestrzeni bezpośredniego doświadczenia*. Zgodnie z tą teorią, przestrzeń rozumiana jest współcześnie jako jeden z aspektów bardziej złożonego tworu – czasoprzestrzeni. Czasoprzestrzeń jest z kolei dynamiczną strukturą, której lokalny stan zależy od rozmieszonej w niej materii. Jednak jeszcze w okresie nowożytnym zarówno czas, jak i przestrzeń traktowane były oddzielnie, zresztą, i w taki sam sposób są one traktowane również obecnie w życiu codziennym, czyli poza obszarem refleksji naukowej. Dychotomiczny podział czasoprzestrzeni na czas i przestrzeń najpełniej w okresie nowożytnym wykorzystał Newton, tworząc historycznie pierwszą, poważną teorię fizyczną, czyli mechanikę. W teorii tej przestrzeń była areną dla zjawisk, których następowanie po sobie porządkował czas.

Badania nad własnościami przestrzeni oraz nad osadzonymi w niej obiektami zyskały bardzo dojrzałą oraz zaawansowaną postać już w starożytności. Stało się to za sprawę Euklidesa i jego *Elementów*. Co ciekawe, to właśnie wiedza na temat przestrzeni i jej własności jako pierwsza przybrała postać teorii aksjomatyczno-dedukcyjnej. Fakt ten z jednej strony dowodzi, że sama przestrzeń była z różnych względów czymś dla człowieka ważnym, z drugiej zaś strony pokazuje, że zdobyta na jej temat wiedza była ugruntowane na tyle dobrze, aby własności przestrzeni badać w oderwaniu od możliwych, praktycznych zastosowań uzyskanych wyników[1]. W związku z tym, wraz z powstaniem geometrii Euklidesa powstało również abstrakcyjne pojęcie przestrzeni.

Prowadzone zarówno przez Euklidesa, jak i przez następne pokolenia matematyków rozważania nad własnościami przestrzeni oraz figur geometrycznych oparte były na pewnym paradygmacie, który można nazwać *ontologią punktową* lub *ontologią mnogościową*. Ontologia punktowa polega na założeniu, że stanowiąca przedmiot badań geometrii przestrzeń bezpośredniego doświadczenia jest rozciągłym, trójwymiarowym tworem zbudowanym z bezwymiarowych punktów, a ponadto, że w przestrzeni tej istnieją wszelkiego rodzaju twory zbudowane z punktów, takie jak odcinki, linie, powierzchnie etc. Chociaż historia nauki zna ontologiczne spory dotyczące natury przestrzeni, jak chociażby toczoną pod koniec XVII wieku dyskusję pomiędzy Newtonem a Leibnizem nad absolutnym bądź relacyjnym jej charakterem, to jednak żaden z tych sporów nie dotyczył omawianej tutaj punktowej natury przestrzeni. Tak było do początku XX wieku, kiedy to angielski filozofii i matematyk Alfred North Whitehead zakwestionował punktową naturę przestrzeni, podając szereg argumentów epistemologicznych, ontologicznych oraz metodologicznych. W ten sposób narodziła się nowa ontologia przestrzeni, tzw. *ontologia bezpunktowa*.

---

[1] Posługując się terminologią sformułowaną przez Kazimierza Ajdukiewicza, o dojrzałości geometrii Euklidesa świadczy fakt, że jest ona teorią dedukcyjną w stadium aksjomatycznym abstrakcyjnym, stanowiącym wg Ajdukiewicza najbardziej zaawansowaną postać teorii dedukcyjnej (zob. Ajdukiewicz 1975, 188–192).

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie istoty bezpunktowych teorii przestrzeni w oparciu o system geometrii bezpunktowej autorstwa Alfreda Tarskiego[2]. Spośród wielu teorii stanowiących propozycję realizacji idei bezpunktowej ontologii przestrzeni wybieramy teorię Tarskiego z dwóch powodów. Po pierwsze, teoria Tarskiego pozwala na bardzo intuicyjne uchwycenie problemu konstrukcji systemów ontologii bezpunktowej, gdyż obiekty, którymi teoria ta operuje, są nietrudne do wyobrażenia. Po drugie, zarówno teoria Tarskiego, jaki i stanowiąca jej podstawę mereologia pokazują, jak istotny wkład do badań nad tego typu systemami wnieśli oraz stale wnoszą polscy badacze.

W związku z tym, że niniejsza praca w całości stanowi próbę nieformalnego omówienia w pełni formalnych teorii matematyczno-ontologicznych, unikamy jak to tylko możliwe jakichkolwiek formalizmów. Wybrane własności omawianych tutaj pojęć i konstrukcji staramy się wypowiedzieć w języku naturalnym, przedkładając odwołujące się do intuicji opisy nad formalno-logiczną ścisłość. Ponadto, nie przywołujemy również stosowanych w literaturze specjalistycznej rysunków i diagramów ilustrujących omawiane tezy oraz definicje, gdyż naszym celem jest o całej sprawie po prostu opowiedzieć. Czytelnika zainteresowanego technicznymi szczegółami omawianych tutaj zagadnień odsyłamy do lektury źródeł wykorzystywanych w niniejszej pracy.

1. Idea ontologii bezpunktowej

Idea ontologii bezpunktowej jest w zasadzie bardzo prosta i można ją opisać następująco:

> Ontologia bezpunktowa ma dotyczyć realnego świata […]. Wyklucza ona z ogółu jego składników punktowe obiekty, jak również takie, które mają charakter odcinków, linii bądź ich kawałków, powierzchni bądź ich kawałków. Wykluczamy zatem wszystko to, co – według *Elementów* Euklidesa – nie ma długości lub nie ma szerokości lub nie ma wysokości. Dodajmy, że w tej teorii wykluczamy także wszelkie „mieszaniny" wymienionych obiektów, jak również ich „mieszaniny" z obiektami fizycznymi (Pietruszczak 2020b, 144).

Ontologia bezpunktowa powstała więc jako przeciwieństwo ontologii punktowej. W tej drugiej zakłada się, że w realnym świecie istnieją zarówno punkty, jak i różnorodne ich mieszaniny, takie jak odcinki, linie czy płaszczyzny. Zarówno ontologia punktowa jak i bezpunktowa dotyczą w istocie natury samej przestrzeni, a konkretnie – jej składników. Paradygmatycznym w pewnym sensie

---

[2] W polskim piśmiennictwie przez reprezentujących ten nurt badaczy używane bywa również sformułowanie „niestandardowe teorie przestrzeni". Sformułowanie to ma bowiem poprawniej oddawać intencje budowania omawianych tutaj teorii, w których przecież finalnie dochodzi się do pojęcia punktu. Czytelnika zainteresowanego tym problemem odsyłamy do monografii Rafała Gruszczyńskiego (Gruszczyński 2016).

przykładem teorii przestrzeni, będącej wyrazem ontologii punktowej, jest znana od starożytności geometria euklidesowa. W teorii tej przestrzeń rozumiana jest bowiem jako zbiór składający się z punktów, natomiast odcinki, linie, płaszczyzny etc., będące fragmentami przestrzeni, rozumiane są jako podzbiory złożone z punktów.

Naczelną ideą ontologii bezpunktowej jest przekonanie, że realna przestrzeń jest tworem rozciągłym, i że fragmentami tej przestrzeni są tylko takie obiekty, które mają identyczną jak ona naturę, a więc również są rozciągłe i przestrzenne. Fragmenty (lub kawałki) przestrzeni, będące jednocześnie jej składnikami, nazywać będziemy *regionami*. W związku z tym regiony są takimi fragmentami przestrzeni, które matematycznie scharakteryzowalibyśmy poprzez określenie ich jako trójwymiarowych. Status obiektów posiadających wymiar niższy niż przestrzenny jest w takiej ontologii zupełnie inny – ontologia bezpunktowa przyjmuje, że wszelkiego rodzaju obiekty punktowe, jak również wszelkie ich mieszaniny, które nie mają charakteru przestrzennego, nie są składnikami realnej przestrzeni, lecz stanowią rezultat konstrukcji dokonywanych przez podmiot poznający i jako takie są jedynie abstrakcjami istniejącymi w umyśle. Postulat istnienia tego typu obiektów w przestrzeni jest w myśl ontologii bezpunktowej niczym nieuzasadnioną reifikacją odnoszących się do nich pojęć, albowiem żadne doświadczenie o realnym istnieniu tych obiektów nas nie przekonuje. O ile w zastosowaniach czysto matematycznych pojęcia te nie budzą zastrzeżeń, gdyż są takimi samymi abstrakcjami, jak wszystkie inne pojęcia matematyczne, to jednak traktowanie opisywanych przez nie obiektów jako realnych składników rzeczywistej przestrzeni budzi już poważne wątpliwości.

Istnieje kilka powodów skłaniających do przyjęcia ontologii bezpunktowej w miejsce ontologii punktowej. Pierwszy powód jest natury epistemologicznej. Głosi on, że podmiot poznający, czerpiąc wiedzę na temat przestrzeni z bezpośredniego doświadczenia, poznaje tylko rozciągłe, trójwymiarowe obszary (regiony) tej przestrzeni. W bezpośrednim poznaniu nie są dostępne obiekty o wymiarach niższych niż wymiar przestrzenny, a jeżeli nawet byśmy twierdzili, że takie obiekty są naszemu poznaniu dostępne, to postulowanie ich istnienia należy uznać raczej za efekt wynikający z ograniczeń naszych zdolności poznawczych, aniżeli za rezultat ich realnego istnienia. Mówiąc o ograniczeniach poznawczych, mamy tu na myśli fakt, że zarówno obiekty, które uważamy za punktowe, jak i obiekty, które uważamy za odcinki lub płaszczyzny, po dokładniejszym ich rozpoznaniu okazują się być trójwymiarowe, do uznania ich zaś za posiadające wymiar niższy niż przestrzenny skłaniają nas jedynie ich małe rozmiary. W przypadku bowiem bardzo małych obiektów informacja o ich przestrzennym charakterze niejako zaciera się w wyniku dużej różnicy skali, jaka zachodzi między nimi a innymi otaczającymi je obiektami przestrzennymi. Istotnie, biorąc np. mapę jakiegoś terenu i stawiając w jakimś miejscu kropkę w celu wskazania pewnej lokalizacji, w percypowanej przez nas skali kropkę tę uznamy z punkt. Jednak gdybyśmy skalę tę powiększyli, punkt ten zacząłby się rozciągać i przybierać postać być może bardzo małego, ale jednak trójwymiarowego obszaru. Działoby się tak nawet wówczas, gdybyśmy postawili „mniejszą” kropkę wewnątrz wcześniej rozciągniętej kropki i gdybyśmy nawet dodatkowo wsparli się np. przyrządami optycznymi. Analogiczne rozumowanie można również zrekonstruować w odniesieniu do odcinków, linii, płaszczyzn etc., słowem – wszystkich obiektów wymiaru niższego niż przestrzenny.

Na pierwszy rzut oka można by sądzić, że sformułowanego wyżej zarzutu, jako odnoszącego się jedynie do posiadanych przez podmiot możliwości poznawczych, nie należy uznawać za argument natury ontologicznej, który podważałby realne istnienie obiektów, o których w tym zarzucie mowa. Znane są nam bowiem obiekty, którym nie odmawiamy realnego istnienia, chociaż nie są obecne w bezpośrednim doświadczeniu. Można więc sądzić, że analogiczna uwaga odnosi się do opisanego wyżej zarzutu, świadcząc o jego nietrafności. Oprócz jednak problemów natury epistemologicznej, z obiektami punktowymi istnieją również poważne kłopoty natury ontologicznej.

Z ontologicznego punktu widzenia teorie punktowe okazują się być bowiem problematyczne z co najmniej dwóch powodów. Pierwszy dotyczy relacji, jaka zachodzi pomiędzy naturą składników przestrzeni a samą przestrzenią. W podejściu punktowym przestrzeń traktowana jest wprost jako obiekt zbudowany z bezwymiarowych punktów. Otaczająca nas przestrzeń jest jednak trójwymiarowa. Powstaje więc pytanie, w jaki sposób „nagromadzenie” lub też „zebranie w jedną całość” obiektów bezwymiarowych ma w konsekwencji wygenerować obiekt rozciągły, trójwymiarowy? Owo „nagłe” wyłanianie się trójwymiarowej przestrzeni z konglomeratu odmiennych od niej co do natury, bezwymiarowych obiektów, jest jednym z głównych zarzutów ontologicznych, jakie stawiane są punktowemu traktowaniu przestrzeni.

Aby jednak nie powstało nieporozumienie, podkreślmy wyraźnie, że wysuwany wobec punktowych teorii przestrzeni zarzut nie dotyczy tego, że teorie te mówią o punktach, lecz tego, że teorie te przyjmują założenie, zgodnie z którym sama przestrzeń bezpośredniego doświadczenia jest obiektem zbudowanym z punktów, a więc że jest ona obiektem stanowiącym niejako bezpośredni, empiryczny model dla używanych w tych teoriach pojęć. W ontologii bezpunktowej chodzi jedynie o ustalenie właściwego statusu epistemologicznego oraz ontologicznego obiektów punktowych. Krótko mówiąc:

> Zadaniem ontologii bezpunktowej jest matematyczna konstrukcja tych abstrakcyjnych obiektów. Po jej podaniu nadal można z powodzeniem stosować metody fizyki matematycznej i (punktowej) geometrii. Bez takich metod trudno mówić o rozwoju badań dotyczących natury czasu i przestrzeni. Musimy jednak odnaleźć właściwą rolę obiektów punktowych w ontologii (Pietruszczak 2020b, 144).

Drugi problem dotyczący ontologicznej natury przestrzeni związany jest ze sposobem traktowania jej jako całości złożonej z punktowych składników. Dokładniej mówiąc, problem ten dotyczy natury „zebrania” owych składników w jedną, tworzącą przestrzeń całość. Jego istota związana jest ze sposobem rozumienia tego, czym są zbiory, dlatego podniesiony jest też wobec innych teorii, niezależnie od tego, jakiej natury obiekty są w nich rozpatrywane. Chodzi o to, że w podejściu punktowym przestrzeń traktowana jest wprost jako dystrybutywny, teoriomnogościowy zbiór punktów. Zbiory w sensie dystrybutywnym są jednak zawsze tworami całkowicie abstrakcyjnymi, a zatem nieposiadającymi żadnej lokalizacji i jest tak niezależnie od natury ich składników. O abstrakcyjnej naturze zbiorów dystrybutywnych trafnie przekonuje wyjaśnienie podane np. przez Quine'a w jego *Logice matematycznej* (zob. Quine 1974). Wyjaśnienie to możemy na nasze potrzeby zrekonstruować w następujący sposób.

Załóżmy, że zbiory dystrybutywne są obiektami konkretnymi, a więc posiadającymi przestrzenną lokalizację. Wówczas, w szczególności, obiektem konkretnym musi być również dystrybutywny zbiór utworzony z konkretnych obiektów, a ponieważ składające się na ten zbiór obiekty konkretne posiadają przestrzenną lokalizacje, również sam ten zbiór musi „gdzieś się znajdować". Oczywiście, jedynym takim miejscem jest miejsce zajmowane przez tworzące ten zbiór elementy. Innymi słowy, „sumaryczne" miejsce zajmowane przez elementy składające się na dany dystrybutywny zbiór odpowiada w rezultacie miejscu zajmowanemu przez sam ten zbiór. Przestrzenne ulokowanie tego typu zbiorów rodzi jednak bardzo poważny problem. Aby to wyjaśnić, weźmy pod uwagę następujące dwa zbiory dystrybutywne: zbiór A – zbiór, którego jedynym elementem jest Polska (rozumiana jako obszar geograficzny), oraz zbiór B – zbiór, którego elementami są polskie województwa (również rozumiane jako geograficzne obszary). Zbiory A oraz B są niewątpliwie różnymi zbiorami, gdyż wystarczy zauważyć, że mają one różną ilość elementów: zbiór A posiada jeden element, a zbiór B posiada elementów szesnaście. W związku z tym oczywiste jest, że zbiory te nie mogą być identyczne. Przyjmując, że zbiory A i B są obiektami konkretnymi, musimy zgodnie z poczynionymi wyżej uwagami przyjąć, że znajdują się one w miejscu, w którym znajdują się tworzące je, konkretne elementy. W obu przypadkach jedynym takim miejscem jest obszar geograficzny, który ograniczony jest obszarami zajmowanymi przez Morze Bałtyckie, Niemcy, Czechy, Słowację, Ukrainę, Białoruś, Litwę oraz Rosję. Ale zbiory A oraz B są różne, a zarazem konkretne, zatem w dokładnie tym samym miejscu muszą istnieć dwa różne obiekty konkretne, a tak być przecież nie może. Rozumowanie to przekonuje więc, że zbiory dystrybutywne traktować należy jako twory abstrakcyjne, w przeciwnym bowiem wypadku popadamy w sprzeczność.

Opisany wyżej sposób traktowania przestrzeni jako dystrybutywnego zbioru punktów rodzi więc poważny problem już na samym początku jej badań: konkretna, otaczająca nas przestrzeń, dana w bezpośrednim doświadczeniu, okazuje się być tworem abstrakcyjnym, a więc nieposiadającym przestrzennego charakteru. Takie traktowanie przestrzeni stoi więc w jawnej sprzeczności z naszym codziennym doświadczeniem.

Ideę oraz metodologiczne podstawy dotyczące sposobu konstruowania teorii przestrzeni, mającej być wyrazem ontologii bezpunktowej, sformułował Alfred North Whitehead w książce *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*. Opisaną tam w rozdziale VII, pt. *The Anatomy of Some Scientific Ideas* (zob. Whitehead 1919), pierwotną koncepcję Whitehead następnie istotnie poprawiał, najdojrzalszą zaś jej wersję zaprezentował w swoim słynnym dziele *Proces i rzeczywistość*[3] (Whitehead 2021).

W stanowiących punkt wyjścia dla swoich propozycji badaniach epistemologicznych koncentrował się Whitehead na rozpoznaniu podstawowych zasad, na bazie których konstruowane jest nasze pojęcie fizycznego świata (zob. Lowe 2019, 95 i nn.). Szczególnie interesował go sposób, w jaki podstawowe pojęcia geometrii, takie jak *punkt*, *linia* czy *płaszczyzna*, zakorzenione są w naszym postrzeganiu rozciągłych obiektów przestrzennych oraz jak na podstawie poznania tych obiektów dochodzimy do dokładnych definicji geometrycznych pojęć. Oprócz tego Whitehead zainteresowany był sposobem tworzenia definicji czasowych odpowiedników owych geometrycznych obiektów, tj. pojęcia *chwili* czy *przedział czasu*. Problem trafnej rekonstrukcji sposobu tworzenia pojęć geometrycznych zajmował Whiteheada na tyle istotnie, że w jego rozwiązaniu upatrywał możliwości dalszego rozwoju pozostałych prowadzonych przez siebie badań, o czym pisał w grudniu 1908 r. w liście do Bertranda Russella:

> Odkryłem, że nie mogę posunąć się ani o krok w geometrii metrycznej, dopóki jasno nie ustalę w swym umyśle fundamentalnej natury bytów geometrycznych (Lowe 2019, 96)[4].

W poprawnym rozpoznaniu relacji, jaka zachodzi pomiędzy mechanizmem tworzenia pojęć geometrycznych a postulowanym na tej podstawie statusem ontologicznym przestrzeni, widział Whitehead nie tylko konieczny warunek poznania prawdziwej natury rzeczywistości, ale również warunek rozwoju nauki w ogóle. Potrzebę dokładnego przeanalizowania oraz gruntownego przeformułowania koncepcji przestrzeni postulował bowiem Whitehead w związku ze sformułowanymi przez siebie źródłami ograniczeń, jakie w jego opinii napo-

---

[3] W sprawie krytyki pierwotnej wersji systemu Whiteheada zob. pracę Vakarelova (2020, 9), gdzie omówiony jest pokrótce system geometrii bezpunktowej Theodora de Laguny (przedstawiony przez niego w: de Laguna 1922), oparty na zmodyfikowanej metodzie zaproponowanej przez Whiteheada.

[4] Potrzeby dokładniejszego określenia tego, czym jest *punkt*, *prosta* oraz *płaszczyzna*, można się dopatrywać już w tzw. wyjaśnieniach podanych przez Euklidesa na początku jego *Elementów*. Przypomnijmy, że według Euklidesa punkt jest tym, co nie ma części, linia jest długością bez szerokości, a powierzchnia jest tym, co ma tylko długość i szerokość, nie ma zaś głębokości. Chociaż podane przez Euklidesa wyjaśnienia zawarte zostały w I księdze jego dzieła zatytułowanej *Definicje*, to nie mogą być one uznane za definicje we współczesnym znaczeniu tego słowa, gdyż użyte do ich określenia pojęcia *części*, *długości*, *szerokości* oraz *głębokości* same nie mają dobrze określonego znaczenia. Owe definicje traktować należy raczej jako pewne intuicyjne wyjaśnienia używanych przez Euklidesa podstawowych pojęć geometrii.

tkała myśl nowożytna w uprawianiu nauk przyrodniczych (zob. Jusiak 1992, 37). Whitehead uważał, że sposób operowania przez nowożytnych przyrodników pojęciami geometrycznymi jest przykładem tzw. błędu „źle umiejscowionej konkretności”:

> Zdaniem Whiteheada błąd ten popełniony jest wówczas, kiedy abstrakcyjnym konstrukcjom logicznym nadany zostaje status konkretnych faktów, czyli gdy abstrakcyjny wytwór myśli mylony jest z bezpośrednio doświadczanym konkretem. (Jusiak 1992, 46)

Można zatem powiedzieć, że Whitehead wyraźnie zwrócił uwagę na fakt, iż stosowane przez badaczy abstrakcyjne pojęcia geometrii, które służyły im do ujmowania świata, zostały błędnie przez nich uznane za odnoszące się do czegoś bezpośrednio istniejącego w przyrodzie. Zwracając uwagę na ten problem, Whitehead nie chciał jednak sugerować, że wszelkie nasze konstrukcje intelektualne, jako nieodpowiadające wprost żadnym faktom, należy całkowicie wyeliminować z przyrodoznawczego dyskursu. Wręcz przeciwnie, nasze koncepcje bytów geometrycznych uważa Whitehead za niezbędne dla uprawiania fizyki teoretycznej, jednak ostrzega, aby nie popełnić błędu polegającego na uznaniu otaczającego nas świata jako identycznego ze sposobem, w jaki go postrzegamy (zob. Lowe 2019). W rozwiązaniu dostrzeżonego przez siebie problemu widzi Whitehead właściwe zadanie, jakie stoi przed filozofią:

> Jednym z najważniejszych zadań stojących przed filozofią nauk przyrodniczych jest, zdaniem Whiteheada, wyjaśnienie pochodzenia oraz epistemologicznego statusu podstawowych pojęć, jakimi operuje uczony-przyrodnik. Punkt, prosta, odcinek, płaszczyzna, czas, przestrzeń, ruch, obiekt materialny – to terminy znajdujące zastosowanie w każdym przyrodniczym opisie świata. Terminy te są zarazem elementami potocznego ujmowania zewnętrznej rzeczywistości. To szerokie ich użycie nie pociąga jednak za sobą powszechnej zgody w rozumieniu ich statusu. W historii myśli pojawiały się różne teorie czasu, przestrzeni i materii, różnie tłumaczące sens ontologiczny i znaczenie przypisywane w naukowym opisie przyrody wywodzącym się z nich kategoriom poznania. Podkreślając pozytywną wymowę tego faktu, Whitehead jednak uważa, iż wspólnym rysem tych teorii było oderwanie proponowanych przez nie rozwiązań od bezpośrednio doświadczanej konkretności przyrody. Sądzi także, że chcąc uniknąć uproszczeń i deformacji wypływających z przypisywania obiektywnego sensu termiom występującym w tradycyjnych teoriach czasu, przestrzeni i materii, nie wystarczy poprzestać na konstatacji negatywnego wpływu teorii na rozwój współczesnej wiedzy naukowej lub na stwierdzeniu ich nieadekwatności wobec nasuwanego przez dzisiejszą fizykę obrazu świata. Należy również pokazać, w jaki sposób podstawowe pojęcia nauki można odnieść do bezpośrednio doświadczanego konkretu, czyli dowieść, że ich korzenie tkwią w bezpośrednim oglądzie rzeczywistości (Jusiak 1992, 102–103).

2. Metoda ekstensywnej abstrakcji

Cel, jaki stawiał Whitehead przed filozofią, polegał na wypełnieniu luki istniejącej między bezpośrednim doświadczeniem świata a posiadanymi przez nas koncepcjami na jego temat, w szczególności zaś tymi, które wyrażone są w postaci naukowych teorii. Procedurą służącą do konstruowania używanych w naukowym opisie świata pojęć, wyjaśniającą jednocześnie ich genetyczne pochodzenie, była zaproponowana przez Whiteheada *metoda ekstensywnej abstrakcji* (*the method of extensive abstraction*)[5]:

> Metoda ta ma być pewną uniwersalną procedurą analityczną, dostarczającą logicznych narzędzi pozwalających konstruować podstawowe pojęcia nauki, opierając się na bezpośrednio doświadczanych treściach zmysłowych. Precyzując bliżej cel swoich zamierzeń, Whitehead wyjaśnia, że metoda ekstensywnej abstrakcji – podobnie jak w analizie matematycznej rachunek różniczkowy – dąży do „uczynienia procesu aproksymacji narzędziem ścisłego myślenia" (Jusiak 1992, 103).

Ściślej rzecz biorąc, metoda ekstensywnej abstrakcji ma być narzędziem pozwalającym na tworzenie abstrakcyjnych pojęć geometrycznych w oparciu o dające się wyróżnić w czasoprzestrzeni obszary, zdobyte zaś w ten sposób pojęcia miały następnie służyć jako narzędzie badania samej czasoprzestrzeni:

> Pod tą nazwą kryje się skonstruowana przez Whiteheada interpretacja pojęć geometrycznych niezbędnych do matematycznego opisu czasoprzestrzeni jako pewnych dystrybutywnych zbiorów złożonych z czterowymiarowo rozciągłych procesów nazwanych przezeń zdarzeniami (events). W konsekwencji punkty, proste, zdarzenia elementarne, momenty, etc., można wykluczyć z grona realnych składników przyrody i uznać je za abstrakty uzyskane ze zdarzeń za pomocą specjalnych konstrukcji logicznych. Prowadzi to do ufundowania geometrii czasoprzestrzeni na specjalnej procesualnej ontologii przyrody utożsamianej w tym przypadku z formalną teorią zdarzeń (Gorzka 1992, 78).

Procedura badawcza stanowiąca istotę metody ekstensywnej abstrakcji miała więc motywacje osadzone głęboko w Whiteheada filozofii przyrody oraz w postulowanym przez niego faktycznym stosunku tego, co konkretne, do tego, co abstrakcyjne. Dlatego sformułowana przez niego metoda wychodzi od pojęcia *zdarzenia* (*event*), gdyż to właśnie zdarzenia są według Whiteheada elementarnymi składnikami doświadczenia świata. Ponieważ w niniejszym opracowaniu skupiamy się wyłącznie na przestrzennym aspekcie ontologii bezpunktowej, omawianie istoty sformułowanej pierwotnie dla zdarzeń metody ekstensywnej abstrakcji przedstawimy dalej wyłącznie w terminach regionów przestrzeni.

Kluczowe dla konstrukcji pojęć geometrycznych przy użyciu metody ekstensywnej abstrakcji jest pojęcie *klasy abstrakcji* bądź *układu abstrakcyjnego* (zob. Jusiak 1992, 104). Klasy abstrakcji są odpowiednio dobranymi, dystrybutyw-

---

[5] W pracy A. Pietruszczaka podjęta została krótka analiza sensu przyjętej przez Whiteheada nazwy dla zaproponowanej przez siebie metody budowania pojęć: „Angielski przymiotnik ‘extensive’ znaczy m.in.: rozległy, rozciągły, obszerny; angielski czasownik ‘extent’ znaczy: rozległość, rozciągłość, obszerność, rozmiar, zasięg. W omawianej zatem metodzie chodzi o abstrahowanie od rozciągłości (rozległości) rozważanych obiektów (zdarzeń; kul, brył, regionów). W wyniku tego powstaje punktowy obiekt danego rodzaju. Abstrahujemy od rozciągłości kul, brył, regionów – powstają geometryczne punkty. Wydaje się zatem, że sens nazwy ‘the method of extensive abstraction’ oddaje: metoda abstrahowania od rozciągłości obiektów" (Pietruszczak 2020b, 154–155).

nymi zbiorami regionów, będącymi w pewnym sensie „nośnikami" abstrakcyjnych pojęć geometrii. Między regionami tworzącymi daną klasę abstrakcji zachodzi pewna specyficzna relacja, nazywana przez Whiteheada relacją *rozciągłości* i rozumiana jako „obejmowanie" jednego regionu przez inny region (zob. Jusiak 1992, 104). W związku z tym, że zachodzące w bezpunktowych teoriach przestrzeni relacje między regionami wyrażamy w terminach stosunku części do całości, który jest w istocie relacją odwrotną do relacji rozciągłości, pojęcie klasy abstrakcji sformułujemy dalej właśnie przy użyciu relacji *bycia częścią*[6].

Klasą abstrakcji (lub *układem abstrakcyjnym*) jest dowolny, dystrybutywny zbiór regionów spełniających następujące warunki[7]:

1) między dowolnymi dwoma regionami należącymi do tego zbioru zachodzi relacja *bycia częścią*, tj. niezależnie, jaką parę regionów z tego zbioru wybierzemy, zawsze jeden z nich będzie częścią drugiego[8];
2) nie istnieje region, który byłby częścią wszystkich innych regionów z tego zbioru, innymi słowy, nie istnieje region minimalny względem relacji *bycia częścią*.

Zgodnie z powyższym określeniem, klasy abstrakcji są zbiorami składającymi się z „kurczących się" regionów, w których każdy kolejny region jest częścią poprzedniego i w którym nie znajdziemy regionu najmniejszego. Można powiedzieć, że ciągi regionów wchodzące w skład klas abstrakcji „zbiegają w nieskończoność". Zadaniem klas abstrakcji zbudowanych z rozciągłych regionów jest reprezentowanie danego pojęcia geometrycznego. To, jakie pojęcie geometryczne będzie przez daną klasę określane, zależy od rodzaju regionów zaliczanych do tej klasy. W odniesieniu do punktów „działanie" klas abstrakcji możemy obrazowo scharakteryzować w następujący sposób.

Wyobraźmy sobie, że mamy przed sobą mapę, na której chcemy wskazać dokładną lokalizację jakiegoś miejsca, a więc chcemy wskazać na tej mapie pewien punkt. Przyjmijmy, że lokalizację tę możemy określić wyłącznie poprzez wskazania rozciągłych fragmentów tej mapy. Wówczas, w celu dokładnego wskazania obranej lokalizacji, wybieralibyśmy zawierające się w sobie, coraz mniejsze kawałki mapy, otaczające tę lokalizację. Powstały w ten sposób ciąg regionów miałby tę własność, że wraz ze wzrostem liczby jego elementów, wzrastałaby również dokładność określenia obranej lokalizacji. Ciąg taki spełniałby więc pierwszy warunek nakładany na klasę abstrakcji, gdyż dowolne dwa wskazane regiony miałyby tę własność, że region znajdujący się na dalszej pozycji w tym ciągu byłby częścią regionu znajdującego się w tym ciągu wcześniej. Zakładając

[6] W sprawie ścisłej definicji relacji *bycia częścią* w oparciu o pierwotną relację *rozciągłości* zob. Biacino, Gerla 1991.

[7] W sprawie pierwotnej definicji *klasy abstrakcji* sformułowanej w terminach *zdarzeń* i *relacji rozciągłości* zob. Jusiak 1992, 104.

[8] W tym momencie posługujemy się jedynie intuicyjnym sensem pojęcia *bycia częścią*. Dokładniejszą dyskusję przeprowadzimy w części poświęconej mereologii, gdzie w szczególności zobaczymy, że dwa regiony nie mogą być nawzajem swoimi częściami.

dodatkowo, że taką procedurę wskazywania kolejnych regionów możemy kontynuować bez końca, spełniony byłby również drugi warunek definiujący klasę abstrakcji, gdyż nigdy nie doszlibyśmy do regionu, dla którego nie można byłoby wskazać mniejszego, tkwiącego w nim regionu. Wyrazem tej niekończącej się procedury wskazywania kolejnych, coraz mniejszych regionów jest utworzenie abstrakcyjnego zbioru dystrybutywnego zawierającego wszystkie te regiony. Owa nigdy niekończąca się, zstępująca droga ku coraz większej dokładności, której w związku z brakiem minimalnego obiektu odpowiadającego granicy nigdy nie można uzyskać, jest postulowaną przez Whiteheada procedurą uzyskiwania większej prostoty oraz dokładności w konstrukcji danego pojęcia. Ponadto, konstruowane tą metodą obiekty geometryczne, ponieważ utożsamiane są z wyznaczającymi je dystrybutywnymi zbiorami regionów, w naturalny sposób stają się obiektami abstrakcyjnymi, a więc obiektami oddającymi naturę teoretycznego poznania świata.

Ta sama, bo oparta na tworzeniu klas abstrakcji, procedura stosowana jest w procesie konstruowania geometrycznych pojęć innego rodzaju niż punkty. Tworzenie odmiennych obiektów geometrycznych polega na odpowiednim dobieraniu regionów składających się na „imitującą” taki obiekt klasę abstrakcji. Dla przykładu, chcąc tą metodą wskazać sposób konstruowania pojęcia linii prostej, należałoby rozważyć np. dystrybutywny zbiór składający się z regionów przestrzeni mających kształt nieograniczonych walców, kolejno zawierających się w sobie; żeby zaś skonstruować tą metodą pojęcie płaszczyzny, należałoby jako elementy klasy abstrakcji wziąć np. dystrybutywny zbiór składający się z nieograniczonych, kolejno zawierających się w sobie warstw przestrzeni.

Opisana wyżej metoda ekstensywnej abstrakcji, służąca do definiowania punktów (ale również innych obiektów geometrycznych) za pomocą odpowiednio budowanych klas abstrakcji, została przez nas siłą rzeczy przedstawiona bardzo pobieżnie. Chcąc przedstawić jedynie istotę tej konstrukcji, nie uwzględniliśmy w jej opisie całej złożoności tego zagadnienia. Dla przykładu, nie rozważaliśmy w ogóle pewnych związanych z tą metodą „pułapek” konstrukcyjnych, jakie można napotkać podczas definiowania punktu. Pułapki te dotyczą problemu trafności takiej definicji oraz jej jednoznaczności. Przytoczmy w tym miejscu tylko krótki cytat wyjaśniający istotę tych pułapek[9]:

> Po pierwsze, zwężające zbiory regionów niekoniecznie musza się „kurczyć” we wszystkich wymiarach, a przez to mogą reprezentować inne obiekty geometryczne niż punkty, np. linie proste […]. Po drugie, różne zbiory regionów mogą zbiegać się do tej samej lokalizacji w przestrzeni […]. Konsekwencją […] byłoby przyjęcie, że różne punkty mogą istnieć dokładnie w tej samej lokalizacji w przestrzeni (Gruszczyński 2016).

[9] Z tym wiąże się również wspomniana wcześniej krytyka pierwotnej wersji systemu Whiteheada przeprowadzona przez de Lagunę (zob. Vakarelov 2020, de Laguna 1922).

Podsumowując, możemy powiedzieć, że według prezentowanego przez Whiteheada podejścia do natury pojęć geometrycznych, podmiot nie zdobywa o tych pojęciach wiedzy wprost na podstawie bezpośredniej ich percepcji, gdyż nie są one składnikami otaczającej go przestrzeni, ale ma o nich jedynie „wyobrażenie" dzięki ich konstrukcji opartej na sformułowanej wyżej metodzie ekstensywnej abstrakcji. Przestrzeni złożonej z bezwymiarowych punktów nie należy więc traktować jako realnie istniejącej przestrzeni fizycznej, będącej jednocześnie przestrzenią naszego bezpośredniego doświadczenia, ale należy myśleć o niej jako o skonstruowanej przez podmiot abstrakcyjnej przestrzeni wszystkich możliwych lokalizacji.

3. Mereologia

Geometria bezpunktowa ma być teorią, której pojęcia pierwotne odnoszą się wprost do przestrzeni bezpośredniego doświadczenia, dlatego obok bliskich takiemu doświadczeniu obiektów, bliskie doświadczeniu powinny być również uchwytywane przez podmiot poznający relacje zachodzące między tymi obiektami. Ponieważ bezpunktowe teorie przestrzeni za obiekty swych rozważań przyjmują przestrzeń oraz jej fragmenty, naturalnym jest wybór języka umożliwiającego wyrażanie zachodzących między tymi obiektami relacji *stosunku części do całości*. W związku z tym wspólną podstawą bezpunktowych teorii przestrzeni jest mereologia[10].

Mereologia jest teorią zbiorów kolektywnych. Została stworzona w latach dwudziestych XX wieku przez polskiego logika i matematyka Stanisława Leśniewskiego[11]. Mereologię możemy scharakteryzować w następujący sposób:

> Ogólnie rzecz biorąc, pojęcie zbioru kolektywnego można zdefiniować, używając jedynie relacyjnego pojęcia bycia częścią. Mereologia może być zatem uważana za teorię „stosunku części do całości" (z gr. μέρος [meros]; część). Mówiąc obrazowo, zbiory kolektywne są pewnego rodzaju całościami złożonymi z części, które są zarazem ich kolektywnymi elementami i podzbiorami. Ponadto, zbory kolektywne „zachowują naturę" swoich składników (elementów, części). Jeśli są złożone wyłącznie z obiektów fizycznych, to także są takimi obiektami (Pietruszczak 2020b, 146–147).

[10] W gruncie rzeczy wszystkie rozważane systemy bezpunktowej teorii przestrzeni opierają się albo wprost na mereologii, albo na systemie, w którym definiowalne są podstawowe pojęcia mereologii. Dzieje się tak dlatego, że wszystkie systemy geometrii bezpunktowej i – szerzej – topologii bezpunktowej, jako teorie matematyczne, nadbudowywane są na tzw. systemach algebr Boole'a, które mają ścisły związek z mereologią (zob. np. Pietruszczak 2000; Pietruszczak 2018; Gruszczyński 2016; Gruszczyński, Pietruszczak 2009).

[11] Znakomitym studium nad systemem Leśniewskiego są prace Andrzeja Pietruszczaka (Pietruszczak 2000; Pietruszczak 2018). W jego publikacjach z 2013 i 2020 badane są propozycje systemów mereologii z tzw. nieprzechodnią relacją *bycia częścią*. Opracowaniem podejmującym liczne wątki filozoficzne związane z mereologią jest książka: Cotnoir, Varzi 2021, wieloaspektowym zaś studium nad rozmaitymi zastosowaniami mereologii jest również pozycja: Skowron 2022.

Chociaż Leśniewski zbudował mereologię z myślą o jej zastosowaniu w podstawach matematyki, gdzie miała ona zastąpić teorię mnogości, to jednak szczególnie użyteczna okazuje się ona właśnie w badaniach nad bezpunktowymi teoriami przestrzeni. Uniwersa dyskursów tych teorii dostarczają bowiem naturalnych modeli, w których pojęcia mereologiczne zyskują przejrzystą interpretację. Do zastosowania mereologii w tego typu badaniach skłania również fakt, że możliwe do budowania za pomocą zbiorów kolektywnych całości złożone z konkretnych obiektów, jakimi są przestrzenne regiony, zachowują naturę swoich składników, a więc same są konkretnymi obiektami. Inaczej jest w omawianej wcześniej teorii mnogości, w której całości budowane pryz użyciu zbiorów dystrybutywnych zawsze są obiektami abstrakcyjnymi, niezależnie od natury tworzących je elementów. Mereologia stanowi zatem z jednej strony język opisu relacji przestrzennych, z drugiej zaś – w naturalny sposób jest teorią.

Budując mereologię jako formalną teorię stosunku części do całości, Leśniewski starał się w formalny sposób wyrazić te spośród własności relacji *bycia częścią*, które zgodne są z jej naturalnym, codziennym użyciem. Dlatego charakteryzujące tę relację dwa pierwsze aksjomaty stwierdzają, że relacja *bycia częścią* jest przeciwsymetryczna i przechodnia (zob. Pietruszczak 2000, 61 i nn.). Wyjaśnijmy pokrótce, na czym te własności polegają.

Zakładając przeciwsymetryczność relacji *bycia częścią* mamy na myśli, iż nie dopuszczamy sytuacji, w której dwa przedmioty mogą być nawzajem swoimi częściami. Dla uzasadnienia przyjęcia tej własności wystarczy odwołać się do codziennego doświadczenia: palec wskazujący prawej dłoni jest częścią prawej dłoni, ale nie odwrotnie; Polska (rozumiana jako obszar na kuli ziemskiej) jest częścią Europy (również rozumianej jako obszar na kuli ziemskiej), lecz nie odwrotnie. Podobnie, codzienne doświadczenie przekonuje nas, że relacja bycia częścią jest również przechodnia: palec wskazujący prawej dłoni jest częścią prawej dłoni, a prawa dłoń jest częścią prawej ręki, zatem palec wskazujący prawej dłoni jest częścią prawej ręki; Częstochowa jest częścią Polski, a Polska jest częścią Europy, zatem Częstochowa jest częścią Europy[12]. Przyjęcie takich własności relacji *bycia częścią* pociąga za sobą również inne własności. Dla przykładu, przeciwsymetryczność relacji *bycia częścią* pociąga za sobą fakt, że jest ona również relacją przeciwzwrotną, tj. żaden przedmiot sam nie może być swoją częścią. Wydaje się, że taka własność tej relacji zgodna jest z jej zwyczajowym użyciem.

[12] Nie wchodzimy tutaj w problem przechodniości relacji *bycia częścią*, która przez niektórych autorów bywa kwestionowana. Na poparcie tez o nieprzechodniości relacji *bycia częścią* podaje się przykłady inkorporujące pewne dodatkowe założenia związane ze strukturalnymi własnościami przedmiotów. Dla przykładu, mówi się, że skoro dyrygent jest częścią orkiestry, a częścią dyrygenta jest jego palec, to palec ten jest również częścią orkiestry. Jedyne znane w literaturze badania dotyczące prób zbadania tzw. nieprzechodnich relacji *bycia częścią* pochodzą od Andrzeja Pietruszczaka i przedstawione są w jego pracach (Pietruszczak 2013 oraz Pietruszczak 2020a). Wyników tych prac nie omawiamy tutaj, gdyż wykraczają one daleko poza nasze obecne zainteresowania.

Relacja *bycia częścią* porównywana jest do teoriomnogościowej relacji inkluzji. W teorii mnogości mamy jednak dwa rodzaje inkluzji: właściwą i niewłaściwą. Ta pierwsza nie dopuszcza równości między zbiorami, ta druga zaś dopuszcza. Relacja *bycia częścią* ma związek właśnie z inkluzją właściwą, która, jako niedopuszczająca równości, podobnie jak relacja *bycia częścią*, jest relacją przeciwzwrotną. Z inkluzją niewłaściwą ma związek pewna rozszerzona relacja stosunku części do całości, którą wprowadził Leśniewski. Jest to relacja *bycia ingrediensem*. Leśniewski nie nazwał tej relacji „relacją bycia częścią niewłaściwą", gdyż chciał uniknąć niepotrzebnego zamieszania terminologicznego, jakie mogłaby wywołać próba interpretacji natury tej relacji w oparciu o jej nazwę. *Ingrediensem* danego przedmiotu jest on sam oraz każdy inny przedmiot, który jest jego częścią. Taka relacja jest już zwrotna.

Relacja *bycia ingrediensem* istotnie wzbogaca język mereologii, pozwalając definiować kolejne, użyteczne relacje. Szczególnie użyteczne są stanowiące nawzajem swe dopełnienia relacje *zachodzenia na* oraz *bycia zewnętrznym względem*. Pierwsza z nich odpowiada sytuacji, gdy dwa przedmioty posiadają jakiś wspólny ingrediens, druga zaś, gdy taki wspólny ingrediens nie istnieje. Dla przykładu, rozważmy dwa geograficzne obszary: obszar zajmowany przez województwo mazowieckie oraz obszar Polski znajdujący się na wschód od rzeki Wisły. Wówczas obszary te zachodzą na siebie, gdyż istnieje obszar, np. obszar zajmowany przez miasto Ciechanów, który znajduje się w obu tych obszarach, a więc istnieje obszar, który jest ich wspólnym ingrediensem. Zewnętrzne względem siebie będą natomiast obszary zajmowane np. przez województwo dolnośląskie i śląskie, gdyż nie ma takiego obszaru, który znajdowałby się w obu, a więc nie istnieje ich wspólny ingrediens.

Określone wyżej relacje *zachodzenia na* oraz *bycia zewnętrznym względem* posiadają szereg różnych własności, a oprócz nich można za pomocą relacji *bycia częścią* zdefiniować w mereologii jeszcze wiele innych relacji (zob. np. Gorzka 2003, s. 11; Pietruszczak 2000, s. 62 i nn.; Gruszczyński 2016, s. 20). Jednak z punktu widzenia stanowiącej przedmiot naszego zainteresowania bezpunktowej teorii przestrzenie w ujęciu Tarskiego wprowadzone wyżej dwie relacje będą wystarczające.

Kluczową dla mereologii jest konstrukcja pojęcia *klasy kolektywnej* lub *zbioru kolektywnego*. Jak zaznaczyliśmy na początku, pojęcie to jest możliwe do zdefiniowania wyłącznie przy użyciu relacji *bycia częścią* oraz – oczywiście – wszystkich relacji w stosunku do niej pochodnych. Mówiąc obrazowo, tworzenie z jakiejś grupy przedmiotów klasy kolektywnej (zbioru kolektywnego) polega na wskazaniu takiego przedmiotu, który uznamy za całość zbudowaną ze wszystkich przedmiotów z tej grupy. Wskazanie obiektu stanowiącego całość zbudowaną z przedmiotów z danej grupy polega więc na ustaleniu pewnej relacji między danym przedmiotem a grupą przedmiotów zachodzącą wówczas, gdy przedmiot ten uznajemy za całość utworzoną z przedmiotów tej grupy. Relację tę nazywamy relacją *sumy mereologicznej*. Dla wygody zdefiniujemy ją przy użyciu relacji pochodnych w stosunku do relacji *bycia częścią*, tj. za pomocą relacji *bycia ingrediensem* oraz relacji *zachodzenia na*:

> przedmiot X jest sumą mereologiczną grupy przedmiotów Z wtedy i tylko wtedy, gdy każdy przedmiot z grupy Z jest ingrediensem X-a oraz każdy ingrediens X-a zachodzi na jakiś przedmiot z grupy Z.

Spróbujmy wyjaśnić istotę tej na pozór skomplikowanej definicji. Spełnienie pierwszego członu w sformułowanej w określeniu tej relacji koniunkcji gwarantuje, że tworząc sumę mereologiczną przedmiotów z danej grupy, żaden z nich w procesie sumowania nie zostanie „pominięty". Istotnie, zgodnie z warunkiem wyrażonym w tym członie, każdy przedmiot z grupy Z ma swój udział w tworzonej sumie mereologicznej (czyli przedmiocie X) jako ingrediens, innymi słowy, każdy przedmiot z grupy Z składa się na będący jej sumą mereologiczną przedmiot X.

Spełnienie drugiego członu sformułowanej wyżej koniunkcji gwarantuje z kolei, że przedmiot mający być sumą mereologiczną grupy przedmiotów nie jest w pewnym sensie „za duży", tzn. nie zawiera w sobie ingrediensów niemających niczego wspólnego z jakimkolwiek przedmiotem z sumowanej grupy. Działanie obu użytych w definicji sumy mereologicznej warunków zilustrujmy na prostym przykładzie.

Załóżmy, że grupa przedmiotów Z składa się z województw polskich, rozumianych jako geograficzne obszary. Wówczas geograficznym obszarem będzie również obiekt stanowiący sumę mereologiczną tej grupy. Oczywiście, powinien nim być obszar geograficzny zajmowany przez Polskę. Rozważmy w związku z tym zbudowany zgodnie z przytoczoną wyżej definicją sumy mereologicznej obszar i sprawdźmy, czy odpowiada on obszarowi zajmowanemu przez Polskę. Po pierwsze, spełnienie pierwszego warunku definicji sumy mereologiczne gwarantuje, że obszar każdego województwa stanie się ingrediensem tworzonego jako suma obszaru, a co za tym idzie, nie zostanie „zgubiony" żaden fragment obszaru geograficznego zajmowanego przez Polskę. Aby zilustrować działanie drugiego warunku koniunkcji, załóżmy nie wprost, że sumą mereologiczną obszarów województw jest obszar będący obszarem geograficznym większym od obszaru zajmowanego przez Polskę. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest to łączny obszar zajmowany przez Polskę oraz Niemcy. Wówczas, oczywiście, pierwszy człon definicji sumy mereologicznej będzie spełniony, gdyż biorąc obszar większy niż obszar zajmowany przez Polskę, bierzemy tym samym każdy jej fragment, w szczególności – bierzemy wszystkie obszary zajmowane przez województwa. Jednak taki powiększony obszar nie będzie spełniał drugiego członu koniunkcji użytej w definicji sumy mereologicznej. Człon ten mówi, że każdy ingrediens obiektu wskazanego jako suma mereologiczna obiektów z danej grupy musi mieć wspólny ingrediens z jakimś obiektem z tej grupy. Aby się przekonać, że wskazany przez nas powiększony obszar nie spełnia tego warunku, wystarczy rozważyć obszar zajmowany np. przez jakiś niemiecki land. Wówczas obszar zajmowany przez ten land nie ma nic wspólnego z żadnym z obszarów zajmowanych przez którekolwiek z polskich województw, tj. nie zachodzi na żaden z tych obszarów. Zatem obszar ten nie może być brany jako składnik budowanej sumy, a w związku z tym należy go w jej tworzeniu pominąć. Przeprowadzając analogiczną operację w stosunku do obszarów zajmowanych przez kolejne niemieckie landy i sukcesywnie pomijając je jako wnoszące nadmiarowe fragmenty do obszaru budowanej sumy, uzyskamy ostatecznie obszar dokładnie odpowiadający obszarowi zajmowanemu przez Polskę. Takie rozumowanie można powtórzyć dla dowolnego, większego niż zajmowany przez Polskę, obszaru, który uważalibyśmy za sumę mereologiczną grupy województw. Jedynie wzięcie obszaru dokładnie odpowiadającego obszarowi zajmowanemu przez Polskę gwarantuje, że obszar ten będzie spełniał sformułowane wyżej oba warunki sumy mereologicznej.

Mimo iż dwa pierwsze aksjomaty mereologii sprawiają, że definicja sumy mereologicznej w poprawny sposób pozwala tworzyć całość ze wskazanej grupy przedmiotów, to jednak nie gwarantują one ani tego, że dla dowolnej grupy przedmiotów zawsze taka całość istnieje, ani też tego, że jeśli nawet całość ta istnieje, to jest dokładnie jedna. Innymi słowy, dwa pierwsze aksjomaty mereologii nie gwarantują ani istnienia sum mereologicznych, ani ich jednoznaczności – fakty te trzeba przyjąć aksjomatycznie. Należy przy tym zaznaczyć, że Leśniewski przyjął tzw. nieograniczony aksjomat istnienia sum mereologicznych. Owa nieograniczona postać tego aksjomatu stwierdza, że suma mereologiczna istnieje dla dowolnego, niepustego, dystrybutywnego zbioru przedmiotów. Podkreślamy ten fakt, ponieważ istnieją warianty teorii „części i całości", w których zakłada się istnienie sum mereologicznych jedynie dla zbiorów skończonych. Przyjęcie przez Leśniewskiego aksjomatu istnienia sum w wersji nieograniczonej można odczytywać jako wyraz tego, że w tworzonej przez niego teorii stosunku części do całości, oprócz własności samego relacyjnego pojęcia *bycia częścią*, nie przyjmujemy żadnych dodatkowych założeń dotyczących natury rozpatrywanych obiektów, a w szczególności takich, które przekładałyby się na ograniczenia w budowaniu sum mereologicznych. Możemy więc obrazowo powiedzieć, że sformułowana przez Leśniewskiego mereologia jest „czystą" teorią stosunku części do całości.

Na podstawie zarysowanych wyżej pojęć mereologii można na pierwszy rzut oka przypuszczać, iż dostępne w tej teorii środki wyrazu są wystarczające do opisu całej różnorodności relacji zachodzących między przestrzennymi regionami. Tak jednak nie jest. Istnieją bowiem takie relacje między przedmiotami, których nie można w adekwatny sposób wysłowić w terminach mereologicznych. Aby to zilustrować, przyjrzyjmy się następującemu przykładowi.

Rozważmy ponownie geograficzne regiony zajmowane przez polskie województwa. Jak ustaliliśmy wcześniej, zewnętrznym wobec obszaru zajmowanego przez województwo śląskie jest obszar zajmowany przez województwo dolnośląskie, gdyż nie istnieje region, który byłby ich wspólnym ingrediensem. Podobnie, zewnętrznym wobec obszaru zajmowanego przez województwo śląskie jest obszar zajmowany przez województwo małopolskie. Wiemy jednak, że przestrzennie obie te sytuacje różnią się od siebie, gdyż województwo śląskie „przylega" do województwa małopolskiego, dzieląc z nim wspólną granicę, natomiast województwo małopolskie jest od województwa dolnośląskiego całkowicie odseparowane. Ogólnie rzecz biorąc, w terminach mereologii nie jesteśmy w stanie odróżnić sytuacji, w których dwa obiekty są względem siebie zewnętrzne, ale dodatkowo odseparowane jakimś innym obiektem, od sytuacji, gdy są względem siebie zewnętrzne, ale jednocześnie „nic ich nie oddziela", zachodzącą zaś między nimi relację w języku potocznym określilibyśmy jako „stykanie".

Niedające się uchwycić w mereologii relacje tego typu w naturalny sposób są odróżnialne w punktowych teoriach przestrzeni, w których mamy do czynienia zarówno z punktami, jak i różnego rodzaju ich zbiorami. W teoriach tych mamy bowiem możliwość zdefiniowania pojęcia *brzegu* zbioru, który, mówiąc obrazowo, jest obiektem ograniczającym dany zbiór, a jednocześnie oddzielającym go od otoczenia[13]. Posługując się takimi środkami wyrazu powiemy o dwóch zbiorach, że się stykają, gdy ich brzegi mają co najmniej jeden wspólny punkt. Nie wnikając jednak w szczegóły takich konstrukcji, możemy tylko powiedzieć, że w związku z tym, że brzegi są zawsze tworami o wymiarach niższych niż obiekty przez te brzegi ograniczane, a w bezpunktowych teoriach przestrzeni z założenia mamy do czynienia z obiektami wyłącznie trójwymiarowymi, relacje odpowiadające stykaniu się regionów nie są w mereologii możliwe do zdefiniowania w sposób analogiczny do definicji w teoriach punktowych. Okazuje się, że niemożliwość wysłowienia takiej relacji w terminach części i całości tkwi w samej istocie mereologii (zob. np. Biacino, Gerla 1991).

Aby jednak nie pozbawiać się możliwości „wglądu" w opisane wyżej konfiguracje obiektów, a jednocześnie móc stosować naturalny do opisu przestrzeni język stosunku części do całości, jedynym rozwiązaniem zarysowanego wyżej problemu jest rozszerzenie systemu mereologii o dodatkowe, niedefiniowalne w terminach części i całości relacje, które pozwolą problematyczne konfiguracje między obiektami odróżnić. W tak rozszerzonym systemie mereologii chodzi więc o możliwość odróżnienia sytuacji, w której jakieś obiekty są od siebie odseparowane, od sytuacji, w której obiekty te są w jakimś sensie połączone[14]. Tego typu rozszerzony system mereologii można uzyskać na dwa sposoby: poprzez aksjomatyczne dodanie do pojęć mereologii dodatkowego, relacyjnego pojęcia pozwalającego wyrazić np. relację *bycia w kontakcie* lub poprzez aksjomatyczne

[13] Mówiąc dokładniej, pojęcia tego typu jesteśmy w stanie zdefiniować w topologii.

[14] Przyjęcie jakiegokolwiek środka wyrazu pozwalającego na mówienie o tego typu relacjach prowadzi w rezultacie do rozszerzenia systemu mereologicznego o komponent inspirowany narzędziami topologicznymi, dlatego uzyskane w ten sposób teorie noszą wspólne miano teorii *mereotopologicznych*.

wyróżnienie w uniwersum rozważań jakiejś specyficznej grupy obiektów, które następnie tego typu relację pozwoliłyby określić. Drugi z opisanych tu wariantów rozszerzenia mereologii w tworzeniu bezpunktowej teorii przestrzeni wybrał Alfred Tarski.

4. Tarskiego geometria brył

Stworzona przez Tarskiego bezpunktowa teoria przestrzeni wykazuje swego rodzaju ciągłość w stosunku do mereologii, stanowiącej podstawę wszystkich tego typu teorii. Jest ona bowiem teorią będącą nie tylko rozszerzeniem mereologii, ale ponadto stanowiącą kontynuację badań nad jej zastosowaniami zaproponowanych przez samego jej twórcę, Stanisława Leśniewskiego, którego Tarski był uczniem. Jak można bowiem przeczytać na samym początku liczącego zaledwie kilka stron artykułu zatytułowanego *Foundation of the geometry of solids* (zob. Tarski 1956), w którym Tarski podał zarys swej teorii, sformułowana tam przez niego *geometria brył* stanowi rozwiązanie pewnego problemu teoretycznego postawionego przez Leśniewskiego:[15]

> Kilka lat temu Leśniewski postawił problem ustalenia podstaw geometrii brył, rozumiejąc pod tym terminem system geometrii pozbawiony takich figur geometrycznych, jak punkty, linie i powierzchnie, a uznając za figury jedynie bryły – intuicyjne korelaty otwartych (lub domkniętych), regularnych zbiorów trójwymiarowej geometrii euklidesowej. Specyfika takiej geometrii brył – w odróżnieniu od wszystkich geometrii punktowych – ukazana jest zwłaszcza w prawie, zgodnie z którym każda figura zawiera inną figurę jako część właściwą (Tarski 1956, tłum. własne).

Pełną rekonstrukcję jedynie zarysowanej przez Tarskiego teorii przeprowadzili R. Gruszczyński i A. Pietruszczak, a uzyskane wyniki opisali w pracy *Full Development of Tarski's Geometry of Solids* (zob. Gruszczyński, Pietruszczak 2008). W pracy tej autorzy dokonali bardzo wnikliwego odczytania zaproponowanego przez Tarskiego systemu, zwracając uwagę na konsekwencje wszystkich sformułowanych tam założeń, zarówno tych wypowiedzianych jawnie w formie tzw. postulatów, jak i tych przez Tarskiego przemilczanych, ale mających w rezultacie sprawić, iż geometria brył stanie się zgodnie z zamierzeniem jej autora tzw. teorią kategoryczną, czyli, mówiąc obrazowo, teorią, która nie dopuszcza różnych interpretacji[16]. Praca Gruszczyńskiego i Pietruszczaka nad systemem Tarskiego, oprócz wyników „wewnątrz" samej teorii, zawiera wyniki natury me-

---

[15] Pierwotnie tekst Tarskiego, napisany w języku francuskim, ukazał się w roku 1929 w *Księdze pamiątkowej pierwszego polskiego zjazdu matematycznego* (zob. Tarski 1929), późniejsze zaś tłumaczenie na język angielski ukazało się w tomie dzieł zebranych Tarskiego (zob. Tarski 1956).

[16] Teoria kategoryczna to taka teoria, której wszystkie modele są ze sobą izomorficzne, czyli dziedziny tych modeli posiadają równą ilość elementów, a same te dziedziny są ze sobą strukturalnie identyczne. Innymi słowy, ze strukturalnego punktu widzenia, modele danej kategorycznej teorii są od siebie strukturalnie nieodróżnialne.

tateoretycznej, dlatego podjęte przez nich studium uznać należy za kompletne. Niejako na marginesie tych rozważań autorzy ci zbadali również pewną specyficzną teorię geometryczną autorstwa włoskiego matematyka Mario Pieriego (zob. Gruszczyński, Pietruszczak 2007), która stanowi istotny komponent geometrii brył. Poniżej postaramy się, w oparciu o wspomniane wyżej prace autorstwa Gruszczyńskiego i Pietruszczaka, krótko przedstawić istotę systemu Tarskiego.

Uniwersum dyskursu teorii Tarskiego stanowi *przestrzeń* oraz jej *kawałki*, zwane *regionami*. Regiony mają stanowić wyrażoną w formalnej teorii idealizację trójwymiarowych obszarów z przestrzeni bezpośredniego doświadczenia. W związku z tym, że zarówno przestrzeń, jak i jej fragmenty są regionami, a każdy różny od przestrzeni region jest jej częścią, przestrzeń staje się regionem maksymalnym względem relacji *bycia częścią*.

Wśród regionów wyróżnia Tarski pewien specyficzny ich rodzaj – *kule mereologiczne*. Kule mereologiczne mają stanowić idealizację tych obszarów z przestrzeni bezpośredniego doświadczenia, o których powiemy, że mają kształt kuli lub że są kuliste. Pojęcie kuli jest w teorii Tarskiego kluczowe, gdyż to właśnie ono jest nośnikiem pojęcia punktu. Dalsza aksjomatyzacja teorii ma na celu takie uchwycenie formalnych własności pojęcia kuli, które po zastosowaniu narzędzi znanych z metody ekstensywnej abstrakcji umożliwią pełną rekonstrukcję pojęcia punktu, samo zaś pojęcie kuli mereologicznej stanie w jednoznacznej korespondencji z jej teoriomnogościowym korelatem, znanym ze zwykłej geometrii, czyli z tzw. kulą euklidesową.

Ze stanowiącą rdzeń systemu Tarskiego mereologią wiąże się występujące w nazwie tej teorii pojęcie *bryły*. Bryłami są bowiem mereologiczne sumy dowolnych zbiorów kul. Jako takie, bryły mogą być obiektami o różnej postaci, tj. mogą to być obiekty zwarte, będące niejako „w jednym kawałku”, ale mogą to być też obiekty składające się z odseparowanych od siebie fragmentów. Przykładem takiej „rozczłonkowanej wewnętrznie” bryły byłaby np. suma mereologiczna dwóch kul, które znajdują się w różnych, niejako odległych, miejscach w przestrzeni. Chociaż bryły mają stanowić swego rodzaju „pomost mereologiczny” między kulami a regionami, to jednak ich wzajemny stosunek jest w systemie Tarskiego problematyczny. Spróbujmy opisać krótko istotę tego problemu.

Ponieważ będące elementami uniwersum dyskursu teorii Tarskiego kule mereologiczne są regionami, regionami będą również dowolne ich „zlepki”, czyli, mówiąc ściślej, regionami będą sumy mereologiczne dowolnych układów kul. Oczywiście, nie każdy region jest kulą, jednak wobec zagwarantowanej przez narzędzia mereologii operacji tworzenia całości z części można zadać pytanie, czy każdy region da się przedstawić jako „zlepek” kul mereologicznych, czy da się niejako w całości „wypełnić” kulami? Chodzi oczywiście o to, czy każdy region jest sumą mereologiczną jakiegoś zbioru kul, a więc – czy jest bryłą.

Okazuje się jednak, iż to, czy każdy region jest bryłą, nie wynika ani z aksjomatów mereologii, ani też ze sformułowanych jawnie przez Tarskiego dodatkowych postulatów (o których będzie mowa dalej). Do takiego wniosku prowadzą teoriomodelowe rozważania zaprezentowane w pracy Gruszczyńskiego i Pietruszczaka (2008). Szczególnie interesujące z filozoficznego punktu widzenia są te wynikające z przeprowadzonych tam konstrukcji własności samej przestrzeni. Autorzy wskazują bowiem taki model teorii Tarskiego, w którym pierwotna przestrzeń jest w pewnym sensie większa niż obszar będący sumą mereologiczną wszystkich kul[17]. Mereologiczna przestrzeń nie da się więc w całości „wypełnić" mereologicznymi kulami, tj. zawsze znajdziemy taki fragment przestrzeni, w którym nie istnieje żadna kula. Z tego względu, bez uprzedniego wprowadzenia dodatkowych aksjomatów, wyróżnić można dwa rodzaje przestrzeni: *przestrzeń*, która jest sumą mereologiczną wszystkich kul, oraz tzw. *super-przestrzeń* (ang. *super-space*), która jest sumą mereologiczną wszystkich regionów, a więc przestrzenią z pierwotnego uniwersum dyskursu. Można obrazowo powiedzieć, że przestrzeń okazuje się być jedynie „zanurzona" w większej od niej super-przestrzeni.

W pracy Gruszczyńskiego i Pietruszczaka (Gruszczyński, Pietruszczak 2008) opisany wyżej fakt stał się podstawą do wyróżnienia trzech różnych teorii związanych z proponowanym przez Tarskiego systemem geometrii brył. Najsilniejszą z nich, bo prowadzącą w efekcie do wspomnianej kategoryczności, jest teoria zakładająca równość między bryłami a regionami. W związku z tym, w dalszej części niniejszej pracy opierać się będziemy na tej właśnie, najsilniejszej spośród możliwych do określenia teorii i nazywać ją będziemy *geometrią brył*. Ponieważ w geometrii brył pojęcie regionu pokrywa się z pojęciem bryły, do końca niniejszej pracy będziemy się posługiwali wyłącznie tym drugim pojęciem.

Jak już wspomnieliśmy, pojęcie punktu jest w teorii Tarskiego konstruowane na bazie kul mereologicznych. Istota tej konstrukcji opiera się na odpowiednim przeniesieniu do uniwersum brył pewnej znanej z geometrii euklidesowej relacji zachodzącej między kulami euklidesowymi, a następnie wykorzystaniu tej relacji do reprezentowania lokalizacji w przestrzeni. Chodzi o tzw. *relację koncentryczności kul* lub *współśrodkowości kul*. W zwykłej geometrii, w której dysponujemy pojęciem punktu, dwie kule uznamy za koncentryczne, gdy mają one wspólny środek. Oczywiście, relacja ta nie da się w analogiczny sposób zdefiniować w odniesieniu do kul mereologicznych, gdyż w tym uniwersum brył z założenia nie dysponujemy pojęciem punktu. Zauważmy jednak, że gdybyśmy w uniwersum brył mieli przed sobą zbiór wielu kul mereologicznych, tworzących układ odpowiadający zarysowanej wyżej relacji koncentryczności, to nie mając wspólnego środka tych kul, moglibyśmy mieć o nim wyobrażenie jako o abstrakcyjnej granicy, do której zbiegają coraz bardziej „kurczące" się kule tworzące ten układ. Na tej obserwacji oparta jest istota zaproponowanej przez Tarskiego metody definiowania punktu: zamiast definiować koncentryczność przy użyciu punktu, którym po prostu nie dysponujemy, spróbujmy relację koncentryczności kul mereologicznych zdefiniować innymi dostępnymi środkami, a następnie re-

[17] Szczegółowa konstrukcja modelu zob. Gruszczyński, Pietruszczak 2008, 523–526.

lację tę wykorzystać do zdefiniowania punktu. O zaproponowanej przez Tarskiego metodzie definiowania punktu możemy więc powiedzieć, że polega niejako na odwróceniu kolejności definiowania pojęć, która ma miejsce w zwykłej, euklidesowej geometrii.

Oczywiście, ciężar opisanej wyżej metody prowadzącej do definicji pojęcia punktu spoczywa na odpowiedniej definicji relacji koncentryczności kul. Tę zaś wyrazić możemy wyłącznie w terminach kuli mereologicznej oraz relacji *bycia częścią*. Tarski w swej pracy podał bardzo pomysłowy przepis na taką definicję. Zaproponowana tam przez niego konstrukcja opiera się na kilku zdefiniowanych w dość zawiły sposób pojęciach pomocniczych, dlatego dokładne przytaczanie jej w tym miejscu nadmiernie komplikowałoby opis. W związku z tym postaramy się istotę tej konstrukcji przedstawić tu w uproszczony, ale wierny sposób.

Aby to uczynić, potrzebujemy na początek przywołać istotę jedynie dwóch pierwszych, skonstruowanych przez Tarskiego, pomocniczych relacji, zachodzących między kulami mereologicznymi. Chodzi o relację *zewnętrznej styczności* oraz relację *wewnętrznej styczności* kul. Mówiąc obrazowo, relacja zewnętrznej styczności kul odpowiada sytuacji, w której kule są względem siebie zewnętrzne i się „dotykają", natomiast relacja wewnętrznej styczności odpowiada sytuacji, w której jedna kula jest częścią drugiej i niejako „dotyka" od środka jej brzegu[18]. Dysponując tymi wyjaśnieniami, spróbujmy w tym miejscu sformułować istotę definicji relacji koncentryczności kul mereologicznych. Otóż dwie kule mereologiczne uznamy za znajdujące się w konfiguracji odpowiadającej relacji koncentryczności, gdy jedna z tych kul jest częścią drugiej, oraz gdy każdą znajdująca się „stycznie pomiędzy nimi" kulę, tj. kulę znajdująca się wewnątrz kuli większej, ale na zewnątrz kuli mniejszej, która do obu tych kul jest styczna (do mniejszej – zewnętrznie, do większej zaś – wewnętrznie), można swobodnie pomiędzy tymi kulami „przetoczyć", zachowując cały czas tę styczność[19].

Relacja koncentryczności pozwala następnie na sformułowanie definicji punktu w Tarskiego geometrii brył: punktem będziemy nazywali zbiór wszystkich kul koncentrycznych z daną kulą. Aby więc stworzyć w punkt w geometrii brył, należy wskazać jakąś kulę, a następnie zebrać wszystkich pozostałe kule z nią koncentryczne. Uzyskany w ten sposób dystrybutywny zbiór kul pozwala na traktowanie go jako „imitującego" pewną jednoznacznie określoną lokalizację w przestrzeni, tę mianowicie, do której zbiegają kule tworzące zbiór kul koncentrycznych.

---

[18] Można by w tym miejscu poczynić zarzut, że wobec wcześniejszych ustaleń, według których relacje styczności nie są możliwe do zdefiniowania przy użyciu samych tylko pojęć mereologii, opisywane tutaj pojęcia styczności kul również nie są definiowalne. Tak jednak nie jest. Zwróćmy bowiem uwagę na to, że definiowane tu relacje styczności odnoszą się do obiektów stanowiących odpowiednie rozszerzenie pojęć pierwotnych mereologii – dalsza aksjomatyzacja systemu pokaże, że podawane przez nas wyjaśnienia są jednak poprawne.

[19] Sytuacja ta przypomina nieco działanie stosowanego powszechnie w urządzeniach mechanicznych tzw. łożyska kulowego, z tym że rolę kul koncentrycznych pełnią w tym przykładzie koncentryczne pierścienie.

Z powyższego określenia pojęcia punktu wynikają podstawowe jego własności, przekonujące jednocześnie o poprawności sformułowanej definicji. Dla przykładu, dany punkt określony jest jednoznacznie niezależnie od tego, na bazie której spośród koncentrycznych kul skonstruujemy cały ich zbiór, tj. dowolne kule, które są koncentryczne, wyznaczają dokładnie ten sam punkt. Ponadto, różne punkty są wyznaczane przez kule, które nie są koncentryczne. Innymi słowy, biorąc dwie kule, które nie są koncentryczne, wygenerowane na ich bazie punkty będą różne. Definicja punktu jako układu koncentrycznych kul doskonale odzwierciedla więc przedstawione wcześniej pojęcie klasy abstrakcji w zaproponowanej przez Whiteheada konstrukcji geometrycznych pojęć metodą ekstensywnej abstrakcji. Dodatkowo, z racji odpowiedniego dobrania pojęć pierwotnych i oparcia definicji punktu na pojęciu kuli mereologicznej, opisane przez Tarskiego konstrukcje niejako samoistnie omijają sformułowane wcześniej konstrukcyjne pułapki.

Tworząc zbiór złożony ze wszystkich zdefiniowanych w opisany wyżej sposób punktów, otrzymujemy w rezultacie punktową przestrzeń, która może stać się z kolei nośnikiem zwykłej geometrii. Aby jednak tak się stało, należy ją wzbogacić o specyficzne dla geometrii narzędzia, które pozwalają m.in. na porównywanie odległości między punktami. Okazuje się, że w pojęciu kuli tkwi tego typu relacyjne pojęcie – jest to tzw. *relacja trójkąta równoramiennego* lub *relacja równej odległości*. Pozwala ona wyrazić w sformułowanych wyżej terminach fakt, że dwa punkty są równoodległe od trzeciego. Aby jednak wprowadzić tę relację, jak również aby sformułować pozostałe postulaty geometrii brył, musimy określić dwa bardzo użyteczne pojęcia: pojęcie *punktu wewnętrznego bryły* oraz pojęcie *punktu brzegowego bryły*.

Oba niezbędne pojęcia możemy wyrazić przy użyciu wprowadzonych wcześniej relacji pochodnych w stosunku do relacji *bycia częścią*, tj. relacji *bycia ingrediensem* oraz relacji *zachodzenia na*. Powiemy, że dany punkt (rozumiany jako zbiór koncentrycznych kul) jest *punktem wewnętrznym* danej bryły, gdy istnieje taka kula należąca do tworzącego ten punkt układu kul, która jest ingrediensem tej bryły. Wówczas, oczywiście, każda koncentryczna kula znajdująca się „pod" taką kulą również będzie ingrediensem tej bryły. Dlatego abstrakcyjną lokalizację wyznaczoną przez taki układ zbiegających kul będzie można uznać za mieszczącą się we wnętrzu danej bryły. Dalej, powiemy, że dany punkt (rozumiany jako zbiór koncentrycznych kul) jest *punktem brzegowym* danej bryły, gdy każda kula należąca do tworzącego ten punkt układu kul koncentrycznych zachodzi na tę bryłę, ale jednocześnie nie jest jej częścią. W takiej sytuacji, zstępujący ciąg kul należących do takiego punktu wyznacza lokalizację, która nie znajduje się ani wewnątrz bryły (gdyż żadna z kul należących do tego punktu nie jest ingrediensem tej bryły), ani na zewnątrz bryły (gdyż każda kula należąca do tego punktu – w związku z tym, że zachodzi na tę bryłę – nie jest wobec niej zewnętrzna), lecz znajduje się właśnie niejako „na granicy" tej bryły. Mając do dyspozycji oba te pojęcia, możemy przystąpić do opisania kolejnych definicji.

Po pierwsze, za pomocą pojęcia punktu brzegowego możemy w dość intuicyjny sposób określić zapowiadaną wyżej relację *równej odległości*. Powiemy, że dwa punkty są *tak samo odległe* od trzeciego punktu, gdy w tworzącym ten trzeci punkt układzie kul koncentrycznych istnieje taka kula, na której brzegu leżą dwa pierwsze punkty. Określenie to odpowiada stosowanemu w zwykłej geometrii euklidesowej sposobowi definiowania pojęcia sfery, czyli brzegu kuli. Istotnie, w zwykłej geometrii mówimy bowiem, że sferą jest zbiór wszystkich punktów równoodległych od danego punktu. Zatem, podobnie jak w przypadku definiowania relacji koncentryczności, również tutaj stosujemy niejako odwrotną niż w geometrii drogę definiowania – mając jako pierwotne pojęcie kuli, „wydobywamy" ukryte w nim pojęcie *równej odległości*.

Zanim przejdziemy dalej, właściwym będzie poczynienie w tym miejscu dość ważnej uwagi. Otóż dotychczasowe aksjomaty geometrii brył, na których oparte są wszystkie przedstawione wyżej konstrukcje, są w istocie aksjomatami samej mereologii. Chociaż sformułowane definicje wydają się być poprawne oraz wydają się trafnie uchwytywać stanowiące intencję ich budowy pojęcia, to jednak owa ich „poprawność" wynika jedynie z „inkorporacji" do naszego wyobrażenia własności kluczowego dla tych konstrukcji obiektu – kuli mereologicznej, których to własności jawnie w żaden sposób nie przyjęliśmy. Jest to przykład jednej z pułapek, na jakie można natrafić podczas konstrukcji formalnych systemów dedukcyjnych. Pułapka ta polega na tym, że w rozważaniach prowadzonych wewnątrz danej teorii, zamiast o stanowiących przedmiot tej teorii obiektach myśleć wyłącznie w oparciu o to, co jawnie zostało o tych obiektach wysłowione za pomocą aksjomatów, do myślenia o nich wykorzystujemy możliwe ich własności czerpane np. ze znaczenia, jakie zwyczajowo nadajemy nazwom, których akurat używamy dla oznaczenia tych obiektów. Bez przyjęcia specyfikujących dany obiekt postulatów, używanie dla niego jakiejś nazwy stanowi bowiem jedynie wygodny sposób mówienia o nim[20]. W naszym przypadku kule mereologiczne swą właściwą naturę uzyskują dopiero po przyjęciu przez Tarskiego aksjomatów specyficznych, nazywanych przez niego *postulatami*. Postulaty te, odnosząc się wprost do zdefiniowanych przy użyciu kuli pojęć, ustalają tym samym własności samego pojęcia kuli mereologicznej. Ponieważ postulaty te odnoszą się do abstrakcyjnych pojęć konstruowanych za pomocą teoriomnogościowych narzędzi, są one wyrażeniami wyższych rzędów niż aksjomaty mereologii.

Przejdźmy teraz do krótkiego przedstawienia sformułowanych przez Tarskiego właściwych postulatów jego teorii. Pierwszy postulat geometrii brył stwierdza, że układ pojęć złożony ze skonstruowanego zgodnie z omówionymi

[20] Bardzo pouczającą w tym kontekście jest uwaga poczyniona w pracy Gruszczyńskiego i Pietruszczaka (2008, 490–491), gdzie autorzy podali konstrukcję pewnego modelu, w którym nie zachodzi jedna z oczywistych własności przysługujących kulom. Uwaga ta obrazuje ryzyko wynikające z przesadnego interpretowania znaczeń terminów używanych do „mówienia" o obiektach w danej teorii, gdy interpretacja ta wykracza poza jawnie wysłowione w formalnych postulatach teorii własności tych pojęć.

wyżej definicjami zbioru punktów oraz relacji równej odległości spełnia aksjomaty tzw. struktur Pieriego. Struktury Pieriego stanowią aksjomatyzację geometrii euklidesowej, opartą na tych właśnie dwóch pojęciach, tj. pojęciu punktu i relacji równej odległości. Wykorzystane tu przez Tarskiego odkrycie włoskiego matematyka, Mario Pieriego, pozwala w efekcie zaopatrzyć skonstruowaną za pomocą zbiorów koncentrycznych kul punktową przestrzeń w strukturę geometryczną. W strukturach Pieriego możemy następnie przy użyciu teoriomnogościowych narzędzi skonstruować pojęcia pierwotne tzw. struktur Hilberta. Struktury te stanowią w pewnym sensie paradygmatyczny współcześnie typ aksjomatyzacji geometrii euklidesowej. Pierwotne w tych strukturach pojęcia to: pojęcie *linii prostej*, pojęcie *płaszczyzny* oraz dwa relacyjne pojęcia: *relacja przystawania,* która mówi o tym, kiedy jedna para punktów jest od siebie tak samo odległa, jak inna para punktów, oraz relacja *leżenia między* odpowiadająca sytuacji, gdy dany punkt znajdujący się na linii prostej leży między dwoma innymi punktami znajdującymi się na tej prostej[21]. Aksjomaty struktur Pieriego gwarantują, że zdefiniowane w nich narzędziami teoriomnogościowymi owe cztery pojęcia spełniają aksjomaty struktur Hilberta. Wraz z przyjęciem pierwszego postulatu, w skonstruowanym za pomocą koncentrycznych kul zbiorze punktów dysponujemy strukturą geometryczną równoważną geometrii euklidesowej.

Kolejne przyjmowane przez Tarskiego postulaty tworzą swego rodzaju pomost pomiędzy mereologicznym uniwersum brył a abstrakcyjnym uniwersum złożonym z punktowych obiektów. Dokładniej mówiąc, postulaty te ustalają, jakiego rodzaju obiekty geometryczne, tj. podzbiory punktowej przestrzeni, uznajemy za abstrakcyjne korelaty dla odnoszących się wprost do przestrzeni bezpośredniego doświadczenia brył mereologicznych.

Transformacją pozwalającą skonstruować związek między tymi dwiema dziedzinami jest tzw. *operacja wnętrza*. Polega ona na przyporządkowaniu każdej bryle mereologicznej zbioru złożonego ze wszystkich jej punktów wewnętrznych. Otrzymany w ten sposób dla danej bryły zbiór punktów nazywamy jej *wnętrzem*. Dzięki tej konstrukcji, wnętrza brył stają się niejako „odbiciami" brył w punktowym uniwersum. W związku z tym, że żaden z dotychczasowych aksjomatów nie postulował jakiejś specyficznej postaci zbiorów stanowiących wnętrza brył, ich struktura może być dowolna. W szczególności mogą one mieć postać zbiorów nie poddających się naturalnej interpretacji w uniwersum brył. Wyjaśnijmy to na przykładzie.

Rozważmy dowolną bryłę mereologiczną oraz teoriomnogościowy zbiór będący jej wnętrzem. Spróbujmy zastanowić się nad następującym problemem: czy jest możliwe, aby wnętrze tej bryły miało strukturę zbioru, w którym np. istnieje jakiś punkt, który jest zupełnie odseparowany od pozostałych punktów tego zbioru? Lub czy może to być zbiór, w którym pośród tworzących go punktów występuje „punktowa dziura"? Załóżmy, że zachodzi pierwsza możliwość i za-

[21] Zob. Borsuk, Szmielew 1975.

stanówmy się, jaką budowę musiałaby mieć mereologiczna bryła, aby jej wnętrze było zbiorem posiadającym odseparowany punkt. Oznaczałoby to, że sama bryła musiałaby składać się z co najmniej dwóch odseparowanych fragmentów. To, zgodnie z uwagami poczynionymi podczas opisu brył, jest oczywiście możliwe. Problemem jest jednak natura takiego dodatkowego kawałka. Skoro kawałek ten ma w efekcie wygenerować punktowy fragment wnętrza tej bryły, to również on sam musi posiadać punktową naturę. Innymi słowy, aby zbiory o rozważanej tutaj postaci mogły istnieć, musiałyby również istnieć „punktowe bryły". Jednak tego typu obiekty z założenia nie istnieją w uniwersum brył, zatem, jak się wydaje, zbiory będące wnętrzami brył również nie powinny posiadać analizowanej tutaj struktury. Podobnie jest w drugim przypadku: gdybyśmy założyli, że wnętrzem danej bryły może być zbiór posiadający „punktową dziurę", to również sama ta bryła musiałby mieć w sobie pewien „brak" mający punktową naturę. Analogiczne rozumowanie moglibyśmy przeprowadzić przy założeniu, że zbiory będące wnętrzami brył posiadają składniki będące fragmentami linii lub powierzchni, słowem – posiadają w swej budowie jakieś obiekty niższych wymiarów bądź są w pewnych miejscach obiektów takich pozbawione. W związku z tym, mimo iż możliwe do skonstruowania w punktowej przestrzeni, tego typu zbiory musimy jednak wykluczyć jako modelujące bryły. W przeciwnym wypadku, do uniwersum brył musielibyśmy wprowadzić twory, których z założenia tam być nie powinno. Jako modelujące bryły musimy w punktowej, trójwymiarowej przestrzeni pozostawić tylko takie zbiory, które same są trójwymiarowe oraz które nie posiadają „braków" ani też „naddatków" w postaci tworów niższych wymiarów. Zbiory tego typu nazywa się *zbiorami regularnymi*[22].

Związek brył z takimi zbiorami ustala kolejny postulat geometrii brył. Głosi on, że wnętrze każdej bryły jest zbiorem regularnym. Ustalona w tym postulacie korespondencja wiąże więc bryły z takimi podzbiorami przestrzeni euklidesowej, które wydają się być najlepszymi kandydatami do abstrakcyjnego modelowania kawałków przestrzeni bezpośredniego doświadczenia. Zbiory regularne w przestrzeni euklidesowej mają bowiem bardzo dobrze nadającą się do tego celu własność – są „w całości" trójwymiarowe i z natury nie mają żadnego związku z obiektami niższych wymiarów, podobnie jak modelowana przez nie przestrzeń uniwersum brył oraz każdy tej przestrzeni fragment[23].

---

[22] Nie wchodzimy tu w szczegółową dyskusję nad rozróżnieniem zbiorów regularnych na tzw. *zbiory regularnie otwarte* i *zbiory regularnie domknięte*, których oba typy umożliwiają tak naprawdę modelowanie uniwersum brył (zob. Gruszczyński, Pietruszczak 2008, 523). W naszych rozważaniach skupiamy się wyłącznie na intuicji dotyczącej tych obiektów oraz obrazowych wyjaśnieniach posiadanych przez nie własności.

[23] Pomijamy tutaj też pewien dodatkowy, techniczny aspekt, że rodziny zbiorów regularnych są dodatkowo pewnymi naturalnymi strukturami modelującymi samą mereologię (zob. np. Gruszczyński, Pietruszczak 2008).

Kolejny postulat geometrii brył również dotyczy relacji zachodzącej między bryłami a zbiorami regularnymi, jednak odwrotnej w stosunku do relacji sformułowanej we wcześniejszym postulacie. Poprzedni postulat stwierdzał bowiem, że wnętrze każdej bryły jest zbiorem regularnym, ten zaś postulat rozstrzyga to, które spośród zbiorów regularnych zaliczamy do obiektów modelujących mereologiczne bryły. Można byłoby się bowiem zastanawiać, czy modelami mereologicznych brył mają być wszystkie zbiory regularne, czy może jakieś specyficzne ich rodzaj. Rozstrzygający tę kwestię postulat głosi, że dowolny zbiór regularny w przestrzeni euklidesowej jest wnętrzem jakiejś bryły. Innymi słowy, dla dowolnego zbioru regularnego przestrzeni euklidesowej istnieje taka bryła, której wnętrzem jest właśnie ten zbiór. Dlatego można powiedzieć, że każdy ze zbiorów regularnych stanowi abstrakcyjny model dla jakiejś bryły. Postulat ten wzięty razem z postulatem poprzednim gwarantuje, że pomiędzy bryłami a zbiorami regularnymi istnieje jedno-jednoznaczna odpowiedniość.

Dzięki ostatniemu z przyjętych przez Tarskiego postulatów, o którym teraz będzie mowa, oprócz wzajemnie jednoznacznego przeniesienia na siebie obiektów przestrzeni mereologicznej i euklidesowej, wzajemnie jednoznacznie przeniesione zostają na siebie również podstawowe w tych przestrzeniach relacje, tj. mereologiczna relacja *bycia częścią* oraz teoriomnogościowa relacja *bycia podzbiorem*, czyli relacja inkluzji. Z dotychczasowych postulatów geometrii brył wynika, że jeżeli jedna bryła jest częścią drugiej bryły, to między stanowiącymi ich wnętrza zbiorami regularnymi zachodzi odpowiednia relacja inkluzji. Mówiąc dokładniej, zbiór regularny będący wnętrzem bryły, która jest częścią drugiej bryły, jest zawarty w zbiorze regularnym będącym wnętrzem tej drugiej bryły. Treść ostatniego postulatu stwierdza natomiast implikację odwrotną, tj. jeżeli jeden zbiór regularny zawarty jest w sensie relacji inkluzji w drugim zbiorze regularnym, to bryła, której wnętrzem jest ten pierwszy zbiór regularny, jest częścią bryły, której wnętrzem jest ten drugi zbiór regularny. Dzięki przyjęciu tego postulatu mamy dodatkowo pewność, że wszystkie dające się zdefiniować za pomocą relacji inkluzji teoriomnogościowe relacje zachodzące między zbiorami regularnymi znajdują swoje odpowiedniki w uniwersum brył w postaci odpowiednich relacji definiowanych za pomocą relacji *bycia częścią*. Dla przykładu, mereologiczna relacja *zachodzenia na* koresponduje z teoriomnogościową relacją *posiadania niepustego przekroju* przez zbiory, relacja zaś *bycia zewnętrznym względem* koresponduje z teoriomnogościową relacją *posiadania pustego przekroju*.

Ze sformułowanych wyżej postulatów geometrii brył wynika wprost, że wyznaczona przez relacyjne pojęcie *bycia częścią* struktura uniwersum brył pozostaje w jedno-jednoznacznej odpowiedniości z wyznaczoną przez relację inkluzji strukturą rodziny zbiorów regularnych. Zauważmy, że zbiory regularne, jako trójwymiarowe zbiory przestrzeni euklidesowej, mają swoją geometryczną charakterystykę, tj. mają swój geometryczny „kształt”. Powyższe postulaty nie mówią jednak bezpośrednio niczego o tym, czy „geometryczny wygląd” zbiorów regularnych zgodny jest z naszym wyobrażeniem o wyglądzie mereologicznych brył, których zbiory regularne są abstrakcyjnymi korelatami. Powstaje więc wątpliwość, czy abstrakcyjny obraz uniwersum brył zbudowany ze zbiorów regularnych nie jest w pewnym sensie obrazem zdeformowanym. Jak się jednak okazuje, wątpliwości takie nie są potrzebne.

Uzyskany przez Gruszczyńskiego i Pietruszczaka w jednej z ich prac (Gruszczyński, Pietruszczak 2008) główny wynik mówi bowiem o pełnej odpowiedniości pomiędzy strukturą uniwersum brył a strukturą rodziny zbiorów regularnych, czyli o tzw. izomorfizmie struktur (zob. Gruszczyński, Pietruszczak 2008, 518, Fakt 14.2). Dokładniej mówiąc, wynik ten pokazuje, że operacja wnętrza, poza sformułowaną wprost w postaci postulatów jednoznaczną odpowiedniością pomiędzy bryłami a zbiorami regularnymi, ustala również jednoznaczną odpowiedniość między kulami mereologicznymi a kulami euklidesowymi. Innymi słowy, operacja wnętrza „nie zniekształca" mereologicznych kul, gdyż ich abstrakcyjne obrazy, czyli euklidesowe kule, są ich modelami w pełni zgodnymi z modelem zamierzonym. Dowód tego faktu zaprezentowany we wspomnianej pracy (Gruszczyński, Pietruszczak 2008) jest niezwykle żmudny i wymagający wykazania „po drodze" wielu niebanalnych faktów. Dzięki temu rezultatowi mamy jednak pewność, że abstrakcyjny obraz uniwersum brył nie jest w żaden sposób zdeformowany i wiernie oddaje strukturę obiektów, stanowiących idealizację obiektów bezpośredniego doświadczenia.

Podsumowanie

Omówiona pokrótce w niniejszej pracy bezpunktowa teoria przestrzeni autorstwa Alfreda Tarskiego stanowi tylko jeden z elementów w bardzo obszernej klasie systemów tego typu. Sformułowana przez Whiteheada na początku XX wieku koncepcja badań nad źródłem pojęć geometrycznych zaowocowała bowiem propozycjami wielu rozmaitych koncepcji mieszczących się w paradygmacie ontologii bezpunktowej. Chociaż w niniejszej pracy skupiliśmy się wyłącznie na teorii stanowiącej przykład badań w ramach bezpunktowej ontologii przestrzeni, to należy zaznaczyć, że w oparciu o zaproponowaną przez Whiteheada metodę ekstensywnej abstrakcji rozwijane były również bezpunktowe teorie czasu, jedną zaś z pierwszych propozycji była sformułowana przez Bertranda Russella bezpunktowa teoria zdarzeń (zob. np. Gorzka 1992; Pietruszczak 2020b). Część współcześnie prowadzonych badań zmierza m.in. w kierunku łączenia bezpunktowych teorii czasu i przestrzeni w celu stworzenia dynamicznych modeli opisujących ewolucję obiektów w przestrzeni (zob. np. Vakarelov 2020).

Badania nad bezpunktowymi teoriami przestrzeni stanowią dziś bardzo zaawansowaną gałąź wiedzy, mieszczącą się na styku kilku dziedzin matematycznych. Głębokie i wieloaspektowe studium nad tego typu systemami stało się możliwe dzięki dokonanym w latach trzydziestych XX wieku odkryciom, budującym pomost pomiędzy dwiema kluczowymi dla tych badań dziedzinami matematycznymi – algebrą i topologią[24]. Odkrycia te pozwoliły przenieść badania bezpunktowych teorii przestrzeni na zupełnie inny, abstrakcyjny poziom, uzyskane zaś przez lata w tych teoriach wyniki pozwalają na ich zastosowanie w zagadnieniach dotyczących m.in. semantyki logicznej, teorii modeli oraz szerzej – ontologii formalnej (zob. Aiello, Pratt-Hartmann, van Benthem 2007).

Omawiając ideę bezpunktowych teorii przestrzeni należy wyraźnie podkreślić fakt, iż istotny wkład w tę dziedzinę wiedzy wnieśli oraz nadal wnoszą polscy badacze. Jest tak właściwie od samego jej początku, stworzona bowiem przez Stanisława Leśniewskiego mereologia oraz równoważne jej lub jej fragmentom teorie stanowią wspólną podstawą dla wszystkich tego typu systemów. Należy również wspomnieć, że – obok systemu Tarskiego – przykładem oryginalnego systemu opracowanego przez polskiego badacza jest teoria zaproponowana przez Andrzeja Grzegorczyka (Grzegorczyk 1960). W teorii tej Grzegorczyk oparł się na skonstruowanym przez siebie wariancie tzw. słabszego systemu mereologii zaproponowana zaś przez niego definicja punktu wynika wprost z zastosowania narzędzi algebraicznych (zob. Grzegorczyk 1960). Zaproponowane przez Tarskiego i Grzegorczyka systemy zostały gruntownie przebadane przez grupę toruńskich logików (zob. Gruszczyński, Pietruszczak 2018; Gruszczyński, Pietruszczak 2019), uzyskane zaś przez nich wyniki pozwalają również na zainicjowanie zupełnie nowych, bo metaarytmetycznych badań w obrębie bezpunktowej geometrii Tarskiego (zob. Sitek 2017, Ajdukiewicz 1975).

Ontologia bezpunktowa jest żywą i niezwykle ciekawą dziedziną badań z zakresu ontologii formalnej. Stanowi ona również doskonały przykład tego, jak filozoficznie motywowane problemy badawcze mogą uzyskać ścisłe, formalne rozwiązanie.

Bibliografia

Aiello M., Pratt-Hartmann I.E., Benthem J. van (red.) (2007), *Handbook of Spatial Logics*, Springer, Dordrecht; https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5587-4.

Ajdukiewicz K. (1975), *Logika pragmatyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Biacino L., Gerla G. (1991), *Connection structures*, „Notre Dame Journal of Formal Logic" 32 (2), 242–247; https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093635748.

Borsuk K., Szmielew W. (1975), *Podstawy geometrii*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

[24] Chodzi o tzw. twierdzenie Stone'a o reprezentacji algebr Boole'a, które, mówiąc obrazowo, pozwala budować interesujące dla geometrii przestrzenie za pomocą narzędzi czysto algebraicznych (zob. np. Koppelberg 1989; Gruszczyński 2016).

Cotnoir A.J., Varzi A.C. (2021), *Mereology*, Oxford University Press, Oxford.
Gruszczyński R. (2016), *Niestandardowe teorie przestrzeni*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
Gruszczyński R., Pietruszczak A. (2007), *Pieri's Structures*, „Fundamenta Informaticae" 81 (1–3), 139–154.
Gruszczyński R., Pietruszczak A. (2008), *Full Development of Tarski's Geometry of Solids*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 14 (4), 481–540; https://doi.org/10.2178/bsl/1231081462.
Gruszczyński R., Pietruszczak A. (2009), *Space, points and mereology. On foundations of point-free Euclidean geometry*, „Logic and Logical Philosophy" 18, 145–188; https://doi.org/10.12775/LLP.2009.009.
Gruszczyński R., Pietruszczak A. (2018), *A Study in Grzegorczyk Point-Free Topology Part I: Separation and Grzegorczyk Structures*, „Studia Logica" 106, 1197–1238;https://doi.org/10.1007/s11225-018-9786-8.
Gruszczyński R., Pietruszczak A. (2019), *A Study in Grzegorczyk Point-Free Topology Part II: Spaces of Points*, „Studia Logica" 107, 809–843; https://doi.org/10.1007/s11225-018-9822-8.
Grzegorczyk A. (1960), *Axiomatizability of geometry without points*, „Synthese" 12 (2–3), 228–235; https://doi.org/10.1007/BF00485101.
Gorzka C. (1992), *A.N. Whiteheada metoda ekstensywnej abstrakcji z „Process and reality"*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici, Logika" 3 (255), 77–92.
Gorzka C. (2003), *Mereologia a topologia i geometria bezpunktowa*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
Jusiak J. (1992), *Filozofia nauki i teoria poznania Alfreda Northa Whiteheada*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin.
Koppelberg S. (1989), *General Theory of Boolean Algebras*, [w:] Monk J.D., Bonnet R. (red.), *Handbook of Boolean Algebras*, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam – New York – Oxford – Tokyo.
Laguna T. de (1922), *Point, line and surface as sets of solids*, „The Journal of Philosophy" 19, 449–461; https://doi.org/10.2307/2939504.
Lowe V. (2019), *Alfred North Whitehead: The Man and His Work. Volume II: 1910–1947*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland; https://doi.org/10.1353/book.72713.
Pietruszczak A. (2000), *Metamereologia*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
Pietruszczak A. (2013), *Podstawy teorii części*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
Pietruszczak A. (2018), *Metamereology*, The Nicolaus Copernicus University Scientific Publishing House, Toruń; https://doi.org/10.12775/3961-4.
Pietruszczak A. (2020a), *Foundations of the Theory of Parthood. A Study of Mereology*, Trends in Logic 54, Springer; https://doi.org/10.1007/978-3-030-36533-2.

Pietruszczak A. (2020b), *Ontologia bezpunktowa na przykładzie formalizacji teorii zdarzeń Bertranda Russella*, [w:] A.M. Karczewska, A. Starościc (red.), *Bóg, czas i wolność*, Towarzystwo Naukowe Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego Jan Pawła II, Lublin, 143–181.

Quine W.V. (1974), *Logika matematyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Sitek G. (2017), *The Notion of the Diameter of Mereological Ball in Tarski's Geometry of Solids*, „Logic and Logical Philosophy" 26 (4), 531–562; https://doi.org/10.48550/arXiv.2004.14755.

Skowron B. (2022), *Część i całość. W stronę topoontologii*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa; https://www.orcid.org/10.17388/WUT.2021.004.AINS.

Tarski A. (1929), *Les fondements de la géométrie des corps*, [w:] *Księga pamiątkowa pierwszego polskiego zjazdu matematycznego*, dodatek do „Annales de la Société Polonaise de Mathématique", Kraków, 29–33.

Tarski A. (1956), *Foundations of the geometry of solids*, [w:] *Logic, semantics, metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, Clarendon Press, Oxford, 24–33.

Vakarelov D. (2020), *Point-free theories of space and time*, arXiv:2004. 14755; https://doi.org/10.48550/arXiv.2004.14755.

Whitehead A.N. (1919), *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*, Cambridge University Press, Cambridge.

Whitehead A.N. (2021), *Proces i rzeczywistość. Esej kosmologiczny. Wykłady Gifforda wygłoszone na Uniwersytecie w Edynburgu w sesji 1927–1928*, Wydawnictwo Marek Derewiecki, Kęty.

On the idea of point-free theories of space based on the example of Tarski's Geometry of Solids

Summary

The paper presents the main idea of point-free theories of space based on Tarski's system of point-free geometry. First, the general idea of the so-called point-free ontology was discussed, as well as the epistemological and methodological reasons for its adoption. Next, Whitehead's method of extensive abstraction, which is the methodological basis for the construction of point-free theories of space, is presented, and the fundamental concepts of mereology are discussed. The main part of the paper is a discussion of Tarski's geometry of solids, its postulates and metatheoretical properties. The paper ends with a short description of the contribution of Polish researchers to the development of research on point-free theories of space.

Keywords: point-free ontology, point-free theories of space, mereology, Tarski's geometry of solids.